

---

**MATHEMATIQUES 2**


---

**I. Description des normes euclidiennes****1. Identité du parallélogramme**

a. Soit  $N$  une norme euclidienne sur  $E$  et  $\varphi$  le produit scalaire associé. Pour  $(x, y) \in E^2$ ,

$$\begin{aligned} (N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 &= \varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) \\ &= \varphi(x, x) + 2\varphi(x, y) + \varphi(y, y) + \varphi(x, x) - 2\varphi(x, y) + \varphi(y, y) = 2[\varphi(x, x) + \varphi(y, y)] \\ &= 2 \left[ (N(x))^2 + (N(y))^2 \right]. \end{aligned}$$

Si  $N$  est une norme euclidienne,  $N$  vérifie l'identité du parallélogramme.

Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  puis prenons  $x = e_1$  et  $y = e_2$  (ce qui est possible puisque  $n \geq 2$ ). On a  $\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 = \|e_1+e_2\|_\infty^2 + \|e_1-e_2\|_\infty^2 = 1^2 + 1^2 = 2$  et  $2[\|e_1\|_\infty^2 + \|e_2\|_\infty^2] = 2(1^2 + 1^2) = 4$  et en particulier  $\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 \neq 2[\|e_1\|_\infty^2 + \|e_2\|_\infty^2]$ . Ainsi,

$$\exists (x, y) \in E^2 / \|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 \neq 2[\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2],$$

et donc  $\|\cdot\|_\infty$  ne vérifie pas l'identité du parallélogramme. On en déduit que

$\|\cdot\|_\infty$  n'est pas une norme euclidienne.

b.  $\|\cdot\|_2$  est la norme associée au produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et est donc une norme euclidienne. Réciproquement, soit  $p$  un réel strictement supérieur à 1.

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p \text{ est une norme euclidienne} &\Rightarrow \|e_1+e_2\|_p^2 + \|e_1-e_2\|_p^2 = 2(\|e_1\|_p^2 + \|e_2\|_p^2) \\ &\Rightarrow 2 \times (1^p + 1^p)^{2/p} = 2 \times (1+1) \Rightarrow 2^{2/p} = 2 \Rightarrow \frac{2}{p} = 1 \Rightarrow p = 2. \end{aligned}$$

$\forall p \in ]1, +\infty[$ ,  $\|\cdot\|_p$  est une norme euclidienne si et seulement si  $p = 2$ .

2. Soit  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

• Pour  $(x, y) \in E^2$ , la matrice  ${}^tY SX$  est de format  $(1, 1)$  et donc  $\langle y, x \rangle_S = {}^tY SX = {}^t({}^tY SX) = {}^tX^tSY = {}^tXSY = \langle x, y \rangle_S$ .  
Donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  est une forme symétrique.

•  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  est linéaire par rapport à sa deuxième variable et donc bilinéaire par symétrie.

• Pour  $x \in E \setminus \{0\}$ ,  $\langle x, x \rangle_S = {}^tX SX > 0$  et donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  est définie positive.

En résumé,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive sur  $E$  et donc

$\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  est un produit scalaire sur  $E$ .

3. Soit  $(x, y) \in E^2$ .

$$\begin{aligned} {}^tXSY &= ({}^t(x_i)_{1 \leq i \leq n} \times (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \times (y_j)_{1 \leq j \leq n}) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \varphi(x, y). \end{aligned}$$

$$\forall(x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = {}^tXS Y.$$

Puisque la forme  $\varphi$  est symétrique, pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $s_{i,j} = \varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i) = s_{j,i}$  et donc  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . De plus, pour  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  ${}^tXSX = \varphi(x, x) > 0$  et finalement

$$S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

## II. Quelques généralités et exemples

4. • Soit  $u \in \text{ISOM}(N)$ . Pour  $x \in E$ ,  $u(x) = 0 \Rightarrow N(u(x)) = 0 \Rightarrow N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ . Par suite,  $\text{Ker}(u) = \{0\}$  et puisque  $\dim(E) < +\infty$ ,  $u$  est un automorphisme de  $E$ . On a ainsi vérifié que  $\text{ISOM}(N) \subset \text{GL}(E)$ .

- Pour tout  $x$  de  $E$ , on a  $N(\text{Id}_E(x)) = N(x)$  ce qui montre que  $\text{Id}_E \in \text{ISOM}(N)$  et en particulier que  $\text{ISOM}(N) \neq \emptyset$ .
- Soit  $(u, v) \in (\text{ISOM}(N))^2$ . Pour  $x \in E$ ,  $N(u \circ v^{-1}(x)) = N(u(v^{-1}(x))) = N(v^{-1}(x)) = N(v(v^{-1}(x))) = N(x)$  et donc  $u \circ v^{-1} \in \text{ISOM}(N)$ .

On a montré que

$$\text{ISOM}(N) \text{ est un sous-groupe de } (\text{GL}(E), \circ).$$

5. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- Supposons que  $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$ . Soit  $x \in E$ .

Si  $x = 0$ , on a  $N(u(x)) = 0 = N(x)$  et si  $x \neq 0$ , puisque  $\frac{x}{N(x)} \in \Sigma(N)$  on a aussi  $u\left(\frac{x}{N(x)}\right) \in \Sigma(N)$ . Ceci fournit

$$N(u(x)) = N(x) \times N\left(\frac{1}{N(x)}u(x)\right) = N(x) \times N\left(u\left(\frac{x}{N(x)}\right)\right) = N(x) \times 1 = N(x).$$

Ainsi, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $N(u(x)) = N(x)$  et donc  $u \in \text{ISOM}(N)$ .

- Réciproquement, supposons que  $u \in \text{ISOM}(N)$ . Soit  $x \in \Sigma(N)$ .  $N(u(x)) = N(x) = 1$ . Ainsi, pour tout  $x$  de  $\Sigma(N)$ ,  $u(x) \in \Sigma(N)$  et donc  $u(\Sigma(N)) \subset \Sigma(N)$ . Mais d'après la question précédente, on a aussi  $u^{-1} \in \text{ISOM}(N)$  et donc aussi  $u^{-1}(\Sigma(N)) \subset \Sigma(N)$ . On en déduit que  $u(u^{-1}(\Sigma(N))) \subset u(\Sigma(N))$  ou encore  $\Sigma(N) \subset u(\Sigma(N))$  et finalement  $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$ .

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), u \in \text{ISOM}(N) \Leftrightarrow u(\Sigma(N)) = \Sigma(N).$$

6. Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\|s(ae_1 + be_2)\|_1 = \|-be_1 - ae_2\|_1 = |-b| + |-a| = |a| + |b| = \|ae_1 + be_2\|_1.$$

Par suite,  $s \in \text{ISOM}(\|\cdot\|_1)$ .

D'autre part  $r(e_1) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$  et donc  $\|r(e_1)\|_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \neq 1 = \|e_1\|_1$ . Donc  $r \notin \text{ISOM}(\|\cdot\|_1)$ .

$$s \in \text{ISOM}(\|\cdot\|_1) \text{ et } r \notin \text{ISOM}(\|\cdot\|_1).$$

$$7. \text{ a. } S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b.  $S$  est symétrique réelle et donc, d'après le théorème spectral, orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle.

- $\chi_S = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (3-X)(2-X)(3-X) - (2-X) = (2-X)((X-3)^2 - 1) = -(X-2)^2(X-4)$ . Donc  $S$  est orthogonalement semblable à  $D = \text{diag}(2, 2, 4)$ .

- $\text{Ker}(S - 2I_3)$  est le plan d'équation  $x = z$ . Une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel) de ce plan est  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3), e_2\right)$ .  $\text{Ker}(S - 4I_3)$  est l'orthogonal du plan précédent et donc la droite vectorielle engendrée

par  $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3) \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_3)$ .

$$S = PD^tP \text{ avec } D = \text{diag}(2, 2, 4) \text{ et } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

c. D'après la question 3., il suffit de vérifier que  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$  Posons  $X' = {}^tPX = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ . On a alors

$${}^tXSX = {}^tXPD^tP = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = {}^tX'DX' = 2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 \geq 0.$$

De plus

$${}^tXSX = 0 \Rightarrow 2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 = 0 \Rightarrow x' = y' = z' = 0 \Rightarrow X' = 0 \Rightarrow X = PX' = 0.$$

Ainsi, si  $X \neq 0$ ,  ${}^tXSX > 0$ . Ceci montre que  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et donc que

$N_q$  est une norme euclidienne.

d. Soit  $(x, y, z) \in E$ . Avec les notations de la question précédente

$$(x, y, z) \in \Sigma(N_q) \Leftrightarrow q(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow 2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 = 1.$$

On reconnaît l'équation réduite d'un ellipsoïde.

$\Sigma(N_q)$  est un ellipsoïde.

e. De plus, puisque les coefficients de  $x'^2$  et  $y'^2$  sont égaux, cet ellipsoïde est un ellipsoïde de révolution d'axe dirigé par  $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_3)$ .

$\Sigma(N_q)$  est un ellipsoïde de révolution d'axe dirigé par  $-e_1 + e_3$ .

f. Toute rotation d'axe  $-e_1 + e_3$  laisse globalement invariante  $\Sigma(N_q)$ . Mais alors, d'après la question 5., toute rotation d'axe  $-e_1 + e_3$  est dans  $\text{ISOM}(N_q)$  ce qui montre que

$\text{card}(\text{Isom}(N_q)) = +\infty$ .

### III. Étude de $\text{ISOM}(N)$ lorsque $N$ est une norme euclidienne

#### 8. Caractérisation matricielle des isométries euclidiennes

a. • Si  $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $\langle u(x), u(y) \rangle_S = \langle x, y \rangle_S$  alors en particulier  $\forall x \in E$ ,  $N_S(u(x)) = \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle_S} = \sqrt{\langle x, x \rangle_S} = N_S(x)$  et  $u$  est une  $N_S$ -isométrie.

• Réciproquement, supposons que  $u$  soit une  $N_S$ -isométrie. D'après les identités de polarisation, pour  $(x, y) \in E^2$  on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y) \rangle_S &= \frac{1}{4}(\langle u(x+y), u(x+y) \rangle_S - \langle u(x-y), u(x-y) \rangle_S) = \frac{1}{4}((N_q(u(x+y)))^2 - (N_q(u(x-y)))^2) = \\ &= \frac{1}{4}((N_q(x+y))^2 - (N_q(x-y))^2) = \frac{1}{4}(\langle x+y, x+y \rangle_S - \langle x-y, x-y \rangle_S) = \langle x, y \rangle_S. \end{aligned}$$

$\forall u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u \in \text{ISOM}(N_S) \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2$ ,  $\langle u(x), u(y) \rangle_S = \langle x, y \rangle_S$ .

b. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

$$u \in \text{ISOM}(N_S) \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle_S = \langle x, y \rangle_S$$

$$\Leftrightarrow \forall (X, Y) \in (M_{3,1}(\mathbb{R}))^2, {}^t(AX)S(AY) = {}^tXS Y \Leftrightarrow \forall (X, Y) \in (M_{3,1}(\mathbb{R}))^2, {}^tX({}^tASA)Y = {}^tXS Y \Leftrightarrow {}^tASA = S.$$

La dernière équivalence s'obtient par exemple en appliquant l'égalité  ${}^tX({}^tASA)Y = {}^tXAY$  à  $X = e_i$  et  $Y = e_j$ .

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), u \in \text{ISOM}(N_S) \Leftrightarrow {}^tASA = S.$$

9. La matrice  $S$  associée à la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  est la matrice  $I_n$ . L'égalité  ${}^tASA = S$  s'écrit plus particulièrement  ${}^tAA = I_2$  et signifie que  $A$  est une matrice orthogonale. Donc

$$\text{ISOM}(\|\cdot\|_2) = O_n(\mathbb{R}).$$

On sait que  $O_n(\mathbb{R})$  est infini ( $O_n(\mathbb{R})$  contient par exemple les matrices de la forme  $\begin{pmatrix} R_\theta & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  où  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ) et donc

$$\text{card}(\text{Isom}(\|\cdot\|_2)) = +\infty.$$

### 10. Une application des polynômes interpolateurs

a. Soit  $P \in \mathbb{R}_r[X]$ . Si  $P \in \text{Ker}(u)$ ,  $P$  est de degré au plus  $r$  et s'annule en les  $r+1$  réels deux à deux distincts  $x_0, \dots, x_r$  et on sait que  $P = 0$ .

$$\text{Ker}(u) = \{0\}.$$

Ainsi  $u$  est une application linéaire injective de  $\mathbb{R}_r[X]$  dans  $\mathbb{R}^{r+1}$ . Comme de plus  $\dim(\mathbb{R}_r[X]) = \dim(\mathbb{R}^{r+1}) = r+1 < +\infty$ , on sait que  $u$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_r[X]$  sur  $\mathbb{R}^{r+1}$ . On en déduit que pour tout  $(y_0, \dots, y_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$  il existe un unique polynôme  $L$  de degré au plus  $r$  tel que  $\forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket$ ,  $L(x_i) = y_i$ .

b. On applique le résultat précédent aux réels  $x_0, \dots, x_r$  tels que  $r \leq n-1$ ,  $x_0 < x_1 < \dots < x_r$  et  $\{x_0, \dots, x_r\} = \{u_1, \dots, u_n\}$  et  $\forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket$ ,  $y_i = \sqrt{x_i}$  : il existe un unique polynôme  $L$  de degré inférieur ou égal à  $r$  tel que  $\forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket$ ,  $L(x_i) = \sqrt{x_i}$ . Ce polynôme  $L$  vérifie  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $L(u_i) = \sqrt{u_i}$  (ce polynôme est uniquement défini si les  $u_i$  sont deux à deux distincts) et donc  $L(U) = V$ .

### 11. Racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

a. • Redémontrons tout d'abord le résultat très classique :  $\forall S \in S_n(\mathbb{R}), S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(S) \subset ]0, +\infty[$ .

Soit  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . Puisque  $S$  est symétrique réelle, on sait que toutes les valeurs propres de  $S$  sont réelles. Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $S$  et  $X \neq 0$  un vecteur propre associé. Alors  ${}^tXSX = {}^tX(SX) = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|_2^2$ . Puisque  $S$  est définie

positive et que  $\|X\|_2^2 > 0$ , on en déduit que  $\lambda = \frac{{}^tXSX}{\|X\|_2^2} > 0$ .

Réciproquement, soit  $S$  une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des réels strictement positifs. Il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $S = PD^tP$  où  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Avec des notations usuelles

$${}^tXSX = {}^tXPD^tPX = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = {}^tX'DX' = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i'^2 \geq 0.$$

De plus,

$${}^tXSX = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i'^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i x_i'^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i' = 0 \Leftrightarrow X' = 0 \Leftrightarrow {}^tPX = 0 \Leftrightarrow X = 0,$$

ce qui montre que  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

• Soit  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . D'après le théorème spectral et d'après ce qui précède, il existe des réels strictement positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et une matrice  $P \in O_n(\mathbb{R})$  tels que  $S = PD^tP$  où  $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Posons  $A = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}^t P$ . Puisque  $A$  est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients diagonaux réels et strictement positifs,  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . De plus

$$A^2 = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}^t P \times P \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}^t P = P(\text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n})^2 P = P \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}^t P = PD^tP = S.$$

$$\forall S \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \exists A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) / A^2 = S.$$

b. Avec les notations précédentes, il existe d'après la question 10.b. un polynôme  $L$  tel que

$$L(\text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}) = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}.$$

On a alors

$$L(B^2) = L(S) = L(PD^tP) = PL(D)^tP = P\text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}^tP = A.$$

Le polynôme  $Q = L(X^2)$  est donc un polynôme tel que  $Q(B) = A$ . Puisque  $A$  est un polynôme en  $B$ , on sait que

A et B commutent.

c. Soit  $(S_1, S_2) \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2$ . On sait que  $S_1 + S_2$  est symétrique et d'autre part pour  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,

$${}^tX(S_1 + S_2)X = {}^tXS_1X + {}^tXS_2X > 0.$$

Donc

$\forall (S_1, S_2) \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2, S_1 + S_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$

En particulier, 0 n'est pas valeur propre de  $S_1 + S_2$  et donc

$\forall (S_1, S_2) \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2, S_1 + S_2$  est inversible.

d. Puisque  $A$  et  $B$  commutent,  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 = S - S = 0$  et puisque  $A+B$  est inversible,  $A+B$  est simplifiable et donc  $A - B = 0$  ou encore  $A = B$ .

$\forall S \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \exists ! A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) / A^2 = S.$

12. a. Soit  $M \in O_n(\mathbb{R})$ . Pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$${}^t((\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S})S((\sqrt{S})M\sqrt{S}) = \sqrt{S}{}^tM(\sqrt{S})^{-1}(\sqrt{S}\sqrt{S})(\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S} = \sqrt{S}{}^tMM\sqrt{S} = \sqrt{S}I_n\sqrt{S} = \sqrt{S}\sqrt{S} = S.$$

Mais alors, d'après la question 8.b.,  $(\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S} \in \text{ISOM}(N_S)$ .

$\forall M \in O_n(\mathbb{R}), (\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S} \in \text{ISOM}(N_S).$

b. D'après la question précédente,  $\psi$  est bien une application. Soit  $\varphi : \text{ISOM}(N_S) \rightarrow O_n(\mathbb{R})$ .  
 $M \mapsto \sqrt{S}M(\sqrt{S})^{-1}$

Vérifions que  $\varphi$  est bien une application ce qui revient à montrer que  $\forall M \in \text{ISOM}(N_S), \sqrt{S}M(\sqrt{S})^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ .  
 Soit  $M \in \text{ISOM}(N_S)$ .

$$\begin{aligned} {}^t(\sqrt{S}M(\sqrt{S})^{-1})(\sqrt{S}M(\sqrt{S})^{-1}) &= (\sqrt{S})^{-1}{}^tM\sqrt{S}\sqrt{S}M(\sqrt{S})^{-1} = (\sqrt{S})^{-1}({}^tMSM)(\sqrt{S})^{-1} \\ &= (\sqrt{S})^{-1}S(\sqrt{S})^{-1} \text{ (puisque } M \in \text{ISOM}(N_S) \text{ et d'après 8.b.)} \\ &= (\sqrt{S})^{-1}\sqrt{S}\sqrt{S}(\sqrt{S})^{-1} = I_n, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\sqrt{S}M(\sqrt{S})^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ . Ainsi  $\psi$  est une application.

Maintenant il est clair que  $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{\text{ISOM}(N_S)}$  et que  $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{O_n(\mathbb{R})}$ . On sait alors que  $\psi$  est une bijection et que  $\psi^{-1} = \varphi$ .

L'application  $\psi : O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{ISOM}(N_S)$  est une bijection.  
 $M \mapsto (\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S}$

On en déduit que les ensembles  $\text{ISOM}(N_S)$  et  $O_n(\mathbb{R})$  sont équipotents et donc que

$\text{card}(\text{ISOM}(N_S)) = +\infty.$

## IV. Étude du cardinal de Isom(p)

### 13. Endomorphismes de permutation signée

a. Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ .  $u_{\sigma, \varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i e_{\sigma(i)} = \sum_{j=1}^n x_{\sigma^{-1}(j)} \varepsilon_{\sigma^{-1}(j)} e_j$  et donc

$$\|u_{\sigma, \varepsilon}(x)\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_{\sigma^{-1}(i)} \varepsilon_{\sigma^{-1}(i)}|^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{i=1}^n |x_{\sigma^{-1}(i)}|^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p.$$

$u_{\sigma, \varepsilon}$  est une p-isométrie.

b.  $u_{\sigma, \varepsilon}(e_1) = e_3$ ,  $u_{\sigma, \varepsilon}(e_2) = e_4$ ,  $u_{\sigma, \varepsilon}(e_3) = -e_1$  et  $u_{\sigma, \varepsilon}(e_4) = e_2$ . Par suite

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3, e_4)}(u_{\sigma, \varepsilon}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 14. Inégalité de Hölder

a. L'inégalité à démontrer est claire quand  $a = 0$  ou  $b = 0$ . Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs.

On note tout d'abord que  $\frac{1}{p} > 0$  puis que  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} > 1 - 1 = 0$ .

La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour  $x < 0$ ,  $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ . Donc la fonction  $x \mapsto \ln(x)$

est concave sur  $]0, +\infty[$ . Puisque  $\frac{1}{p} > 0$ ,  $\frac{1}{q} > 0$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on en déduit que

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab),$$

et donc encore une fois que  $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ .

$$\forall (a, b) \in [0, +\infty[^2, ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

b. Soit  $(x, y) \in E^2$  tel que  $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ . Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la question précédente permet d'écrire  $|x_i| \times |y_i| \leq \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q$ . En sommant ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &= \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |y_i|^q = \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \|y\|_q^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Soient alors  $x$  et  $y$  deux éléments quelconques de  $E$ . L'inégalité à démontrer est claire quand  $x = 0$  ou  $y = 0$ .

Sinon, le vecteur  $\frac{x}{\|x\|_p}$  est unitaire pour  $\|\cdot\|_p$  et le vecteur  $\frac{y}{\|y\|_q}$  est unitaire pour  $\|\cdot\|_q$  et d'après ce qui précède,

$$\left| \left\langle \frac{x}{\|x\|_p}, \frac{y}{\|y\|_q} \right\rangle \right| \leq 1 \text{ ou encore } |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q \text{ (inégalité de HÖLDER).}$$

c. Quand  $p = 2$ , l'inégalité écrite est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

15. Soit  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Puisque  $u$  est une  $p$ -isométrie, on a  $\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^p = \|u(e_j)\|_p^p = \|e_j\|_p^p = 1$ . Mais alors

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|^p = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^p \right) = \sum_{j=1}^n 1 = n.$$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|^p = n.$$

### 16. Une formule clé de dualité

a. Soit  $x \in E$ .  $\Sigma_q$  est la sphère unité de la norme  $\|\cdot\|_q$  et puisque  $E$  est de dimension finie, on sait que  $\Sigma_q$  est un compact de  $E$ . D'autre part, l'application  $y \mapsto \langle x, y \rangle$  est une forme linéaire sur l'espace vectoriel  $E$  qui est de dimension finie et donc l'application  $y \mapsto \langle x, y \rangle$  est continue sur  $E$ . Il en est de même de l'application  $y \mapsto |\langle x, y \rangle|$  qui est en particulier continue sur le compact  $\Sigma_q$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On en déduit l'existence de  $\text{Max}_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle|$ .

b. • Soit  $y_0 \in \Sigma_q$  tel que  $\text{Max}_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle| = |\langle x, y_0 \rangle|$ . L'inégalité de HÖLDER permet d'écrire

$$\text{Max}_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle| = |\langle x, y_0 \rangle| \leq \|x\|_p \|y_0\|_q = \|x\|_p.$$

$$\text{Max}_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p.$$

•  $y$  désigne maintenant le vecteur défini dans l'énoncé.

$$|\langle x, y \rangle| = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i |x_i|^{p-1} \|x\|_p^{1-p} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i|^{p-1} \right) \|x\|_p^{1-p} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right) \|x\|_p^{1-p} = \|x\|_p^p \|x\|_p^{1-p} = \|x\|_p.$$

On note alors que  $\|y\|_q = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{q(p-1)} \|x\|_p^{q(1-p)} \right)^{1/q} = \|x\|_p^{1-p} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q}$ . Or  $q(p-1) = \frac{p-1}{1-\frac{1}{p}} = p$  et donc

$$\|y\|_q = \|x\|_p^{1-p} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1-1/p} = \|x\|_p^{1-p} (\|x\|_p^p)^{1-1/p} = 1,$$

ce qui montre que  $y \in \Sigma_q$ .

En résumé  $\forall y \in \Sigma_q$ ,  $\text{Max}_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p$  et  $\exists y_0 \in \Sigma_q / |\langle x, y_0 \rangle| = \|x\|_p$ . Ceci montre que

$$\forall x \in E, \text{Max}_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle| = \|x\|_p.$$

Il est clair que l'exposant conjugué de  $q$  est  $p$  et on a donc aussi

$$\forall y \in E, \text{Max}_{x \in \Sigma_p} |\langle x, y \rangle| = \|y\|_q.$$

17. Soit  $u$  une  $p$ -isométrie. Soient  $y \in \Sigma_q$  puis  $x_0 \in \Sigma_p$  tel que  $|\langle x_0, u^*(y) \rangle| = \text{Max}_{x \in \Sigma_p} |\langle x, u^*(y) \rangle|$ . Alors

$$\begin{aligned} \|u^*(y)\|_q &= \text{Max}_{x \in \Sigma_p} |\langle x, u^*(y) \rangle| = |\langle x_0, u^*(y) \rangle| \\ &= |\langle u(x_0), y \rangle| \leq \text{Max}_{z \in \Sigma_q} |\langle u(x_0), z \rangle| = \|u(x_0)\|_p = \|x_0\|_p = 1, \end{aligned}$$

Donc, si  $\mathbf{y} \in \Sigma_q$ ,  $\|\mathbf{u}^*(\mathbf{y})\|_q \leq 1$ . Si maintenant  $\mathbf{y}$  est un vecteur non nul quelconque,

$$\|\mathbf{u}^*(\mathbf{y})\|_q = \|\mathbf{y}\|_q \times \left\| \mathbf{u} \left( \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_q} \right) \right\|_q \leq \|\mathbf{y}\|_q,$$

ce qui reste vrai pour  $\mathbf{y} = 0$ .

On a montré que  $\forall \mathbf{y} \in E$ ,  $\|\mathbf{u}^*(\mathbf{y})\|_q \leq \|\mathbf{y}\|_q$ . Maintenant d'après la question 4.,  $\mathbf{u}^{-1}$  est aussi une  $p$ -isométrie et donc  $\forall \mathbf{y} \in E$ ,  $\|(\mathbf{u}^*)^{-1}(\mathbf{y})\|_q = \|(\mathbf{u}^{-1})^*(\mathbf{y})\|_q \leq \|\mathbf{y}\|_q$ . Par suite, pour  $\mathbf{y} \in E$ ,  $\|\mathbf{y}\|_q = \|(\mathbf{u}^*)^{-1}(\mathbf{u}^*(\mathbf{y}))\|_q \leq \|\mathbf{u}^*(\mathbf{y})\|_q$ . Finalement,  $\forall \mathbf{y} \in E$ ,  $\|\mathbf{u}^*(\mathbf{y})\|_q = \|\mathbf{y}\|_q$ .

Si  $u$  est une  $p$ -isométrie, alors  $u^*$  est une  $q$ -isométrie.

Puisque la base  $\mathcal{B}$  est orthonormée, on a  $[\mathbf{u}^*]_{\mathcal{B}} = {}^t A$  et donc puisque  $\mathbf{u}^*$  est une  $q$ -isométrie, d'après la question 15. on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{j,i}|^q = n.$$

**18. a.** • On a  $q = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$  et donc  $p - q = \frac{p(p-2)}{p-1}$ . Par suite si  $1 < p < 2$ , on a  $q > p$  et si  $p > 2$ , on a  $p > q$ .

• Supposons  $p \in ]1, 2[$  de sorte que  $q > p$ . Pour  $a \in [0, 1]$ , on a  $a^p \geq a^q$  et pour  $a \in ]0, 1[$ , on a  $a^p > a^q$ . Donc s'il existe  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  tel que  $0 < \alpha_i < 1$ ,

$$\sum_{k=1}^r \alpha_k^p = \alpha_i^p + \sum_{k \neq i} \alpha_k^p > \alpha_i^q + \sum_{k \neq i} \alpha_k^q = \sum_{k=1}^r \alpha_k^q,$$

et en particulier  $\sum_{k=1}^r \alpha_k^p \neq \sum_{k=1}^r \alpha_k^q$ . Par contraposition,  $\sum_{k=1}^r \alpha_k^p = \sum_{k=1}^r \alpha_k^q \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \alpha_k \in \{0, 1\}$ .

• Si  $p \in ]2, +\infty[$  alors  $q < p$  et on aboutit au même résultat.

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in [0, 1]^r, \left( \sum_{k=1}^r \alpha_k^p = \sum_{k=1}^r \alpha_k^q \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \alpha_k \in \{0, 1\} \right).$$

**b.** D'après la question 15., pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^p = 1$  ce qui montre que chaque  $|a_{i,j}|$  est dans  $[0, 1]$ . De plus, d'après les questions 15. et 17.,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|^p = n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|^q.$$

La question précédente permet alors d'affirmer que chaque  $|a_{i,j}|$  est dans  $\{0, 1\}$ .

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, |a_{i,j}| \in \{0, 1\}.$$

**19. Conclusion.** Plus précisément, puisque  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|^p = n$ , exactement  $n$  nombres  $|a_{i,j}|$  sont égaux à 1 les autres étant nuls. Ainsi, exactement  $n$  coefficients de la matrice  $A$  sont l'un des deux nombres 1 ou  $-1$  et les autres sont nuls. Puisque la matrice  $A$  est inversible, deux coefficients non nuls ne peuvent pas se retrouver dans une même ligne (car les lignes correspondantes seraient linéairement dépendantes) ou dans une même colonne. Ainsi, l'endomorphisme  $u$  est nécessairement du type  $u_{\sigma, \varepsilon}$  décrit à la question 13.a. La question 13.a. montre que réciproquement  $u_{\sigma, \varepsilon}$  est une  $p$ -isométrie et donc les  $p$ -isométries sont les endomorphismes  $u_{\sigma, \varepsilon}$ ,  $\sigma \in \mathcal{S}_n \times \{-1, 1\}^n$ . Il y a  $2^n \times n!$   $u_{\sigma, \varepsilon}$  deux à deux distincts et donc

$$\forall p \in ]1, +\infty[ \setminus \{2\}, \text{card}(\text{ISOM}(\|\cdot\|_p)) = 2^n \times n!.$$