
MATHEMATIQUES 2

Partie I**I.1.**

I.1.1. Notons h_s la fonction $x \mapsto f_s(-x)$. Puisque $] -1, 1[$ est symétrique par rapport à 0, h_s est définie et deux fois dérivable sur $] -1, 1[$ et pour $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} (1-x^2)h_s''(x) - 2(s+2)xh_s'(x) - 2(s+1)h_s(x) &= (1-x^2)f_s''(-x) - 2(s+2)(-xf_s'(-x)) - 2(s+1)f_s(-x) \\ &= (1-(-x)^2)f_s''(-x) - 2(s+2)(-x)f_s'(-x) - 2(s+1)f_s(-x) = 0 \text{ (car } f_s \text{ est solution de } \mathcal{E}_s \text{ sur }] -1, 1[). \end{aligned}$$

Maintenant, \mathcal{E}_s est une équation différentielle linéaire du second ordre homogène et on sait que la somme de deux solutions de \mathcal{E}_s est encore une solution de \mathcal{E}_s . On en déduit que $g_s = f_s + h_s$ est solution de \mathcal{E}_s sur $] -1, 1[$.

g_s est solution de \mathcal{E}_s sur $] -1, 1[$.

I.1.2. $g_s(0) = 2f_s(0) = 0$ et $g_s'(0) = f_s'(0) - f_s'(0) = 0$.

Maintenant, sur $] -1, 1[$, l'équation \mathcal{E}_s s'écrit encore $y'' - \frac{2(s+2)x}{1-x^2}y' - \frac{2(s+1)}{1-x^2}y = 0$. Comme les fonctions $x \mapsto -\frac{2(s+2)x}{1-x^2}$ et $x \mapsto -\frac{2(s+1)}{1-x^2}$ sont continues sur $] -1, 1[$, le théorème de CAUCHY permet d'affirmer que \mathcal{E}_s la fonction nulle est l'unique solution de \mathcal{E}_s sur $] -1, 1[$ vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$. Par suite, g_s est nulle ou encore

f_s est impaire.

I.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Notons y_α la fonction $x \mapsto (1-x^2)^\alpha$. y_α est deux fois dérivable sur $] -1, 1[$ (car $1-x^2 > 0$ sur $] -1, 1[$) et pour $x \in] -1, 1[$, $y_\alpha'(x) = -2\alpha x(1-x^2)^{\alpha-1}$ puis $y_\alpha''(x) = -2\alpha[(1-x^2)^{\alpha-1} - 2(\alpha-1)x^2(1-x^2)^{\alpha-2}] = -2\alpha(1-x^2)^{\alpha-2}((-2\alpha+1)x^2+1)$ et donc

$$\begin{aligned} (1-x^2)y_\alpha''(x) - 2(s+2)xy_\alpha'(x) - 2(s+1)y_\alpha(x) &= -2\alpha(1-x^2)^{\alpha-1}((-2\alpha+1)x^2+1) - 2x(s+2)(-2\alpha x)(1-x^2)^{\alpha-1} - 2(s+1)(1-x^2)^\alpha \\ &= -2(1-x^2)^{\alpha-1} [\alpha((-2\alpha+1)x^2+1) - 2(s+2)\alpha x^2 + (s+1)(1-x^2)] \\ &= -2(1-x^2)^{\alpha-1} [(\alpha(-2\alpha+1) - 2\alpha(s+2) - s-1)x^2 + \alpha + s + 1] \\ &= -2(1-x^2)^{\alpha-1} [(-2\alpha^2 - 3\alpha - 2\alpha s - s - 1)x^2 + \alpha + s + 1]. \end{aligned}$$

Mais alors y_α solution de \mathcal{E}_s sur $] -1, 1[\Leftrightarrow -2\alpha^2 - 3\alpha - 2\alpha s - s - 1 = 0$ et $\alpha = -s - 1$. Comme

$$-2(-s-1)^2 - 3(-s-1) - 2s(-s-1) - s - 1 = -2s^2 - 4s - 2 + 3s + 3 + 2s^2 + 2s - s - 1 = 0,$$

on a montré que

y_α solution de \mathcal{E}_s sur $] -1, 1[\Leftrightarrow \alpha = -s - 1$.

I.3.

I.3.1. Comme à la question précédente, on note y_{-s-1} la fonction $x \mapsto (1-x^2)^{-s-1}$. La fonction y_{-s-1} est solution de \mathcal{E}_s sur $] -1, 1[$ et puisque $f_s = y_{-s-1}u_s$, la formule de Leibniz fournit

$$\begin{aligned} & (1-x^2)f_s'' - 2(s+2)f_s' - 2(s+1)f_s \\ &= (1-x^2)(y_{-s-1}''u_s + 2y_{-s-1}'u_s' + y_{-s-1}u_s'') - 2x(s+2)(y_{-s-1}'u_s + y_{-s-1}u_s') - 2(s+1)y_{-s-1}u_s \\ &= u_s((1-x^2)y_{-s-1}'' - 2x(s+2)y_{-s-1}' - 2(s+1)y_{-s-1}) + u_s'(2(1-x^2)y_{-s-1}' - 2x(s+2)y_{-s-1}) \\ &+ (1-x^2)y_{-s-1}u_s'' \\ &= (1-x^2)^{-s}u_s'' + (2(1-x^2)(-s-1)(-2x)(1-x^2)^{-s-2} - 2x(s+2)(1-x^2)^{-s-1})u_s' \\ &= (1-x^2)^{-s}u_s'' + 2x(1-x^2)^{-s-1}(2s+2-s-2)u_s' = (1-x^2)^{-s-1}((1-x^2)u_s'' + 2xsu_s'), \end{aligned}$$

et puisque $(1-x^2)f_s'' - 2(s+2)f_s' - 2(s+1)f_s = 0$, on a encore $(1-x^2)u_s'' + 2xsu_s' = 0$ ce qui signifie que

$$u_s' \text{ est solution sur }] -1, 1[\text{ de } (1-x^2)y' + 2sxy = 0 \text{ (}\mathcal{E}'_s\text{).}$$

I.3.2. Soit y une fonction dérivable sur $] -1, 1[$.

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } \mathcal{E}'_s \text{ sur }] -1, 1[&\Leftrightarrow \forall x \in] -1, 1[, (1-x^2)y'(x) + 2sxy(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in] -1, 1[, (1-x^2)^{-s}y'(x) + 2sx(1-x^2)^{-s-1}y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in] -1, 1[, ((1-x^2)^{-s}y)'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in] -1, 1[, (1-x^2)^{-s}y(x) = C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in] -1, 1[, y(x) = C(1-x^2)^s. \end{aligned}$$

$$\text{Les solutions de } (\mathcal{E}'_s) \text{ sur }] -1, 1[\text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto C(1-x^2)^s, C \in \mathbb{R}.$$

I.3.3. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in] -1, 1[, u_s'(x) = C(1-x^2)^s$.

Or $u_s'(0) = (s+1) \times 0 \times 1^s \times f_s(0) + 1 \times f_s'(0) = 1$. Comme d'autre part $u_s'(0) = C$ on a donc $C = 1$ puis $\forall x \in] -1, 1[, u_s'(x) = (1-x^2)^s$.

Ensuite, $u_s(0) = 1 \times f_s(0) = 0$ et donc u_s est la primitive sur $] -1, 1[$ de la fonction $x \mapsto (1-x^2)^s$ qui s'annule en 0. On en déduit que

$$\forall x \in] -1, 1[, u_s(x) = \int_0^x (1-t^2)^s dt,$$

et aussi

$$\forall x \in] -1, 1[, f_s(x) = (1-x^2)^{-s-1} \int_0^x (1-t^2)^s dt,$$

I.4. I.4.1. On note R le rayon de convergence de la série entière de somme y et on suppose à priori $R > 0$. Pour $x \in] -R, R[$, on a

$$\begin{aligned} & (1-x^2)y''(x) - 2(s+2)y'(x) - 2(s+1)y(x) \\ &= (1-x^2) \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n-1} - 2(s+2)x \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)c_n x^{2n} - 2(s+1) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n+1} - 2(s+2) \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)c_n x^{2n+1} - 2(s+1) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} [-2n(2n+1) - 2(s+2)(2n+1) - 2(s+1)]c_n x^{2n+1} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 (1-x^2)y''(x) - 2(s+2)y'(x) - 2(s+1)y(x) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)(2n+3)c_{n+1}x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} [-4n^2 - (4s+10)n - 4s - 6]c_n x^{2n+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)(2n+3)c_{n+1}x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)(-2n-2s-3)c_n x^{2n+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)[(2n+3)c_{n+1} - (2n+2s+3)c_n]x^{2n+1}.
 \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que

$$y \text{ est solution de } \mathcal{E}_s \text{ sur }]-\mathbb{R}, \mathbb{R}[\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (2n+3)c_{n+1} - (2n+2s+3)c_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{2s+2n+3}{2n+3}c_n.$$

I.4.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$c_n = \prod_{k=1}^n \frac{2s+2k+1}{2k+1} c_0 = \frac{(2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2}{(2n+1) \times (2n) \times \dots \times 3 \times 2} \prod_{k=1}^n (2s+2k+1) = \frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^n (2s+2k+1).$$

I.4.3. y est polynomiale si et seulement si la suite c est nulle à partir d'un certain rang. Ceci équivaut à $c_0 = 0$ ou bien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2s+2n+3 = 0$. Cette dernière condition équivaut à $s \in \left\{ -n - \frac{3}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Le cas $c_0 = 0$ fournit la fonction nulle.

Le cas $c_0 \neq 0$ fournit une solution non nulle de rayon $R = +\infty$ ce qui valide les calculs de la question I.4.1 sur $] -\infty, \infty[$.

\mathcal{E}_s admet des solutions polynomiales impaires non nulles si et seulement si $s \in \left\{ -n - \frac{3}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$ et $c_0 \neq 0$.

I.4.4. Dans cette question, aucun des c_n n'est nul.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = c_n x^{2n+1}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{c_{n+1}}{c_n} x^2 = \frac{2n+2s+3}{2n+3} x^2.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers x^2 et donc, d'après la règle de d'ALEMBERT, si $|x| < 1$, la série de terme général u_n converge et si $|x| > 1$, la série de terme général u_n diverge. On en déduit que $R = 1$ ce qui valide les calculs de la question I.4.1 sur $] -1, 1[$.

I.5. Dans tous les cas, les solutions sur $] -1, 1[$, impaires et développables en série entière sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto c_0 \left(x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^n (2s+2k+1) \right] x^{2n+1} \right), c_0 \in \mathbb{R}.$$

Le cas $c_0 = 1$ fournit en particulier une solution y de \mathcal{E}_s sur $] -1, 1[$ telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = c_0 = 1$. f_s étant l'unique solution vérifiant ces conditions, on a montré que

$$\forall x \in] -1, 1[, f_s(x) = \left(x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^n (2s+2k+1) \right] x^{2n+1} \right).$$

I.6. Soient $p \in \mathbb{N}$ puis $s = -p - \frac{3}{2}$. D'après la question I.3.3., pour $x \in] -1, 1[$

$$\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{p+\frac{3}{2}}} = \int_0^x (1-t^2)^s dt = u_s(x) = \frac{f_s(x)}{(1-x^2)^{s+1}} = \frac{f_{-p-\frac{3}{2}}(x)}{(1-x^2)^{p+\frac{1}{2}}}.$$

Maintenant, d'après la question I.4.3., $f_{-p-\frac{3}{2}}$ est une fonction polynomiale que l'on note Q_p .

Déterminons explicitement Q_p . On a $c_0 = 1$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \frac{2(n-p)}{2n+3} c_n$.

Par suite, pour $n \geq p+1$, $c_n = 0$ puis, pour $n \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$c_n = \frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^n (-2p+2k-2) = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^n (p-k+1) = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!} \frac{p!}{(p-n)!},$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$. Donc,

$$\forall p \in \mathbb{N}, Q_p = \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n 2^{2n} n! p!}{(2n+1)! (p-n)!} X^{2n+1}.$$

On a en particulier $Q_0 = X$ et $Q_1 = X - \frac{2}{3} X^3$. Donc

$$\forall x \in]-1, 1[, \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ et } \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x - \frac{2}{3} x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Partie II

II.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\alpha : t \mapsto (1-t^2)^x$ est continue sur $[0, 1[$. De plus, quand t tend vers 1,

$$(1-t^2)^x = (1+t)^x (1-t)^x \sim 2^x (1-t)^x > 0.$$

On en déduit que α est intégrable au voisinage de 1 à droite si et seulement si $x > -1$.

$$\text{Le domaine de définition de } \beta \text{ est }]-1, +\infty[.$$

II.2. Soient a un réel strictement supérieur à -1 puis $G : [a, +\infty[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto (1-t^2)^x$.

- Pour chaque $t \in]0, 1[$, la fonction $x \mapsto (1-t^2)^x$ est continue sur $[a, +\infty[$.
- Pour chaque $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto (1-t^2)^x$ est continue sur $]0, 1[$ et de plus, pour $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, 1[$, on a $0 < 1-t^2 \leq 1$ puis $\ln(1-t^2) \leq 0$ et donc

$$0 \leq (1-t^2)^x = e^{x \ln(1-t^2)} \leq e^{a \ln(1-t^2)} = (1-t^2)^a = \varphi(t),$$

où φ est une fonction continue et intégrable sur $]0, 1[$ d'après la question précédente.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, β est continue sur $[a, +\infty[$ et ceci pour tout $a > -1$. On en déduit que

$$\beta \text{ est continue sur }]-1, +\infty[.$$

II.3. Soit $x \in]-1, +\infty[$. La fonction $t \mapsto (1-t^2)^x \ln(1-t^2)$ est continue, négative et non nulle sur $]0, 1[$. On en déduit que $\beta'(x) = \int_0^1 (1-t^2)^x \ln(1-t^2) dt < 0$. Par suite

$$\beta \text{ est strictement décroissante sur }]-1, +\infty[.$$

II.4.

II.4.1. Soit $x \in]-1, +\infty[$.

$$\beta(x+1) = \int_0^1 (1-t^2)^{x+1} dt = \int_0^1 (1-t^2)^x (1-t^2) dt = \int_0^1 (1-t^2)^x dt - \int_0^1 t^2 (1-t^2)^x dt = \beta(x) - \int_0^1 t \times t (1-t^2)^x dt.$$

Soit $a \in]0, 1[$. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\frac{(1-t^2)^{x+1}}{2(x+1)}$ sont de classe C^1 sur $[0, a]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^a t \times t (1-t^2)^x dt = \left[t \times \left(-\frac{(1-t^2)^{x+1}}{2(x+1)} \right) \right]_0^a - \int_0^a -\frac{(1-t^2)^{x+1}}{2(x+1)} dt = -\frac{a(1-a^2)^{x+1}}{2(x+1)} + \frac{1}{2x+2} \int_0^a (1-t^2)^x dt.$$

Quand a tend vers 1, $-\frac{a(1-a^2)^{x+1}}{2(x+1)}$ tend vers 0 (car $x+1 > 0$) et donc, quand a tend vers 1 on obtient $\int_0^1 t \times t (1-t^2)^x dt = \frac{\beta(x)}{2x+2}$. Finalement,

$$\beta(x+1) = \beta(x) + \frac{\beta(x)}{2x+2} = \frac{2x+3}{2x+2} \beta(x).$$

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \beta(x+1) = \beta(x) + \frac{\beta(x)}{2x+2} = \frac{2x+3}{2x+2} \beta(x).$$

II.4.2. $\beta(0) = \int_0^1 1 dt = 1$. Mais alors, pour continuité de la fonction β en 0, on a

$$\beta(x) = \frac{2x+3}{2x+2} \times \beta(x+1) \underset{x \rightarrow -1^+}{\sim} \frac{-2+3}{2(x+1)} \times \beta(0) = \frac{1}{2(x+1)},$$

et en particulier

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \beta(x) = +\infty.$$

II.4.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\beta(n) = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \dots \times \frac{2}{3} \beta(0) = \frac{((2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2)^2}{(2n+1) \times (2n) \times (2n-1) \times \dots \times 3 \times 2} = \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!},$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \beta(n) = \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!},$$

D'après la formule de STIRLING, on a

$$\beta(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \times 2\pi n}{(2n+1) \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi \times 2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta(n) = 0$. Maintenant, la fonction β est strictement décroissante sur $] -1, +\infty[$ et a donc une limite en $+\infty$, limite réelle ou infinie et de plus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \beta(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta(n) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \beta(x) = 0.$$

II.4.4. $\beta\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\text{Arcsin } t]_0^1 = \frac{\pi}{2}$. Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\beta\left(-\frac{1}{2} + n\right) = \frac{2\left(-\frac{1}{2} + n - 1\right) + 2}{2\left(-\frac{1}{2} + n - 1\right) + 3} \beta\left(-\frac{1}{2} + n - 1\right) = \frac{2n-1}{2n} \beta\left(-\frac{1}{2} + n - 1\right)$$

et donc pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\beta\left(-\frac{1}{2} + n\right) = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \beta\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times \dots \times 3 \times 2}{((2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \times \frac{\pi}{2},$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \beta\left(-\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Partie III

III.1.

III.1.1. φ_γ est continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, puisque $\gamma > 1$, φ'_γ a une limite réelle à gauche et à droite en tout point où φ_γ s'annule. On en déduit que φ_γ est continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} et donc, d'après le théorème de DIRICHLET, la série de Fourier de φ_γ converge simplement sur \mathbb{R} vers φ_γ .

III.1.2. La fonction φ_γ est paire et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(\gamma) = 0$. D'autre part, $\forall x \in [0, \pi]$, $\varphi_\gamma(\pi - x) = \varphi_\gamma(x)$ et donc pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{2p+1}(\gamma) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_\gamma(x) \cos((2p+1)x) dx = \frac{2}{\pi} \int_\pi^0 \varphi_\gamma(\pi - u) \cos((2p+1)(\pi - u)) (-du) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_\gamma(u) \cos(\pi - (2p+1)u) du = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_\gamma(u) \cos((2p+1)u) du \\ &= -a_{2p+1}(\gamma), \end{aligned}$$

et donc $a_{2p+1}(\gamma) = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(\gamma) = 0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1}(\gamma) = 0.$$

III.2.

III.2.1. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$I_p - I_{p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x (\cos(2px) - \cos((2p+2)x)) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \times \sin x \times \sin((2p+1)x) dx.$$

III.2.2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $x \mapsto -\frac{\cos^{\gamma+1} x}{\gamma+1}$ et $x \mapsto \sin((2p+1)x)$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_p - I_{p+1} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \times \sin x \times \sin((2p+1)x) dx \\ &= 2 \left(\left[-\frac{\cos^{\gamma+1} x}{\gamma+1} \sin((2p+1)x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2p+1}{\gamma+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma+1} x \cos((2p+1)x) dx \right) \\ &= 2 \frac{2p+1}{\gamma+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma+1} x \cos((2p+1)x) dx \end{aligned}$$

III.2.3. Mais alors

$$\begin{aligned} I_p - I_{p+1} &= \frac{2p+1}{\gamma+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \times 2 \cos x \cos((2p+1)x) \, dx \\ &= \frac{2p+1}{\gamma+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x (\cos(2px) + \cos((2p+2)x)) \, dx \\ &= \frac{2p+1}{\gamma+1} (I_p + I_{p+1}). \end{aligned}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_p - I_{p+1} = \frac{2p+1}{\gamma+1} (I_p + I_{p+1}).$$

III.2.4. En posant $t = \sin x$ et donc $dt = \cos x \, dx$, on obtient

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma-1} x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)^{(\gamma-1)/2} \cos x \, dx = \int_0^1 (1-t^2)^{(\gamma-1)/2} \, dt = \beta\left(\frac{\gamma-1}{2}\right).$$

$$I_0 = \beta(\gamma') \text{ où } \gamma' = \frac{\gamma-1}{2} > 0.$$

III.2.5. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question III.2.3., on a $I_p - I_{p+1} = \frac{2p+1}{\gamma+1} (I_p + I_{p+1})$ et donc $\frac{\gamma+2p+2}{\gamma+1} I_{p+1} = \frac{\gamma-2p}{\gamma+1} I_p$ puis $I_{p+1} = \frac{\gamma-2p}{\gamma+2p+2} I_p$. Mais alors, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{\gamma-2(p-1)}{\gamma+2p} \times \frac{\gamma-2(p-2)}{\gamma+2(p-1)} \times \dots \times \frac{\gamma}{\gamma+2} \times I_0 \\ &= \frac{\gamma}{\gamma+2p} \times \frac{(\gamma-2(p-1))(\gamma-2(p-2)) \times \dots \times (\gamma-2) \times \gamma}{(\gamma+2(p-1))(\gamma+2(p-2)) \times \dots \times (\gamma+2) \times \gamma} \times \beta(\gamma') \\ &= \frac{\gamma}{\gamma+2p} \prod_{k=0}^{p-1} \frac{\gamma-2k}{\gamma+2k} \beta(\gamma'). \end{aligned}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, I_p = \frac{\gamma}{\gamma+2p} \prod_{k=0}^{p-1} \frac{\gamma-2k}{\gamma+2k} \times \beta\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)$$

III.3. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos^\gamma x| \cos(2px) \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 |\cos^\gamma(\pi-u)| \cos(2p(\pi-u)) (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma u \cos(2pu) \, du,$$

et donc

$$a_{2p}(\gamma) = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^\gamma x| \cos(2px) \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos^\gamma x| \cos(2px) \, dx \right) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \cos(2px) \, dx = \frac{4}{\pi} I_p.$$

Par suite,

$$a_0(\gamma) = \frac{4}{\pi} \beta\left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*, a_{2p}(\gamma) = \frac{4}{\pi} \times \frac{\gamma}{\gamma+2p} \prod_{k=0}^{p-1} \frac{\gamma-2k}{\gamma+2k} \times \beta\left(\frac{\gamma-1}{2}\right).$$