
 MATHEMATIQUES 1

EXERCICE

a. f est continue sur le compact $[0, 1]^2$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0, 1]^2$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]^2$, à valeurs dans \mathbb{R} . On sait alors que f admet un maximum sur ce compact.

b. f est de classe C^1 sur l'ouvert $]0, 1[^2$. On sait alors que si f admet un maximum en un point (x_0, y_0) de cet ouvert, (x_0, y_0) est un point critique de f . Or, pour $(x, y) \in]0, 1[^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+y^2} \times \frac{(1+x^2) - 2x(x+y)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2-2xy}{(1+y^2)(1+x^2)^2},$$

puis en échangeant les rôles de x et y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1-y^2-2xy}{(1+x^2)(1+y^2)^2}.$$

Par suite, pour $(x, y) \in]0, 1[^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2-2xy = 0 \\ 1-y^2-2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 \\ 1-x^2-2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 1-3x^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, si f admet un maximum dans $]0, 1[^2$, ce maximum est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2/\sqrt{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{9}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

c. Soient $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$ et $D = (1, 1)$.

• Pour $x \in [0, 1]$, $f(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}$. Or $\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1+x^2} \right) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. Par suite, la fonction $x \mapsto f(x, 0)$ est croissante sur $[0, 1]$ et admet donc un maximum en 1 égal à $f(0, 1)$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}$. Donc f admet un maximum sur $[AB]$ égal à $\frac{1}{2}$.

• Pour $x \in [0, 1]$, $f(x, 1) = \frac{x+1}{2(1+x^2)}$. Or $\frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{2(1+x^2)} \right) (x) = \frac{(1+x^2) - 2x(x+1)}{2(1+x^2)^2} = \frac{1-2x-x^2}{2(1+x^2)^2}$. Par suite, la fonction $x \mapsto f(x, 1)$ est croissante sur $[0, \sqrt{2}-1]$, décroissante sur $[\sqrt{2}-1, 1]$ et admet donc un maximum en $\sqrt{2}-1 (\in [0, 1])$ égal à $f(\sqrt{2}-1, 1)$ avec

$$f(\sqrt{2}-1, 1) = \frac{\sqrt{2}}{2(1+(\sqrt{2}-1)^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2(4-2\sqrt{2})} = \frac{1}{4(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{4} = 0,6\dots > \frac{1}{2}.$$

Ainsi, f admet sur $[AB] \cup [CD]$ un maximum égal à $\text{Max}\left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{4}\right\}$ ou encore $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$. Par symétrie des rôles de x et y ,

f admet un maximum sur $[AC] \cup [BD]$ égal à $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ et finalement

le maximum de f sur la frontière de F est égal à $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$.

On a $\frac{3\sqrt{3}}{8} = 0,64\dots$ et $\frac{\sqrt{2}+1}{4} = 0,60\dots$. Donc $\frac{3\sqrt{3}}{8} > \frac{\sqrt{2}+1}{4}$ ce qui montre que

$$M = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

PROBLÈME ; ÉCHANGES DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

PARTIE PRÉLIMINAIRE

1. Fonction Gamma d'Euler

a. Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue (et donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$).

- Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $0 < e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$. Or, puisque $x-1 > -1$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de 0 et on en déduit que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de 0.

- Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-t}t^{x-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'après les théorèmes de croissances comparées. On en déduit que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement

$\forall x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

b. Soit $x > 0$. Soient ε et A deux réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Les deux fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_{\varepsilon}^A t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{\varepsilon}^A + x \int_{\varepsilon}^A t^{x-1} e^{-t} dt = -A^x e^{-A} + \varepsilon^x e^{-\varepsilon}.$$

Puisque $x > 0$, quand ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$ on obtient

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

$$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Ensuite $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ et puisque pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, par récurrence on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!.$$

2. Fonction zêta de Riemann

a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]1, +\infty[$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ sur $]0, +\infty[$ on a

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^x} dt = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \left[\frac{-1}{(x-1)t^{x-1}} \right]_n^{+\infty} = \frac{1}{(x-1)n^{x-1}} \quad (\text{car } x-1 > 0).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1, +\infty[, R_n(x) \leq \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}.$$

b. Soient p un entier supérieur ou égal à 2 et $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} - \zeta(p) \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} = R_n(p) \leq \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Mais alors

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} - \zeta(p) \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n^{p-1} \geq \frac{1}{(p-1)\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq \sqrt[p-1]{\frac{1}{(p-1)\varepsilon}} \Leftrightarrow n \geq E\left(\sqrt[p-1]{\frac{1}{(p-1)\varepsilon}}\right) + 1.$$

$$\text{Pour } n \geq E\left(\sqrt[p-1]{\frac{1}{(p-1)\varepsilon}}\right) + 1, \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} - \zeta(p) \right| \leq \varepsilon.$$

c. Si n est un entier non nul donné tel que $\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^7} - \zeta(7) \right| \leq \frac{10^{-6}}{2}$, une valeur approchée de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^7}$ à $\frac{10^{-6}}{2}$ (c'est-à-dire arrondie à la sixième décimale la plus proche) est une valeur approchée de $\zeta(7)$ à 10^{-6} près. Or pour $\varepsilon = \frac{10^{-6}}{2}$ et $p = 7$

$$E\left(\sqrt[p-1]{\frac{1}{(p-1)\varepsilon}}\right) + 1 = E\left(\sqrt[6]{\frac{10^6}{3}}\right) + 1 = 9.$$

La machine fournit $\sum_{k=1}^9 \frac{1}{k^7} = 1,008\,349\,0\dots$ ou encore 1,008 349 arrondi à la sixième décimale la plus proche. Donc

$$\zeta(7) = 1,008\,349 \text{ à } 10^{-6} \text{ près.}$$

PREMIÈRE PARTIE : SUITE DE FONCTIONS

3 Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions. Pour chaque n , la fonction f_n est continue sur le segment $[a, b]$ et donc la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx\right)$ est définie. Puisque la suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ et donc $\int_a^b f(x) dx$ existe. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $M_n = \sup_{[a,b]} |f_n - f|$. Puisque chaque fonction $f_n - f$ est continue sur le segment $[a, b]$ la suite, la suite (M_n) est définie et puisque la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, la suite (M_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Or pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq M_n(b-a).$$

Comme $M_n(b-a)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que la suite de réels $\left(\int_a^b f_n(x) dx\right)$ converge vers le réel $\int_a^b f(x) dx$.

4. Exemples et contre-exemples. a. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit f_n la fonction définie et continue sur $[0, 1]$, nulle sur $[\frac{2}{n}, 1]$, affine sur $[0, \frac{1}{n}]$ et sur $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ telle que $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{n}) = n$, $f(\frac{2}{n}) = 0$. Pour $x \in [0, 1]$, on a précisément

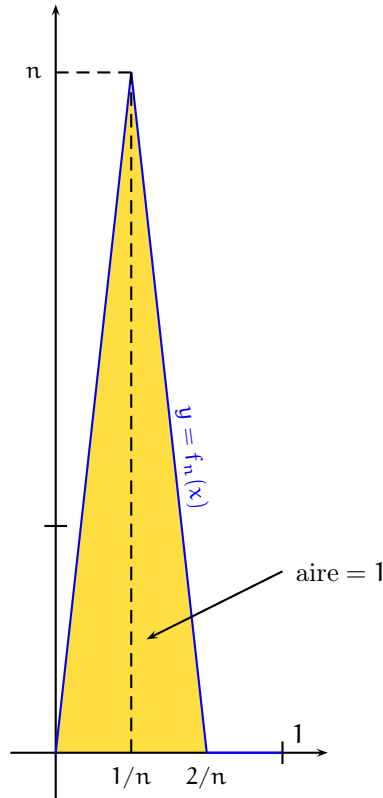
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2(x - \frac{2}{n}) & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}.$$

• $\int_0^1 f_n(x) dx$ est l'aire du triangle joignant les points $(0, 0)$, $(\frac{1}{n}, n)$ et $(\frac{2}{n}, 0)$. Cette aire vaut $\frac{(2/n) \times n}{2}$ c'est-à-dire 1.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1$.

- Pour $n \geq 2$, $f_n(0) = 0$ et donc la suite $(f_n(0))$ converge vers 0. D'autre part, si $x \in]0, 1]$, dès que $n \geq \frac{2}{x}$, on a $\frac{2}{n} \leq x$ et donc $f_n(x) = 0$. La suite $(f_n(x))$ est nulle à partir d'un certain rang et en particulier converge vers 0. Ainsi, pour tout réel x de $[0, 1]$, la suite $(f_n(x))$ converge vers 0 ou encore la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

- f est ici la fonction nulle et donc $\int_0^1 f(x) dx = 0 \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.



b. Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = x^n$. Puisque $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$. D'autre part, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par : $\forall x \in [0, 1], f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. Puisque f est continue par morceaux sur $[0, 1]$, $\int_0^1 f(x) dx$ existe et de plus $\int_0^1 0 dx = 0$ (intégrale d'une fonction en escaliers). Par suite ici

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

Enfin, la suite de fonctions (f_n) ne peut converger uniformément vers f sur $[0, 1]$ car chaque fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ alors que f ne l'est pas.

5. Cas d'un intervalle quelconque. a. • Chaque fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Donc chaque fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$. De plus, d'après la question 1.b., pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \times \Gamma(n+1) = 1.$$

Ainsi la suite $\left(\int_0^{+\infty} f_n(x) dx\right)$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 1$.

- D'autre part si x est un réel positif donné, la suite numérique $(f_n(x))$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ d'après les théorèmes de croissances comparées ($x^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!)$).

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle. Mais alors ici

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = 0 \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx.$$

• Vérifions enfin que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \geq 0$,

$$f'_n(x) = \frac{1}{n!}(nx^{n-1} - x^n)e^{-x} = (n-x)\frac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}.$$

La fonction f_n est donc croissante sur $[0, n]$ et décroissante sur $[n, +\infty[$. On en déduit que pour $x \geq 0$

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$. Enfin d'après la formule de STIRLING

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^n e^{-n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ ce qui montre que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.

Le **TH 1** est donc faux quand l'intervalle I n'est pas borné.

b. De nouveau, la fonction f est continue sur l'intervalle I en tant que limite uniforme sur I d'une suite de fonctions continues sur I .

i. Puisque la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur l'intervalle I , la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par suite, il existe un entier p tel que $\|f_p - f\|_\infty \leq 1$.

Soit alors $x \in [0, +\infty[$.

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x)| \leq \|f_p - f\|_\infty + |f_p(x)| \leq 1 + |f_p(x)|.$$

De nouveau, la fonction f est continue sur l'intervalle I en tant que limite uniforme sur I d'une suite de fonctions continues sur I . De plus la fonction $|f|$ est majorée sur I par la fonction $1 + |f_p|$ qui est intégrable sur I en tant que somme de fonctions intégrables sur I (la fonction $x \mapsto 1$ est intégrable sur I car bornée sur I borné).

Finalement f est intégrable sur I .

ii. Pour n suffisamment grand, $\|f_n - f\|_\infty$ existe et

$$\left| \int_I f_n(x) dx - \int_I f(x) dx \right| = \left| \int_I (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_I |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_I \|f_n - f\|_\infty dx = \ell(I) \times \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et le **TH 1** reste vrai dans le cas où l'intervalle I est borné.

6. Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions.

a. Chaque fonction f_n est continue par morceaux sur l'intervalle I et est majorée en valeur absolue par la fonction φ qui est intégrable sur I . On en déduit que chaque fonction f_n est intégrable sur I .

Soit $x \in I$. Pour tout entier n , on a $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ et quand n tend $+\infty$ on obtient $|f(x)| \leq \varphi(x)$. Ainsi la fonction f est par hypothèse continue par morceaux sur I et majorée en valeur absolue sur I par la fonction φ qui est intégrable sur I . On en déduit que f est aussi intégrable sur I .

b. i. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}] = I$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = \sin^n x$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers la

fonction f définie par $\forall x \in I$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Chaque fonction f_n est continue par morceaux sur I et majorée

en valeur absolue par la fonction $\varphi : x \mapsto 1$ qui est intégrable sur l'intervalle I . De plus la fonction f est continue par morceaux sur I . D'après le **TH 2**,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} f(x) dx = 0.$$

On sait que ce résultat classique sur les intégrales de WALLIS est plus pénible à obtenir directement.

ii. Chaque fonction f_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. La suite de fonctions f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. De plus chaque fonction est majorée en valeur absolue sur I par la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{e}{1+x^2}$ qui est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$. D'après le **TH 2**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\text{Arctan } x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

DEUXIÈME PARTIE : SÉRIE DE FONCTIONS

7. Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Chaque fonction S_n est continue sur $[a, b]$ et par linéarité de l'intégrale, pour $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{n=0}^N \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^N f_n(x) \right) dx = \int_a^b S_N(x) dx.$$

Par hypothèse, la suite de fonctions (S_N) converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. La fonction f est alors continue sur le segment $[a, b]$ et de plus d'après le **TH 1**, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$ ou encore la série de terme général $\int_a^b f_n(x) dx$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx.$$

8. Application : séries trigonométriques et séries de Fourier.

a. Le théorème de PARSEVAL dit que si f est une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , 2π -périodique, alors la série de terme général $a_n^2 + b_n^2$ converge et

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx.$$

Ici, $a_n^2 + b_n^2 = 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n}$ et donc la série de terme général $a_n^2 + b_n^2$ diverge. La série trigonométrique de l'énoncé n'est donc pas la série de FOURIER d'une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} et 2π -périodique.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$. f est continue sur \mathbb{R} en tant que limite uniforme sur \mathbb{R} d'une suite de fonctions continues sur \mathbb{R} . De plus f est 2π -périodique. Calculons alors les coefficients de FOURIER de f . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le **TH 3**, on peut intégrer terme à terme sur le segment $[a, b]$ et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx &= \frac{a_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(a_p \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(px) dx + b_p \int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(px) dx \right) \\ &= 0 + \frac{1}{\pi} \times \pi a_n = a_n, \end{aligned}$$

Pour $n = 0$, on a également $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(0x) dx = \frac{a_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx + 0 = a_0$.

De même pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx &= \frac{a_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \, dx + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(a_p \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(px) \, dx + b_p \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) \, dx \right) \\ &= 0 + \frac{1}{\pi} \times \pi b_n = b_n. \end{aligned}$$

Finalement, une série trigonométrique uniformément convergente sur \mathbb{R} est continue sur \mathbb{R} et est sa propre série de FOURIER.

9. Intégration terme à terme d'une série de fonctions.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la série de terme général a_n converge, a_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais alors $\frac{a_n x^n}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{x^n}{n!}\right)$. On sait que la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge et on en déduit que la série de terme général $\frac{a_n x^n}{n!}$ converge ou encore que la série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto \frac{a_n x^n}{n!}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la

$$\text{fonction } f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}.$$

Mais alors f est la somme sur \mathbb{R} d'une série entière de rayon infini et on sait que f est continue sur \mathbb{R} .

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons g_n la fonction $g_n : x \mapsto f_n(x)e^{-x}$. Chaque fonction g_n est continue sur $[0, +\infty[$. De plus

$$\int_0^{+\infty} |g_n(x)| \, dx = \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx = \frac{|a_n| \Gamma(n+1)}{n!} = |a_n| < +\infty,$$

ce qui montre que g_n est intégrable sur $[0, +\infty[$. Ensuite la série de fonctions de terme général g_n converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $g : x \mapsto f(x)e^{-x}$ qui est continue sur \mathbb{R} puisque f l'est et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |g_n(x)| \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty.$$

D'après le **TH 4**, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et de plus on peut intégrer terme à terme pour obtenir :

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x} \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!} \right) e^{-x} \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.}$$

10. Cas où les TH 3 et TH 4 ne s'appliquent pas.

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 1} (-1)^n x^n = (-1)^n$. Mais alors la série de terme général $\lim_{x \rightarrow 1} (-1)^n x^n$ diverge (grossièrement) et d'après le théorème d'interversion des limites, la série de fonctions de terme général $x \mapsto (-1)^n x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

b. $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |(-1)^n x^n| \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Les hypothèses du **TH 4** ne sont donc pas toutes vérifiées.

c. $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \right) \, dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$. D'autre part, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N \int_0^1 (-1)^n x^n \, dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^N (-1)^n x^n \, dx = \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{N+1} x^{N+1}}{1+x} \, dx = \ln 2 - (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{1+x} \, dx.$$

Or

$$\left| (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{1+x} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{N+1} dx = \frac{1}{N+2}.$$

Comme $\frac{1}{N+2}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, $(-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{1+x} dx$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ et finalement

$\sum_{n=0}^N \int_0^1 (-1)^n x^n dx$ tend vers $\ln 2$ quand N tend vers $+\infty$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n dx = \ln 2 = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n dx.$$

11. Théorème de convergence monotone. Chaque fonction S_n est continue par morceaux sur I et intégrable sur I en tant que somme de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I . La suite (S_n) converge simplement sur I vers la fonction f qui est continue par morceaux sur I . De plus, puisque les fonctions f_k sont positives sur I , pour chaque n on a

$$|S_n| = \sum_{k=0}^n f_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} f_k = f,$$

où f est continue par morceaux et intégrable sur I . Ainsi la suite (S_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée et donc la série $\sum_{n \geq 0} \int_I f_n(x) dx$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$.

12. Application à la physique.

a. Pour $t \in]0, +\infty[$, puisque $e^{-t} < 1$, on a

$$\frac{t^3}{e^t - 1} = t^3 e^{-t} \times \frac{1}{1 - e^{-t}} = t^3 e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^3 e^{-(n+1)t}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, +\infty[$, posons $f_n(t) = t^3 e^{-(n+1)t}$. Chaque fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$, intégrable sur $]0, +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Les fonctions f_n sont toutes positives sur $]0, +\infty[$ et la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto \frac{t^3}{e^t - 1}$ qui est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ pour les mêmes raisons que les f_n ($\frac{t^3}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2$).

D'après le théorème de convergence monotone

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^3 e^{-(n+1)t} dt.$$

En posant $u = (n+1)t$, on a $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{(n+1)^4} \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du = \frac{\Gamma(4)}{(n+1)^4} = \frac{6}{(n+1)^4}$ et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6}{(n+1)^4} = 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = 6\zeta(4) = 6 \times \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^4}{15}.$$

b. Posons $t = \frac{hc}{k_8 \lambda T}$ et donc $\lambda = \frac{hc}{k_8 t T}$ et aussi $d\lambda = -\frac{hc}{k_8 \lambda^2 T} dt$.

$$\begin{aligned}
M &= \frac{c}{4} \int_0^{+\infty} \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_8 \lambda T}\right) - 1} d\lambda = \int_{+\infty}^0 2\pi hc^2 \times \frac{k_8^5 t^5 T^5}{h^5 c^5} \frac{1}{e^t - 1} \times -\frac{hc}{k_8 t^2 T} dt \\
&= \frac{2\pi k_8^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} \times dt = \frac{2\pi k_8^4 T^4}{h^3 c^2} \times \frac{\pi^4}{15} = \frac{2\pi^5 k_8^4}{15 h^3 c^2} T^4.
\end{aligned}$$

$$M = \sigma T^4 \text{ où } \sigma = \frac{2\pi^5 k_8^4}{15 h^3 c^2}.$$

13. Généralisation.

a. Soit $x > 1$. Pour $t > 0$ on a

$$\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = t^{x-1} e^{-t} \times \frac{1}{1 - e^{-t}} = t^{x-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t}.$$

Pour $x > 1$, $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, posons $f_n(t) = t^{x-1} e^{-(n+1)t}$.

• Chaque fonction f_n est continue et positive sur $]0, +\infty[$, intégrable sur $]0, +\infty[$ car équivalente en 0 à t^{x-1} avec $x-1 > 0 > -1$ et négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$.

• La série de fonction de terme général f_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ qui est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ car équivalente en 0 à t^{x-2} avec $x-2 > -1$ et négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$.

D'après le théorème de convergence monotone, pour $x > 1$ on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t} dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n+1}\right)^{x-1} e^{-u} \frac{du}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du = \Gamma(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \\
&= \Gamma(x) \times \zeta(x).
\end{aligned}$$

$$\forall x > 1, \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(x) \times \zeta(x).$$

b. Pour $x = 2$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \Gamma(2) \times \zeta(2) = 1 \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour $x = 7$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1} dt = \Gamma(7) \times \zeta(7) = 720\zeta(7)$. On a vu à la question 2.c. que $|\zeta(7) - 1,008349| < 10^{-6}$ et donc

$$|720\zeta(7) - 720 \times 1,008349| < 720 \times 10^{-6} < 10^{-3}.$$

Une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1} dt$ à 10^{-3} près est donc $720 \times 1,008349 = 726,01128$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1} dt = 726,01128 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$