SESSION 2008

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

PARTIE I
Quelques valeurs de la fonctions θ

I.1/ Calcul de $\theta(1)$

I.1.1/ Soit $x \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^x} = \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \\ +\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

I.1.2/ Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x \leq 0$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, $n \geq 1$, est grossièrement divergente. Dans ce cas, $\theta(x)$ n'existe pas.

• Si $x > 0$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right)$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. On en déduit que la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, $n \geq 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. Dans ce cas, $\theta(x)$ existe.

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } \theta \text{ est } E =]0, +\infty[.}$$

I.1.3/

I.1.3.1/ La fonction tan est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et admet donc des primitives sur cet intervalle. Une primitive de la fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ est la fonction $t \mapsto -\ln|\cos t|$. Par suite,

$$J_1 = \int_0^{\pi/4} \tan t \, dt = [-\ln|\cos t|]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\ln 2}{2}.$$

$$\boxed{J_1 = \frac{\ln 2}{2}.}$$

I.1.3.2/ Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $g_n = \tan^n$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et donc J_n existe.

• Chaque fonction g_n est continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

• La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ vers la fonction g définie par : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $g(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < \pi/4 \\ 1 \text{ si } t = \pi/4 \end{cases}$. De plus, la fonction g est continue par morceaux sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

• Chaque fonction $|g_n|$ est majorée sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par la fonction $\varphi : t \mapsto 1$ où de plus la fonction φ est continue et intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} g(t) \, dt = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.}$$

I.1.3.3/ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$J_n + J_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 t)\tan^n t \, dt = \int_0^{\pi/4} \tan' t \tan^n t \, dt = \left[\frac{\tan^{n+1} t}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}.}$$

I.1.3.4/ • Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$ et $J_1 + (-1)^{n+1}J_{2n+1} = J_1 + J_3 = \dfrac{1}{2}$ (d'après I.1.3.3/). La formule de l'énoncé est donc vraie quand $n = 1$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = J_1 + (-1)^{n+1}J_{2n+1}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} + \frac{(-1)^{n+2}}{2n+2} \\ &= J_1 + (-1)^{n+1}J_{2n+1} + (-1)^{n+2}(J_{2n+1} + J_{2n+3}) \text{ (par hypothèse de récurrence et d'après I.1.3.3/)} \\ &= J_1 + (-1)^{n+1}J_{2n+1} - (-1)^{n+1}J_{2n+1} + (-1)^{n+2}J_{2n+3} = J_1 + (-1)^{(n+1)+1}J_{2(n+1)+1}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = J_1 + (-1)^{n+1}J_{2n+1}.}$$

I.1.3.5/ D'après ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 2J_1 + 2(-1)^{n+1}J_{2n+1}$ et d'après I.1.3.2/ et I.1.3.1/, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ tend vers $2J_1 = \ln 2$ quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$\boxed{\theta(1) = \ln 2.}$$

I.2/ Une valeur approchée de $\theta(3)$

I.2.1/ Algorithme en français.

• Initialiser S : $S = 1$
• Rentrer la valeur de n.
• Si $n = 1$, afficher S.
• Sinon, pour i variant de 2 à n, remplacer S par $S + \dfrac{(-1)^{i+1}}{i^3}$.
• Afficher S.

I.2.2/ La machine fournit $\sigma = 0,9015$.

I.2.3/ D'après des inégalités classiques sur les sommes partielles de séries alternées, on a

$$\sigma = 0,9015 \leq S_{30} \leq \theta(3) \leq S_{31} = 0,9015\ldots < 0,9016$$

et donc

$$\boxed{\text{la valeur décimale approchée par défaut à } 10^{-4} \text{ près de } \theta(3) \text{ est } \sigma = 0,9015.}$$

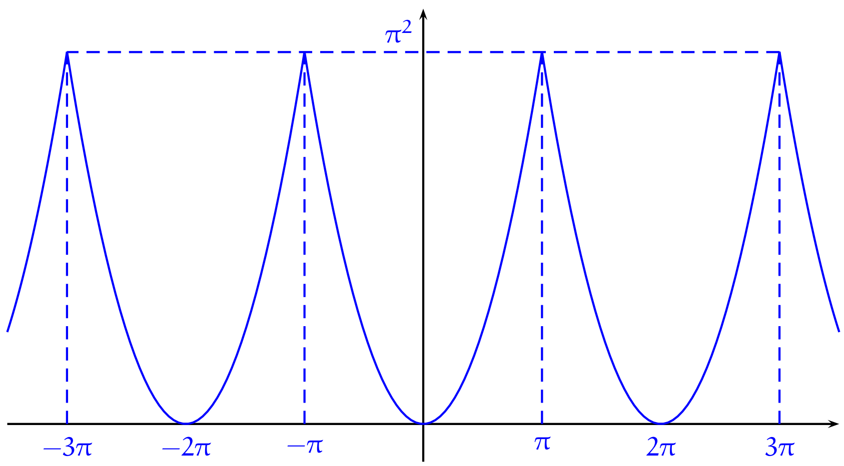
I.3/ Calcul de $\theta(2)$ et $\theta(4)$

I.3.1/ $\alpha_0 = \int_0^\pi x^2\,dx = \frac{\pi^3}{3}$ et pour $n \geq 1$, une double intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \int_0^\pi x^2 \cos(nx)\,dx \\ &= \left[x^2\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx = \frac{2}{n}\int_0^\pi x(-\sin(nx))\,dx \\ &= \frac{2}{n}\left(\left[x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx\right) = \frac{2(-1)^n\pi}{n^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{\pi^3}{3} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n = \frac{2(-1)^n\pi}{n^2}.}$$

I.3.2/. Graphe de g.



La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER. De plus g est paire. Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(g) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\alpha_n$.

$$\boxed{a_0(g) = \frac{2\pi^2}{3} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(g) = \frac{4(-1)^n}{n^2} \text{ et } b_n(g) = 0.}$$

I.3.3/ La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de g converge vers g sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour $x \in]-\pi, \pi]$,

$$x^2 = g(x) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(g)\cos(nx) + b_n(g)\sin(nx)) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in]-\pi, \pi],\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}.}$$

I.3.4/ Pour $x = 0$, on obtient en particulier $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ et donc $\theta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

$$\boxed{\theta(2) = \frac{\pi^2}{12}.}$$

I.3.5/ La série de terme général $\dfrac{1}{n^4}$, $n \geq 1$, est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 4 > 1$. Cette série est convergente. La formule de Parseval appliquée à la fonction g fournit

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx = \frac{(a_0(g))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(g))^2 + (b_n(g))^2),$$

ce qui fournit $\dfrac{1}{\pi} \times 2 \times \dfrac{\pi^5}{5} = \dfrac{2\pi^4}{9} + 16\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4}$ et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4} = \dfrac{8\pi^4}{45 \times 16} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

I.3.6/ Pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, on a $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)\right| \leq \dfrac{1}{n^3}$. Comme la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^3}$ converge, on en déduit que la série de fonction de terme général $x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)$, $n \geq 1$, converge normalement et donc simplement sur $\mathbb{R}$ et donc sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in]-\pi, \pi]$. Puisque la série de fonctions de terme général $t \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^3}\sin(nt)$, $n \geq 1$, converge normalement sur le segment $[0, x]$ ou $[x, 0]$ suivant que x soit positif ou négatif, un théorème d'intégration terme à terme permet d'écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)\,dt = \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)\right)dt = \int_0^x\left(\frac{t^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\right)dt = \frac{x^3 - \pi^2 x}{12}.$$

$$\boxed{\forall x \in]-\pi, \pi],\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx) = \frac{x^3 - \pi^2 x}{12}.}$$

I.3.7/ De même, la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^4}\cos(nx)$, $n \geq 1$, converge normalement et donc simplement sur $\mathbb{R}$. Ensuite, comme précédemment, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^4}\cos(nx)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)$ sur $]-\pi, \pi]$.

Donc, d'après I.3.6/, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-\pi, \pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^4}\cos(nx) = -\dfrac{x^4}{48} + \dfrac{\pi^2 x^2}{24} + C$. Pour $x = 0$, on obtient $C = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^4} = -\theta(4)$. Donc

$$\boxed{\forall x \in]-\pi, \pi],\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nx) = -\frac{x^4}{48} + \frac{\pi^2 x^2}{24} - \theta(4).}$$

I.3.8/ Pour $x = \pi$, on obtient $\dfrac{\pi^4}{90} = -\dfrac{\pi^4}{48} + \dfrac{\pi^4}{24} - \theta(4)$ et donc $\theta(4) = \dfrac{\pi^4}{48} - \dfrac{\pi^4}{90} = \dfrac{7\pi^4}{720}$.

$$\boxed{\theta(4) = \frac{7\pi^4}{720}.}$$

Remarque. $\theta(4) = 1 - \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} - + \dfrac{1}{4^4}\ldots = (1 + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{4^4} + \ldots) - 2(\dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{4^4} + \ldots) = (1 - \dfrac{2}{2^4})(1 + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{4^4} + \ldots) = \dfrac{7}{8} \times \dfrac{\pi^4}{90} = \dfrac{7}{720}$.

PARTIE II

Etude d'une fonction

II.1/ Pour tout réel x et tout entier naturel n, on a $1+e^{-nx}>0$ et donc chaque fonction u_n est définie sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout réel x, $f(x)$ existe si et seulement si la série numérique de terme général $u_n(x)$ converge.

• Si $x\leq 0$, $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La série numérique de terme général $u_n(x)$ est donc grossièrement divergente et dans ce cas, $f(x)$ n'existe pas.

• Si $x>0$, quand n tend vers $+\infty$, e^{-nx} tend vers 0 et donc $0\leq u_n(x)\sim e^{-nx}=(e^{-x})^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente (car $0<e^{-x}<1$). Dans ce cas, $f(x)$ existe.

$$\boxed{f \text{ est définie sur }]0,+\infty[.}$$

II.2/ Soit $a>0$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout réel $x\in[a,+\infty[$, $|u_n(x)|=\ln(1+e^{-nx})\leq\ln(1+e^{-na})=u_n(a)$. Comme la série numérique de terme général $u_n(a)$, $n\geq 0$, converge, la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $[a,+\infty[$. Mais alors, chaque fonction u_n étant continue sur $[a,+\infty[$, on en déduit que f est continue sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout réel $a>0$, on a montré que

$$\boxed{f \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$$

II.3/ Soit $(x,y)\in]0,+\infty[^2$ tel que $x<y$. Comme chaque fonction u_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, pour tout entier naturel non nul, on a $u_n(x)>u_n(y)$ puis en sommant, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)>\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(y)$ et enfin en additionnant $u_0(x)=u_0(y)=\ln 2$ aux deux membres de cette inégalité, on obtient $f(x)>f(y)$.

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[.}$$

II.4/ Puisque f est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $\mathscr{E}$ est un intervalle.

II.5/ f est décroissante et positive sur $]0,+\infty[$. Donc f admet en $+\infty$ une limite réelle λ. De plus, la série de fonctions de terme général u_n converge normalement vers f sur $[1,+\infty[$ et le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}u_n(x)=\ln 2+0+0+\ldots=\ln 2.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ln 2.}$$

II.6/

II.6.1/ Soit $x>0$. La fonction Ψ_x est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, quand t tend vers $+\infty$, $\Psi_x(t)=\ln(1+e^{-xt})\sim e^{-tx}=o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction Ψ_x est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Psi_x(t)\,dt$ est convergente.

$$\boxed{\forall x>0, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty}\Psi_x(t)\,dt \text{ est convergente.}}$$

II.6.2/ Soit $x>0$. La fonction Ψ_x est décroissante sur $[0,+\infty[$ et donc pour $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_n^{n+1}\Psi_x(t)\,dt\leq\Psi_x(n)$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\Psi_x(n)\leq\int_{n-1}^{n}\Psi_x(t)\,dt$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\Psi_x(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1}\Psi_x(t)\,dt\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\Psi_x(n)=f(x),$$

et

$$f(x)=\Psi_x(0)+\sum_{n=1}^{+\infty}\Psi_x(n)\leq\Psi_x(0)+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}\Psi_x(t)\,dt=\ln 2+\int_0^{+\infty}\Psi_x(t)\,dt.$$

$$\boxed{\forall x>0, \int_0^{+\infty}\Psi_x(t)\,dt\leq f(x)\leq\ln 2+\int_0^{+\infty}\Psi_x(t)\,dt.}$$

II.6.3/ La fonction $h : y \mapsto \dfrac{\ln(1+y)}{y}$ est continue sur $]0,1]$ et est prolongeable par continuité en 0 car $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$. Cette fonction est donc intégrable sur $]0,1]$.

Pour $y \in]0,1[$, on a $\dfrac{\ln(1+y)}{y} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} y^{n-1}$. Pour $y \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $h_n(y) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} y^{n-1}$.

• Chaque fonction h_n est continue et intégrable sur $]0,1[$.
• La série de fonctions de terme général h_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction h sur $]0,1[$ qui est continue sur $]0,1[$.
• Enfin

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |h_n(t)|\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 y^{n-1}\,dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

D'après un théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 y^{n-1}\,dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \theta(2) = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,dy = \theta(2) = \frac{\pi^2}{12}.}$$

II.6.4/ Soit $x > 0$. Posons $y = e^{-tx}$ et donc $t = -\ln yx$ puis $dt = -\dfrac{dy}{xy}$. On obtient

$$\int_0^{+\infty} \Psi_x(t)\,dt = \int_1^0 \ln(1+y) \times \frac{-1}{xy}\,dy = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,dy = \frac{\pi^2}{12x}.$$

La question II.6.2/ fournit alors

$$\boxed{\forall x > 0,\ \frac{\pi^2}{12x} \leq f(x) \leq \ln 2 + \frac{\pi^2}{12x}.}$$

II.6.5/ On en déduit que $xf(x)$ tend vers $\dfrac{\pi^2}{12}$ quand x tend vers 0 et en particulier que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

On sait déjà que $\mathscr{E}$ est un intervalle et puisque f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$,

$$\mathscr{E} = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)\right[=]\ln 2, +\infty[.$$

$$\boxed{\mathscr{E} =]\ln 2, +\infty[.}$$

PARTIE III
Propriétés de la fonction θ

III.1/ Soit $x > 0$. La suite numérique $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est alternée en signe et sa valeur absolue décroît. Puisque le premier terme de cette suite est positif, des inégalités classiques sur les sommes partielles d'une série alternée fournissent $\displaystyle\sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$. On a montré que

$$\boxed{\forall x > 0,\ 1 - \frac{1}{2^x} \leq \theta(x) \leq 1.}$$

III.2/ En particulier, pour tout $x > 0$, $0 \leq x \leq 1$ et θ est bornée sur $]0,+\infty[$. Ensuite, puisque $1 - \dfrac{1}{2^x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \theta(x) = 1.}$$

III.3/ Continuité de la fonction θ.

III.3.1/ Soit $a > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $x \in [a, +\infty[$, $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right| = \dfrac{1}{n^x} \leq \dfrac{1}{n^a}$. Comme la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^a}$, $n \geq 1$, converge, la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Mais alors, chaque fonction $x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ étant continue sur $[a, +\infty[$, on en déduit que θ est continue sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 1$, on a montré que

$$\boxed{\theta \text{ est continue sur }]1, +\infty[.}$$

III.3.2/ Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\theta_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.
Soit $a > 0$. Montrons que la série de fonctions de terme général θ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément vers θ sur $[a, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que la valeur absolue du reste à l'ordre n d'une série alternée est majorée par la valeur absolue de son premier terme et donc, pour tout $x \geq a$, on a

$$|R_n(x)| = \left|\theta(x) - \sum_{k=1}^{n} \theta_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}\right| \leq \left|\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^x}\right| = \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a},$$

ce qui fournit encore

$$\sup\left\{\left|\theta(x) - \sum_{k=1}^{n} \theta_k(x)\right|,\ x \geq a\right\} \leq \frac{1}{n^a}.$$

Comme $a > 0$, $\dfrac{1}{n^a}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et il en est de même de $\sup\left\{\left|\theta(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \theta_k(x)\right|,\ x \geq a\right\}$. On a ainsi montré que la série de fonctions de terme général θ_n, $n \geq 1$, converge uniformément vers θ sur $[a, +\infty[$. Comme chaque fonction θ_n est continue sur $[a, +\infty[$, il en est de même de θ. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$, on a montré que

$$\boxed{\theta \text{ est continue sur }]0, +\infty[.}$$

III.4/ Caractère C^1 de la fonction θ.

III.4.1/ Soit $x > 0$. φ_x est dérivable sur $[2, +\infty[$ et pour $t \geq 2$,

$$\varphi_x'(t) = \frac{1}{t} \times \frac{1}{t^x} + \ln(t) \times \frac{-x}{t^{x+1}} = \frac{1 - x\ln t}{t^{x+1}}.$$

III.4.1.1/ **1er cas.** Supposons $x \geq \dfrac{1}{\ln 2}$. Pour $t > 2$, on a $x\ln(t) > \dfrac{1}{\ln 2} \times \ln 2 = 1$ et donc $\varphi_x'(t) < 0$. Dans ce cas, φ_x est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.

$$\boxed{\forall x \geq \frac{1}{\ln 2},\ \varphi_x \text{ est strictement décroissante sur } [2, +\infty[.}$$

III.4.1.2/ **2ème cas.** Supposons $0 < x < \dfrac{1}{\ln 2}$. Pour $t \geq 2$, on a

$$\varphi_x'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 - x\ln t > 0 \Leftrightarrow t < e^{1/x}.$$

De plus, $x < \dfrac{1}{\ln 2} \Rightarrow e^{1/x} > 2$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{1}{\ln 2}\right[,\ \varphi_x \text{ est strictement croissante sur } [2, e^{1/x}] \text{ et strictement décroissante sur } [e^{1/x}, +\infty[.}$$

III.4.2/ On reprend les notations de la question III.3.2/.

III.4.2.1/ • La série de fonctions de termes général θ_n, $n \geq 1$, converge simplement vers la fonction θ sur $\left[\dfrac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$.

• Chaque θ_n est de classe C^1 sur $\left[\dfrac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$. De plus, pour $x \geq \dfrac{1}{\ln 2}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n'(x) = \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n^x} = (-1)^n \varphi_x(n)$.

• Montrons que la série de fonctions de terme général θ_n' converge uniformément vers sa somme sur $\left[\dfrac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$.

Soit $x \geq \dfrac{1}{\ln 2}$. D'après la question III.4.1.1/, la fonction φ_x est décroissante sur $[2, +\infty[$. On en déduit que la suite $(\varphi_x(n))_{n\geq 2}$ est décroissante. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_x(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^x} = 0$ d'après les théorèmes de croissances comparées. Mais alors, la série numérique de terme général $\theta_n'(x) = (-1)^n\varphi_x(n)$, $n \geq 2$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.
Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq \dfrac{1}{\ln 2}$,

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k^x} - \sum_{k=1}^{n} \theta_k'(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k^x}\right| \leq \left|(-1)^{n+1}\varphi_x(n+1)\right| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{1/\ln 2}},$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k^x} - \sum_{k=1}^{n} \theta_k'(x)\right|,\ x \geq \frac{1}{\ln 2}\right\} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{1/\ln 2}}.$$

Comme $\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^{1/\ln 2}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées, on en déduit que la série de fonctions de terme général θ_n' converge uniformément vers sa somme sur $\left[\dfrac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$.

En résumé, la série de fonctions de terme général θ_n converge simplement vers la fonction θ sur $\left[\dfrac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$, chaque fonction θ_n est de classe C^1 sur $\left[\dfrac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$ et la série de fonctions de terme général θ_n' converge uniformément vers sa somme sur $\left[\dfrac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$. D'après le théorème de dérivation terme à terme

$$\boxed{\theta \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[\text{ et } \forall x \in \left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[,\ \theta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}.}$$

III.4.2.2/ Soit $a \in \left]0, \dfrac{1}{\ln 2}\right]$.
Soit $x \geq a$. La fonction φ_x est décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$ et en particulier sur $[e^{1/a}, +\infty[$. On en déduit que la suite $(\varphi_x(n))_{n\geq 2}$ est décroissante à partir du rang $n_0 = E\left(e^{1/a}\right) + 1$. Le travail de la question précédent s'applique alors à la fonction $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \theta_n$ qui est ainsi de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, la dérivée étant obtenue par dérivation terme à terme. D'autre part, la fonction $\displaystyle\sum_{n=1}^{n_0} \theta_n$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et finalement la fonction $\theta = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$.
Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on a montré que

$$\boxed{\theta \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ \theta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}.}$$

III.4.3/

III.4.3.1/ $\theta'(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \varphi_2(n)$. Puisque $2 \geq \frac{1}{\ln 2} = 1,4\ldots$, la suite $(\varphi_2(n))_{n\geq 2}$ est décroissante d'après III.4.1.1/. On sait alors que la somme de la série alternée de terme général $(-1)^n \varphi_2(n)$ est du signe de son premier terme $\varphi_2(2) = \frac{\ln 2}{2^2}$ et donc

$$\boxed{\theta'(2) \geq 0.}$$

III.4.3.2/ La fonction φ_1 est décroissante sur $[e^1, +\infty[$ et donc la suite $(\varphi_1(n))_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang 3. Donc $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ est du signe de $-\frac{\ln 5}{5}$ et donc $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} \leq 0$. D'autre part, $-\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} = -\frac{\ln 3}{3} \leq 0$. Finalement, $\theta'(1) = -\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} \leq 0$.

$$\boxed{\theta'(1) \leq 0.}$$

