
MATHEMATIQUES 1

Partie I

I.1. La matrice $S = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une matrice carrée réelle positive et symétrique dont la famille des valeurs propres est $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.

I.2. a) Puisque M est d'ordre 2, $\chi_M = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M) = X^2 - (-1 + 1)X + (-1) \times 1 = X^2 - 1$.

b) La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est positive et symétrique. De plus, $\chi_S = X^2 - 1$ et donc les deux valeurs propres de S sont -1 et 1 .

I.3. La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est positive et symétrique. De plus, $\chi_S = -X(X^2 - 1)$ et donc les trois valeurs propres de S sont -1 , 0 et 1 .

I.4. La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est positive et symétrique. De plus, un calcul par blocs montre que $\chi_S = (X^2 - 1)^2$ et donc les quatre valeurs propres de S sont -1 , -1 , 1 et 1 .

I.5. La trace de S est positive et est égale à la somme des valeurs propres de S . Comme $(-1) + (-1) + 0 = -2 < 0$, S ne peut admettre $(-1, -1, 0)$ pour famille de valeurs propres.

I.6. a) Soit $n \geq 2$. H est symétrique réelle et donc diagonalisable. On en déduit que toutes les valeurs propres de H sont réelles et que l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.

- Si $b = 0$, $H = aI_n$ et donc H admet a pour valeur propre d'ordre n .
- Si $b \neq 0$, $H - (a - b)I_n$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à b . Par suite, $\text{rg}(H - (a - b)I_n) = 1$ ou encore $\dim(\text{Ker}(H - (a - b)I_n)) = n - 1$. H admet donc $a - b$ pour valeur propre d'ordre $n - 1$. La dernière valeur propre λ est fournie par la trace de H : $n\alpha = \text{Tr}(H) = \lambda + (n - 1)(a - b)$ et donc $\lambda = a + (n - 1)b$.

En résumé, si $n \geq 2$, H admet $a - b$ pour valeur propre d'ordre $n - 1$ et $a + (n - 1)b$ pour valeur propre simple et si $n = 1$, H admet a pour valeur propre simple.

b) Pour $n \geq 2$, on prend $b = -1$ et $a = n$. Les valeurs propres de H sont $n + 1$ d'ordre $n - 1$ et 1 d'ordre 1 . Les valeurs propres de H sont donc toutes positives mais H n'est pas positive puisque $b < 0$.

Donc, si $n \geq 2$, une matrice symétrique réelle d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles n'est pas nécessairement positive.

Par contre, si $n = 1$, le résultat devient vrai car l'unique valeur propre de la matrice est son unique coefficient.

Partie II

II.1. a) Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. En identifiant une matrice carrée de format 1 et son unique coefficient, on a

$${}^tXY = {}^tYX = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (X|Y)_n.$$

b) Soient $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après a), $(X|SY)_n = {}^tXS Y$ et aussi $(SX|Y)_n = {}^t(SX)Y = {}^tX{}^tSY = {}^tXS Y$.

c) Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a donc ${}^tPP = I_n$ puis

$$\|PX\|_n = \sqrt{{}^t(PX)(PX)} = \sqrt{{}^tX{}^tPPX} = \sqrt{{}^tXX} = \|X\|_n.$$

II.2. a) $(Z|T)_{n+p} = \sum_{i=1}^n z_i t_i + \sum_{i=n+1}^{n+p} z_i t_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^p u_i v_i = (X|Y)_n + (U|V)_p.$

b) Si X et Y sont orthogonaux dans \mathbb{R}^n et U et V sont orthogonaux dans \mathbb{R}^p , alors $(Z|T)_{n+p} = (X|Y)_n + (U|V)_p = 0 + 0 = 0$ et Z et T sont orthogonaux dans \mathbb{R}^{n+p} .

c) On prend $X = (-1, 0, \dots, 0)$, $Y = (1, 0, \dots, 0)$, $U = (1, 0, \dots, 0)$ et $V = (1, 0, \dots, 0)$. On a alors $(X|Y)_n = -1 \neq 0$ et $(U|V)_p = 1 \neq 0$ mais $(Z|T)_{n+p} = -1 + 1 = 0$. La réciproque du b) est donc fausse.

II.3. a) Soit $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$(DY|Y)_n = ((\lambda_i y_i)_{1 \leq i \leq n} | (y_i)_{1 \leq i \leq n})_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \alpha \sum_{i=1}^n y_i^2 = \alpha \|Y\|_n^2.$$

b) D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PD^tP$. En posant $Y = PX$ pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donné, on a

$$(SX|X)_n = {}^tXSX = {}^tXPD^tPX = {}^t(PX)D(PX) = {}^tYDY = (DY|Y)_n \leq \alpha \|Y\|_n^2 = \alpha \|PX\|_n^2 = \alpha \|X\|_n^2.$$

Si de plus $X \neq 0$, $\|X\|_n^2 > 0$ et donc $\frac{(SX|X)_n}{\|X\|_n^2} \leq \alpha$.

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{(SX|X)_n}{\|X\|_n^2} \leq \alpha.$$

c) Notons $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de vecteurs propres de S associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$. Notons encore I l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i < \alpha$ (pour les indices restants, on a $\lambda_i = \alpha$).

Soit X un vecteur colonne non nul. Posons $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

On a $SX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$ puis, comme \mathcal{B} est orthonormée, $(SX|X)_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ et $\|X\|_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. On a alors

$$(SX|X)_n = \alpha \|X\|_n^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (\alpha - \lambda_i) x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} (\alpha - \lambda_i) x_i^2 = 0.$$

Dans cette dernière somme, tous les $\alpha - \lambda_i$ sont strictement positifs. Donc, ou bien l'un des x_i , $i \in I$, est non nul et dans ce cas, $\sum_{i=1}^n (\alpha - \lambda_i) x_i^2 > 0$ ou bien tous les x_i , $i \in I$, sont nuls et dans ce cas $\sum_{i=1}^n (\alpha - \lambda_i) x_i^2 = 0$. En résumé,

$$\begin{aligned} \frac{(SX|X)_n}{\|X\|_n^2} = \alpha &\Leftrightarrow (SX|X)_n = \alpha \|X\|_n^2 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} (\alpha - \lambda_i) x_i^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, x_i = 0 \Leftrightarrow X \in \text{Vect}(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} \Leftrightarrow X \text{ vecteur propre de } S \text{ associé à } \alpha. \end{aligned}$$

II.4. a) Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons E_j l'ensemble des vecteurs colonnes X dont la j -ème composante x_j est positive. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application $f_j : X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \mapsto x_j$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant de dimension finie sur \mathbb{R} .

Comme $E_j = f_j^{-1}([0, +\infty[)$ et que $[0, +\infty[$ est un fermé de \mathbb{R} (car son complémentaire $] -\infty, 0[$ est un ouvert de \mathbb{R}), E_j est un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. Mais alors, E est un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$E \text{ est un fermé de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

b) Σ est bien sûr borné. Σ est aussi fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $X \mapsto \|X\|_n$. Mais alors C est fermé en tant qu'intersection de fermés et borné car contenu dans Σ qui est borné.

C est un fermé borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c) Posons $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$\varphi(X) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n s_{i,j} x_i \right) x_j = \sum_{1 \leq i,j \leq n} s_{i,j} x_i x_j.$$

Maintenant, chaque application $X \mapsto x_i x_j$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en tant que produit d'applications continues sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc φ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en tant que combinaison linéaire d'applications continues sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

φ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) φ est continue sur le compact C à valeurs dans \mathbb{R} . φ admet donc un maximum sur C . On en déduit l'existence de μ puis l'existence d'un vecteur X_0 de C tel que $\varphi(X_0) = \mu$.

e) D'après la question II.3.b), α est un majorant de $\{\varphi(X), X \in C\}$. Puisque μ est le plus petit des majorants de $\{\varphi(X), X \in C\}$, on a donc

$\mu \leq \alpha$.

II.5. a)

i) W est positif et d'autre part $\|W\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|X\|_n = 1$ et donc $W \in C$.

ii) Puisque S est positive

$$|\varphi(X)| \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |s_{i,j}| |x_i| |x_j| = \sum_{1 \leq i,j \leq n} s_{i,j} |x_i| \times |x_j| = \varphi(W).$$

iii) Puisque X est un vecteur propre unitaire de S associé à la valeur propre α , $|\varphi(X)| = |(SX|X)_n| = |\alpha|(X|X)_n = |\alpha|$. On en déduit que $|\alpha| = |\varphi(X)| \leq \varphi(W) \leq \mu$ et donc

$|\alpha| \leq \mu$.

b) Ceci montre déjà que $\mu \geq 0$ et donc, puisque $\alpha \geq \mu$, on a aussi $\alpha \geq 0$. Mais alors, $|\alpha| = \alpha$ et les questions II.4.e) et II.5.a)iii) fournissent $\alpha \leq \mu \leq \alpha$ et donc $\alpha = \mu \geq 0$.

Le vecteur X_0 défini à la question II.4.d) est donc un vecteur positif vérifiant $\frac{(SX_0|X_0)_n}{\|X_0\|_n^2} = (SX_0|X_0)_n = \alpha$ et la question II.3.c) montre que X_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre α .

$\alpha \geq 0$ et il existe un vecteur propre de S associé à α qui est positif.

c) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le travail de la question II.5. peut être appliqué sur un vecteur propre unitaire X associé à la valeur propre λ_i et comme en II.5.a)iii), on obtient $|\lambda_i| \leq \mu = \alpha$.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda_i| \leq \alpha$.

Partie III

III.1. Soit $2 \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque (X_1, \dots, X_n) est orthonormée, on a ${}^t X_1 X_i = (X_1 | X_i)_n = 0$. Un calcul par blocs fournit alors

$$M_s Z_i = \begin{pmatrix} A X_i \\ s Y_1 {}^t X_1 X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i X_i \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_i \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_i Z_i.$$

De même, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$M_s T_j = \begin{pmatrix} s X_1 {}^t Y_1 Y_j \\ B Y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_j X_j \end{pmatrix} = \beta_j \begin{pmatrix} 0 \\ Y_j \end{pmatrix} = \beta_j T_j.$$

$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ (resp. $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$), Z_i (resp. T_j) est vecteur propre de M_s associé à α_i (resp. β_j).

III.2. a) D'après II.2.a)

$$\begin{aligned} \|V(\theta)\|_n^2 &= (V(\theta)|V(\theta))_{n+p} = (\cos \theta X_1 | \cos \theta X_1)_n + (\sin \theta Y_1 | \sin \theta Y_1)_p = \cos^2 \theta \|X_1\|_n^2 + \sin^2 \theta \|Y_1\|_p^2 \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \end{aligned}$$

$V(\theta)$ est unitaire dans \mathbb{R}^{n+p} .

b) Un calcul par blocs fournit

$$\chi_{M_0} = \chi_A \times \chi_B = (-1)^{n+p} \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \prod_{j=1}^p (X - \beta_j).$$

$\text{Sp}(M_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_p)$.

c) i) Puisque $s \neq 0$,

$$\sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2} > \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2} = |\alpha_1 - \beta_1| \geq \alpha_1 - \beta_1,$$

et donc $\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2} > 0$. En particulier, $\tan \theta_1 \neq 0$ et donc

$\theta_1 \neq 0$.

(ii) On en déduit que $\theta_2 \in]0, \pi[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ et donc $\tan \theta_2$ existe puis

$$(\tan \theta_1)(\tan \theta_2) = (\tan \theta_1) \left(-\frac{1}{\tan \theta_1} \right) = -1.$$

iii) $\tan \theta_1$ est solution de l'équation du second degré $sX^2 + (\alpha_1 - \beta_1)X - s = 0$. Le produit des solutions de cette équation vaut -1 et donc l'autre solution est $-\frac{1}{\tan \theta_1} = \tan \theta_2$. Ainsi θ_1 et θ_2 sont solutions de l'équation $s \tan^2 \theta + (\alpha_1 - \beta_1) \tan \theta - s = 0$ ou aussi de l'équation $\alpha_1 \tan \theta + s \tan^2 \theta = \beta_1 \tan \theta + s$ ou enfin de l'équation $\alpha_1 + s \tan \theta = \beta_1 + \frac{s}{\tan \theta}$ (puisque $\tan \theta_1$ et $\tan \theta_2$ ne sont pas nuls).

iv) D'après la question précédente, pour $i \in \{1, 2\}$, $\alpha_1 + s \tan \theta_i = \beta_1 + \frac{s}{\tan \theta_i}$ et donc

$$\begin{aligned} M_s V(\theta_i) &= \begin{pmatrix} \cos \theta_i A X_1 + s \sin \theta_i X_1 {}^t Y_1 Y_1 \\ s \cos \theta_i Y_1 {}^t X_1 X_1 + \sin \theta_i B Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos \theta_i X_1 + s \sin \theta_i X_1 \\ s \cos \theta_i Y_1 + \beta_1 \sin \theta_i Y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha_1 + s \tan \theta_i) \cos \theta_i X_1 \\ \left(\frac{s}{\tan \theta_i} + \beta_1 \right) \sin \theta_i Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1 + s \tan \theta_i) \cos \theta_i X_1 \\ (\alpha_1 + s \tan \theta_i) \sin \theta_i Y_1 \end{pmatrix} = (\alpha_1 + s \tan \theta_i) V(\theta_i), \end{aligned}$$

et donc $M_s V(\theta_i) = (\alpha_1 + s \tan \theta_i) V(\theta_i)$. De plus, $V(\theta_i)$ est unitaire et donc $V(\theta_i)$ n'est pas nul. Finalement

$V(\theta_1)$ (resp. $V(\theta_2)$) est vecteur propre de M_s associé à la valeur propre $\mu_1 = \alpha_1 + s \tan \theta_1$ (resp. $\mu_2 = \alpha_1 + s \tan \theta_2$).

v) • Pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\|Z_i\|_{n+p} = \|X_i\|_n = 1$ et de même pour $j \in \llbracket 2, p \rrbracket$, $\|T_j\|_{n+p} = \|Y_j\|_p = 1$. Enfin, $V(\theta_1)$ et $V(\theta_2)$ sont unitaires d'après la question II.2.a).

• D'après la question II.2.b), les Z_i sont deux à deux orthogonaux, les T_j sont deux à deux orthogonaux et chaque Z_i est orthogonal à chaque T_j .

• Pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, X_1 est orthogonal à X_i et 0 est orthogonal à Y_1 . Donc, toujours d'après la question III.2.b), tout vecteur $V(\theta)$ est orthogonal à tout Z_i , $2 \leq i \leq n$, et de même est orthogonal à tout T_j , $2 \leq j \leq p$.

Finalement, les vecteurs $V(\theta_1), V(\theta_2), Z_2, \dots, Z_n, T_2, \dots, T_p$ forment une base orthonormée de \mathbb{R}^{n+p} .

D'après les questions III.1 et III.2.c)iv), tous ces vecteurs sont des vecteurs propres de M_s et on a donc trouvé toutes les valeurs de M_s .

La famille des valeurs propres de M_s est $(\mu_1, \mu_2, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_2, \dots, \beta_p)$.

vi) Quand $s = 0$, μ_1 s'écrit formellement $\alpha_1 + 0 \times \tan \theta_1 = \alpha_1$ (bien que $\tan \theta_1$ ne soit pas défini). De même pour μ_2 .

Partie IV

IV.1. La matrice de format 1 $A = (\lambda_1)$ est un élément de $\mathcal{S}_1(\mathbb{R}^+)$ admettant λ_1 pour valeur propre.

IV.2. a) $\alpha = \lambda_1 + \lambda_{n+1} \geq -\lambda_2 - \dots - \lambda_n \geq 0$. D'autre part, $\alpha + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 0$.

En résumé, $\alpha \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ et $\alpha + \lambda_2 + \lambda_n \geq 0$. Par hypothèse de récurrence, il existe $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ tel que $\alpha, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soient les valeurs propres de A .

b) α est la plus grande valeur propre de A qui est symétrique réelle et positive. D'après la question II.5.b), A admet un vecteur propre positif associé à la valeur propre α . En normant ce vecteur, on obtient un vecteur propre unitaire positif X_1 de A associé à la valeur propre α .

c) i) Soit B la matrice nulle de format 1 et Y_1 le vecteur de \mathbb{R}^1 égal à 1. On a $BY_1 = 0$ et donc Y_1 est un vecteur propre de B associé à la valeur propre $\beta_1 = 0$.

Ainsi, M_s est de la forme (1) avec $p = 1$, $B = (0) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $Y_1 = (1) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$.

ii) Les valeurs propres de A sont $\alpha, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et 0 est l'unique valeur propre de B . D'après la question III.2.c)v), les valeurs propres de M_s sont $\mu_1 = \alpha + s \tan \theta_1, \mu_2 = \alpha + s \tan \theta_2, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

iii) Si $s = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_{n+1}}$, alors

$$\sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2} = \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_{n+1} - 0)^2 - 4\lambda_1 \lambda_{n+1}} = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})^2} = \lambda_1 - \lambda_{n+1} \text{ (car } \lambda_1 \geq \lambda_{n+1}\text{),}$$

et donc

$$s \tan \theta_1 = \frac{1}{2}(0 - \alpha + \lambda_1 \geq \lambda_{n+1}) = \frac{1}{2}(-\lambda_1 - \lambda_{n+1} + \lambda_1 - \lambda_{n+1}) = -\lambda_{n+1}$$

puis $\mu_1 = \alpha + s \tan \theta_1 = \lambda_1 + \lambda_{n+1} - \lambda_{n+1} = \lambda_1$. Ensuite, d'après la question III.2.c)iii)

$$\mu_2 = \alpha + s \tan \theta_2 = \alpha - \frac{s}{\tan \theta_1} = \alpha - (\alpha + s \tan \theta_1) = -s \tan \theta_1 = \lambda_{n+1}.$$

Les valeurs propres de M_s sont donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ quand $s = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_{n+1}}$. Maintenant, pour ce choix de S , la matrice M_s est une matrice clairement symétrique et positive ce qui démontre que (P_{n+1}) est vraie.

On a ainsi montré par récurrence que la propriété (P_n) est vraie pour tout entier naturel non nul n .

IV.3. Exemple a) En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 3 \\ 2 & 1-X & 3 \\ 3 & 3 & -X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2 - X - 9) - 2(-2X - 9) + 3(3X + 3) = -X^3 + 2X^2 + 21X + 18 = \\ (X+1)(-X^2 + 3X + 18) = -(X+1)(X+3)(X-6).$$

Les valeurs propres de A sont $\alpha = 6$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = -3$.

b) A est une matrice positive et symétrique et ses valeurs propres de A vérifient $\alpha \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ et $\alpha + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 0$. D'autre part, $\lambda_1 + \lambda_4 = 6 = \alpha$.

On a même $\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \lambda_4$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \geq 0$. Le nombre s de la question c)iii) est $\sqrt{-9(-3)} = 3\sqrt{3}$.

Déterminons un vecteur propre X_1 de A associé à la valeur propre 6 , unitaire et positif.

Posons $X = (x, y, z)$.

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(A - 6I_3) &\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \\ 3x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2z \\ -5x + 2(-x + 2z) + 3z = 0 \\ 2x - 5(-x + 2z) + 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2z \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z. \end{aligned}$$

Le vecteur $X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ convient. La matrice M_s de la question précédente s'écrit alors $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ convient.