
MATHEMATIQUES 2

PARTIE I : EXEMPLES**I.A****I.A.1 Réduction de l'endomorphisme s**

I.A.1.1 Puisque la matrice de s dans la base \mathcal{B} est symétrique et que la base \mathcal{B} est orthonormée, l'endomorphisme s est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E . D'après le théorème spectral, s est un endomorphisme diagonalisable de E .

$$S^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$

I.A.1.2 Ainsi, on a ${}^tSS = S^2 = I_4$ et donc la matrice S est une matrice orthogonale. Puisque la base \mathcal{B} est orthonormale, on en déduit que s est un automorphisme orthogonal de E .

On sait alors que les valeurs propres de s appartiennent à $\{-1, 1\}$. En effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de s et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. On a

$$\|x\| = \|s(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|,$$

et puisque $\|x\| \neq 0$, on en déduit que $|\lambda| = 1$ et donc que $\lambda \in \{-1, 1\}$. Maintenant, on sait que s est diagonalisable. En particulier, s admet au moins une valeur propre. De plus, si 1 était l'unique valeur propre de s , on en déduirait que $s = \text{Id}_E$ (car s coïnciderait avec Id_E sur une base de E) ce qui n'est pas. De même, -1 ne peut être l'unique valeur propre de s car sinon $s = -\text{Id}_E$. Finalement, les valeurs propres de s sont -1 et 1 .

I.A.1.3 Notons α et β les ordres de multiplicité respectifs des valeurs propres 1 et -1 . Puisque s est diagonalisable, on sait que $\dim(E_1) = \alpha$, $\dim(E_{-1}) = \beta$ et $\alpha + \beta = 4$. Maintenant, on sait que la trace de s est la somme des valeurs propres de s comptées chacune un nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité. Or, $\text{Tr}(s) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$. Ainsi, $\alpha + \beta = 4$ et $1 \times \alpha + (-1) \times \beta = 0$. On en déduit que $\alpha = \beta = 2$.

$$\dim(E_1) = 2 \text{ et } \dim(E_{-1}) = 2.$$

I.A.2

I.A.2.1 $s(u_1) = \frac{1}{3}(3e_1 + 3e_3 + 3e_4) = e_1 + e_3 + e_4 = u_1$ et $s(u_2) = \frac{1}{3}(3e_1 + 3e_2 + 6e_4) = e_1 + e_2 + 2e_4 = u_2$. Par suite, u_1 et u_2 sont deux vecteurs de E_1 . Puisque u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, la famille (u_1, u_2) est une famille libre de E_1 et puisque $\dim(E_1) = 2$, (u_1, u_2) est une base de E_1 .

L'orthonormalisée de SCHMIDT de cette base est alors une base orthonormale de E_1 .

• On prend déjà $e'_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4)$.

• Ensuite,

$$u_2 - (u_2|e'_1)e'_1 = (e_1 + e_2 + 2e_4) - \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4) = e_2 - e_3 + e_4,$$

et on prend $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 - e_3 + e_4)$.

Une base orthonormale de E_1 est (e'_1, e'_2) où $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_4)$ et $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 - e_3 + e_4)$.

I.A.2.2 Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ puis $u_4 = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$.

$$u_4 \in (u_1, u_2, u_3)^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} a + c + d = 0 \\ a + b + 2d = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -a - c \\ -a + b - 2c = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - b \\ d = -a - c \\ -a + b - 2(a - b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 0 \\ d = -a \end{cases}$$

Un vecteur non nul orthogonal à u_1, u_2 et u_3 est $u_4 = e_1 + e_2 - e_4$.

Maintenant, $s(u_3) = \frac{1}{3}(e_1 - e_2 - e_3) = -u_3$ et $u_3 \in E_{-1}$. Ensuite, puisque s est un endomorphisme symétrique de E , on sait que $E_{-1} = E_1^\perp$ et donc $u_4 \in E_1^\perp = E_{-1}$. Finalement, (u_3, u_4) est une famille orthogonale de deux vecteurs non nuls de E_{-1} et donc une base orthogonale de E_{-1} car $\dim(E_{-1}) = 2$.

(u_3, u_4) est une base orthogonale de E_{-1} .

I.A.3

I.A.3.1 Soit $x \in E$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $s(y) = y$ et $s(z) = -z$. Dons, $s^k(x) = s^k(y) + s^k(z) = y + (-1)^k z$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (y + (-1)^k z) = y + \frac{1}{n} \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} z = y + \frac{1 - (-1)^n}{2n} z.$$

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n(x) = y + \frac{1 - (-1)^n}{2n} z.$$

I.A.3.2 Quand n tend vers $+\infty$, $S_n(x)$ tend vers y . Maintenant, on sait que $y = \frac{1}{2}(x + s(x))$ (car $x + s(x) = y + z + y - z$) et donc

$$\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{2}(x + s(x)).$$

I.B

I.B.1 Une propriété concernant les normes.

I.B.1.1 Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ puis $u = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$.

On a $\ell(u) = \frac{1}{4}((3a + c)e_1 + (3b + d)e_2 + (a + 3c)e_3 + (b + 4d)e_4)$ et donc

$$\begin{aligned} \|u\|^2 - \|\ell(u)\|^2 &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - \frac{1}{16}((3a + c)^2 + (3b + d)^2 + (a + 3c)^2 + (b + 4d)^2) \\ &= \frac{1}{16}(6a^2 + 6b^2 + 6c^2 + 6d^2 - 12ac - 12bd) = \frac{3}{8}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd) \\ &= \frac{3}{8}((a - c)^2 + (b - d)^2). \end{aligned}$$

$$\forall u = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4, \|u\|^2 - \|\ell(u)\|^2 = \frac{3}{8}((a - c)^2 + (b - d)^2),$$

et en particulier,

$$\forall u \in E, \|\ell(u)\| \leq \|u\|.$$

I.B.1.2 De plus, $\|\ell(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\| \Leftrightarrow \frac{3}{8}((a-c)^2 + (b-d)^2) = 0 \Leftrightarrow a = c \text{ et } b = d$.

$$\{\mathbf{u} \in E / \|\ell(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|\} = \text{Vect}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4).$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell) - I_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \text{ Les deux premières colonnes de cette matrice ne sont pas colinéaires et les}$$

deux dernières sont les opposées des deux premières. Donc, $\text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell) - I_4) = 2 < 4$. On en déduit déjà que 1 est valeur propre de ℓ . De plus, $\dim(\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E)) = 4 - \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell) - I_4) = 2$.

$$1 \text{ est valeur propre de } \ell \text{ et } \dim(\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E)) = 2.$$

Remarque. Comme $\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E)$ est sous-espace contenu dans $\{\mathbf{u} \in E / \|\ell(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|\} = \text{Vect}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4)$ qui est aussi un sous-espace de dimension 2, on a $\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E) = \{\mathbf{u} \in E / \|\ell(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|\} = \text{Vect}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4)$

I.B.2 Réduction de l'endomorphisme ℓ .

I.B.2.1 Après avoir échanger les colonnes 2 et 3 puis les lignes 2 et 3, un calcul par blocs fournit

$$\begin{aligned} \chi_\ell &= \begin{vmatrix} \frac{3}{4} - X & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} - X & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} - X & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} - X & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} - X & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} - X & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} - X & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - X \end{vmatrix} \\ &= \left(\left(\frac{3}{4} - X \right)^2 - \frac{1}{16} \right)^2 = (X-1)^2 \left(X - \frac{1}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\chi_\ell = (X-1)^2 \left(X - \frac{1}{2} \right)^2.$$

$$\text{I.B.2.2} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell) - \frac{1}{2}I_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \text{ Les deux premières colonnes de cette matrice ne sont pas colinéaires et}$$

les deux dernières sont égales aux deux premières. Donc, $\text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell) - \frac{1}{2}I_4\right) = 2 < 4$. On en déduit déjà que 1/2 est valeur propre de ℓ . De plus, $\dim(\text{Ker}(\ell - \frac{1}{2}\text{Id}_E)) = 4 - \text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell) - \frac{1}{2}I_4\right) = 2$.

En résumé, χ_ℓ est scindé sur \mathbb{R} et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de ℓ est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant. On sait alors que ℓ est diagonalisable et donc E est somme directe des sous-espaces propres de ℓ ou encore

$$G_1 \text{ et } G_{1/2} \text{ sont supplémentaires dans } E.$$

I.B.3

I.B.3.1 Soient $x \in E$ puis $k \in \mathbb{N}$. $\ell^k(x) = \ell^k(y) + \ell^k(z) = y + \frac{1}{2^k}z$.

I.B.3.2 Soient $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$L_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(y + \frac{1}{2^k}z \right) = y + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) z.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $L_n(x)$ tend vers y . De plus, les égalités $y + z = x$ et $y + \frac{1}{2}z = \ell(x)$ fournissent $y = 2\ell(x) - x$.
Finalement

$$\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(x) = 2\ell(x) - x.$$

I.C

I.C.1

$${}^tT = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

et donc

$$T \in O_4(\mathbb{R}).$$

I.C.2

I.C.2.1 D'une part, $t(e_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}(e_3 + e_4) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_1$ et d'autre part

$$t(\varepsilon_1) = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_3) + \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_4) = \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_1.$$

Les vecteurs e_1 et ε_1 sont unitaires et orthogonaux. Donc, la famille (e_1, ε_1) est orthonormée. En particulier, cette famille est libre. On en déduit que F_1 est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

$$t(F_1) = \text{Vect}(t(e_1), t(\varepsilon_1)) = \text{Vect} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_1, \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_1 \right) \subset \text{Vect}(e_1, \varepsilon_1) \text{ et donc } F_1 \text{ est stable par } t.$$

F_1 est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et stable par t et (e_1, ε_1) est une base orthonormée de F_1 .

I.C.2.2 La matrice de t dans une certaine base orthonormée est une matrice orthogonale. On en déduit que t est un automorphisme orthogonal de E .

D'après ce qui précède, la restriction de t à F_1 est un endomorphisme de F_1 et donc un automorphisme orthogonal de F_1 . On a en particulier $t(F_1) = F_1$.

Soit $y \in F_2 = F_1^\perp$. Montrons que $t(y) \in F_2$. Pour tout x de F_1 , on a

$$(t(y)|t(x)) = (y|x) = 0.$$

Donc, $y \in (t(F_1))^\perp = F_1^\perp = F_2$. Ainsi, F_2 est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 ($\dim(F_2) = \dim(E) - \dim(F_1) = 4 - 2 = 2$) et stable par t .

e_2 et ε_2 sont orthogonaux à e_1 et ε_1 . Donc e_2 et ε_2 sont dans $(e_1, \varepsilon_1)^\perp = (\text{Vect}(e_1, \varepsilon_1))^\perp = F_1^\perp = F_2$. De plus, la famille (e_2, ε_2) est une famille orthonormée et donc une base orthonormée de F_2 . Finalement,

F_2 est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et stable par t et (e_2, ε_2) est une base orthonormée de F_2 .

I.C.3

I.C.3.1 $\mathcal{B}' = (e_1, \varepsilon_1, e_2, \varepsilon_2)$ est une base orthonormée de E et t est un automorphisme orthogonal. Par suite, T' est une matrice orthogonale.

On a déjà $t(e_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_1$ et $t(\varepsilon_1) = \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_1$. D'autre part,

$$t(e_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(e_3 - e_4) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_2,$$

et d'autre part

$$t(\varepsilon_2) = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_3) - \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_4) = -\sqrt{\frac{2}{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_2.$$

On en déduit que

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

I.C.3.2 $T' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$

La matrice de $t_{/F_1}$ dans la base (e_1, ε_1) est $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$ et donc $t_{/F_1}$ est la rotation d'angle $-\theta$. De même, $t_{/F_2}$ est la rotation d'angle θ .

I.C.3.3 On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(t^k) = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ 0 & 0 & \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}.$$

I.C.4 Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $\omega \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\zeta_n(\omega) = n$. Dans ce cas, la suite $(\zeta_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée.

• Si $\omega \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{i\omega} \neq 1$ et

$$\zeta_n(\omega) = \frac{1 - e^{in\omega}}{1 - e^{i\omega}} = \frac{e^{in\omega/2}}{e^{i\omega/2}} \times \frac{e^{-in\omega/2} - e^{in\omega/2}}{e^{-i\omega/2} - e^{i\omega/2}} = e^{i(n-1)\omega/2} \frac{\sin(n\omega/2)}{\sin(\omega/2)}.$$

En particulier, $|\zeta_n(\omega)| = \frac{|\sin(n\omega/2)|}{|\sin(\omega/2)|} \leq \frac{1}{|\sin(\omega/2)|}$.

La suite $(\zeta_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée si et seulement si $\omega \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

I.C.5

I.C.5.1 $t_{/F_1}$ est un endomorphisme de F_1 et donc, puisque $(\mathcal{L}(F_1), +, \cdot, \circ)$ est une \mathbb{R} -algèbre, T_{n/F_1} est un endomorphisme de F_1 .

I.C.5.2

I.C.5.2.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\begin{pmatrix} \gamma_k \\ \delta_k \end{pmatrix} = \text{Mat}_{(e_1, \varepsilon_1)}(t_{/F_1}^k) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_n \\ \mu_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \\ \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta) & \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\theta) \\ -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\theta) & \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\text{Re}(\zeta_n(\theta))}{n} & \frac{\text{Im}(\zeta_n(\theta))}{n} \\ -\frac{\text{Im}(\zeta_n(\theta))}{n} & \frac{\text{Re}(\zeta_n(\theta))}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} \frac{\text{Re}(\zeta_n(\theta))}{n} & \frac{\text{Im}(\zeta_n(\theta))}{n} \\ -\frac{\text{Im}(\zeta_n(\theta))}{n} & \frac{\text{Re}(\zeta_n(\theta))}{n} \end{pmatrix}.$$

I.C.5.2.2 θ n'est pas dans $2\pi\mathbb{Z}$ et donc la suite $(\zeta_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée. Il en est de même des suites $(\text{Re}(\zeta_n(\theta)))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\text{Im}(\zeta_n(\theta)))_{n \in \mathbb{N}^*}$. Mais alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Re}(\zeta_n(\theta))}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Im}(\zeta_n(\theta))}{n} = 0$ puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\mathbf{y}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\alpha \frac{\text{Re}(\zeta_n(\theta))}{n} + \beta \frac{\text{Im}(\zeta_n(\theta))}{n} \right) e_1 + \left(-\alpha \frac{\text{Im}(\zeta_n(\theta))}{n} + \beta \frac{\text{Re}(\zeta_n(\theta))}{n} \right) \varepsilon_1 = 0.$$

$$\forall \mathbf{y} \in F_1, \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\mathbf{y}) = 0.$$

I.C.5.3 De même, en remplaçant θ par $-\theta$, $\forall z \in F_2, \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(z) = 0$ et donc pour tout $x \in E$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\mathbf{y}) + \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(z) = 0.$$

$$\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = 0.$$

PARTIE II

II.A

II.A.1 Soient $y \in \text{Ker}(\ell - \text{Id}_E)$ et $z \in E$. On a $\ell(y) = y$ et donc $\ell^*(y) = \ell^{-1}(y) = y$. Par suite,

$$(y | (\ell - \text{Id}_E)(z)) = ((\ell - \text{Id}_E)^*(y) | z) = (y - y | z) = 0.$$

Ainsi, $\forall (y, z) \in \text{Ker}(\ell - \text{Id}_E) \times E$, $(y | (\ell - \text{Id}_E)(z)) = 0$ ce qui montre que $\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E) \subset (\text{Im}(\ell - \text{Id}_E))^\perp$.
Mais de plus, le théorème du rang permet d'affirmer que

$$\dim(\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(\ell - \text{Id}_E)) = \dim(\text{Im}(\ell - \text{Id}_E)^\perp),$$

et finalement

$$\boxed{\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E) = (\text{Im}(\ell - \text{Id}_E))^\perp.}$$

En particulier, $\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(\ell - \text{Id}_E)$ sont supplémentaires.

II.A.2 Pour $k \in \mathbb{N}$, $\ell^k(x) = \ell^k(y) + \ell^{k+1}(z) - \ell^k(z) = y + \ell^{k+1}(z) - \ell^k(z)$ et donc pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (y + \ell^{k+1}(z) - \ell^k(z)) = y + \frac{1}{n}(\ell^n(z) - z).$$

$$\boxed{\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*, L_n(x) = y + \frac{1}{n}(\ell^n(z) - z).}$$

II.A.3 $\ell \in O(E)$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ell^n \in O(E)$. Par suite,

$$\left\| \frac{1}{n}(\ell^n(y) - y) \right\| \leq \frac{\|\ell^n(y)\| + \|y\|}{n} = \frac{\|y\| + \|y\|}{n} = \frac{2\|y\|}{n}.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}(\ell^n(y) - y) = 0$ et donc que

$$\boxed{\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(x) = y.}$$

Remarque. Ceci confirme le résultat de I.C.5.3 car $\text{Ker}(t - \text{Id}_E) = \{0\}$ et donc $\forall x \in E$, $y = 0$.

II.B

II.B.1 Soit $x \in E$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et puisque $f \in B(E)$, on a

$$\|f^*(x)\|^2 = (f^*(x) | f^*(x)) = (x | f(f^*(x))) \leq \|x\| \times \|f(f^*(x))\| \leq \|x\| \times \|f^*(x)\|.$$

Ainsi, pour tout x de E , on a $\|f^*(x)\|^2 \leq \|x\| \times \|f^*(x)\|$ (I). Maintenant, si $f^*(x) = 0$, on a $\|f^*(x)\| \leq \|x\|$ et si $f^*(x) \neq 0$, on a $\|f^*(x)\| > 0$ et après simplification par $\|f^*(x)\|$, l'inégalité (I) fournit encore $\|f^*(x)\| \leq \|x\|$. Ainsi, $\forall x \in E$, $\|f^*(x)\| \leq \|x\|$ et donc

$$\boxed{f^* \in B(E).}$$

II.B.2 Soit $x \in E$ tel que $f(x) = x$. On a

$$\begin{aligned} \|f^*(x) - x\|^2 &= \|f^*(x)\|^2 - 2(f^*(x) | x) + \|x\|^2 = \|f^*(x)\|^2 - 2(x | f(x)) + \|x\|^2 = \|f^*(x)\|^2 - 2(x | x) + \|x\|^2 \\ &= \|f^*(x)\|^2 - \|x\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

On en déduit encore que $f^*(x) - x = 0$ et donc que $f^*(x) = x$. On a montré que $\forall x \in E$, $f(x) = x \Rightarrow f^*(x) = x$ et donc que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f^* - \text{Id}_E)$. Maintenant, puisque $f^* \in B(E)$, on a aussi $\text{Ker}(f^* - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}((f^*)^* - \text{Id}_E) = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et finalement

$$\boxed{\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Ker}(f^* - \text{Id}_E).}$$

II.B.3 Redémontrons que si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Ker}(\varphi^*) = (\text{Im}(\varphi))^\perp$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in (\text{Im}(\varphi))^\perp &\Leftrightarrow \forall y \in E, (x|\varphi(y)) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, (\varphi^*(x)|y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi^*(x) \in E^\perp \Leftrightarrow \varphi^*(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Ker}(\varphi^*). \end{aligned}$$

On a donc $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Ker}(f^* - \text{Id}_E) = \text{Ker}((f - \text{Id}_E)^*) = (\text{Im}(f - \text{Id}_E))^\perp$.

$$\boxed{\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = (\text{Im}(f - \text{Id}_E))^\perp.}$$

En particulier, $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E .

II.C

II.C.1 Puisque $x \in \text{Ker}(\ell - \text{Id}_E)$, on a $\ell(x) - x = 0$ et donc $\ell^2(y) - \ell(y) = \ell(y) - y$. En prenant l'image des deux membres de cette égalité par ℓ^k , $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\ell^{k+2}(y) - \ell^{k+1}(y) = \ell^{k+1}(y) - \ell^k(y)$ et donc la suite $(\ell^{k+1}(y) - \ell^k(y))_{k \in \mathbb{N}}$ est constante.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\ell^n(y) = y + \sum_{k=0}^{n-1} (\ell^{k+1}(y) - \ell^k(y)) = y + n(\ell(y) - y) = y + nx.$$

Mais alors pour tout entier naturel non nul n , $x = \frac{1}{n}(\ell^n(y) - y)$. En particulier, puisque $\ell \in B(E)$, on a

$$\|x\| = \frac{1}{n} \|\ell^n(y) - y\| \leq \frac{\|\ell^n(y)\| + \|y\|}{n} \leq \frac{2\|y\|}{n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\|x\| = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(\ell - \text{Id}_E) = \{0\}$ et le théorème du rang montre que

$$\boxed{E = \text{Ker}(\ell - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(\ell - \text{Id}_E).}$$

II.C.2 Le travail effectué en II.A s'applique alors intégralement. Tout vecteur x de E peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = y + \ell(z) - z$ avec $y \in \text{Ker}(\ell - \text{Id}_E)$ et $z \in E$. On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(x) = y$.

PARTIE III

III.1 $\sigma_e(e) = e - 2 \frac{(e|e)}{\|e\|^2} e = e - 2e = -e$ et si x est orthogonal à e , $\sigma_e(x) = x$. Ainsi, si \mathcal{B}' est une base orthonormée de E adaptée à la décomposition $E = \text{Vect}(e) \oplus (\text{Vect}(e))^\perp$, σ_e coïncide sur \mathcal{B}' avec la réflexion d'hyperplan $(e)^\perp$. On en déduit que

$$\boxed{\sigma_e \text{ est la réflexion d'hyperplan } (e)^\perp.}$$

En particulier, σ_e est un automorphisme orthogonal.

III.2

III.2.1 e est dans $\text{Im}(\ell - \text{Id}_E)$. Puisque $\ell \in O(E)$, la question II.A.1 permet d'affirmer que $\text{Im}(\ell - \text{Id}_E) = (\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E))^\perp = W^\perp$ et donc e est orthogonal à W .

III.2.2 Puisque $u \notin W$, on a $e \neq 0$. Ensuite, $\sigma_e(\ell(u) - u) = \sigma_e(e) = -e = -\ell(u) + u$. D'autre part, $(\ell(u) - u|\ell(u) + u) = \|\ell(u)\|^2 - \|u\|^2 = 0$ car $\ell \in O(E)$ et d'après la question III.1, $\sigma_e(\ell(u) + u) = \ell(u) + u$. On a donc $\sigma_e(\ell(u)) - \sigma_e(u) = -\ell(u) + u$ et $\sigma_e(\ell(u)) + \sigma_e(u) = \ell(u) + u$. En additionnant et en retranchant ces deux égalités membre à membre, on obtient

$$\boxed{\sigma_e(\ell(u)) = u \text{ (et } \sigma_e(u) = \ell(u)).}$$

III.2.3 • Montrons que $\text{Vect}(\mathbf{u}, W) \subset \text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)$.

Soit $x \in W$. $(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)(x) = \sigma_e(\ell(x)) - x = \sigma_e(x) - x = 0$ d'après la question III.1 car $x \in (\text{Vect}(e))^\perp$ d'après la question III.2.1.

Ensuite, $(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)(\mathbf{u}) = \sigma_e(\ell(\mathbf{u})) - \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u} = 0$. Finalement, \mathbf{u} et tout vecteur de W sont dans $\text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)$ et donc $\text{Vect}(\mathbf{u}, W) \subset \text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)$.

• Montrons que $\text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E) \subset \text{Vect}(\mathbf{u}, W)$.

Soit $x \in \text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)$. On a donc $\sigma_e(\ell(x)) = x$ puis $\ell(x) = \sigma_e^{-1}(x) = \sigma_e(x)$. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x - \lambda\mathbf{u} \in W$. Or,

$$x - \lambda\mathbf{u} \in W \Leftrightarrow \ell(x - \lambda\mathbf{u}) = x - \lambda\mathbf{u} \Leftrightarrow \ell(x) - x = \lambda(\ell(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) \Leftrightarrow \ell(x) - x = \lambda e.$$

Maintenant, $\sigma_e(\ell(x) - x) = \sigma_e(\ell(x)) - \sigma_e(x) = x - \ell(x) = -(\ell(x) - x)$. Ainsi, le vecteur $\ell(x) - x$ est changé en son opposé par σ_e et on en déduit que $\ell(x) - x \in \text{Vect}(e)$. On peut donc trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ell(x) - x = \lambda e$ et donc tel que $x - \lambda\mathbf{u} \in W$. En résumé, $\forall x \in \text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E), \exists \lambda \in \mathbb{R} / x - \lambda\mathbf{u} \in W$ ou encore $\forall x \in E, (x \in \text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E) \Rightarrow x \in \text{Vect}(\mathbf{u}, W))$ ce qui montre que $\text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E) \subset \text{Vect}(\mathbf{u}, W)$.

Finalement,

$$\text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E) = \text{Vect}(\mathbf{u}, W).$$

Ainsi, $\ell' = \sigma_e \circ \ell$ est un automorphisme orthogonal (car σ_e et ℓ le sont) tels que $\dim(\text{Ker}(\ell' - \text{Id}_E)) = 1 + \dim(\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E))$.

III.2.4 Soit ℓ est un automorphisme orthogonal distinct de Id_E . On a $W \neq E$ et donc $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

• Si $k = n-1$, d'après la question précédente, il existe $\mathbf{u} \notin W$ tel que $\text{Vect}(\mathbf{u}, W) = \text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)$. Dans ce cas, $\text{Vect}(\mathbf{u}, W)$ est de dimension n puisque $\mathbf{u} \notin W$ et donc $\text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E) = E$ puis $\sigma_e \circ \ell = \text{Id}_E$ et finalement $\ell = \sigma_e^{-1} = \sigma_e$. Ainsi, si $k = n-1$, ℓ est produit de $1 = n - (n-1) = n - k$ réflexions.

• Sinon $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ et par récurrence, on dispose de vecteurs $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-k}$ tels que $\mathbf{u}_1 \notin W$ et $\forall i \in \llbracket 2, n-k \rrbracket, \mathbf{u}_i \notin \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}, W)$ et $\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-k}, W) = \text{Ker}(\sigma_{e_{n-k}} \circ \dots \circ \sigma_{e_1} \circ \ell - \text{Id}_E)$ avec $\forall i \in \llbracket 1, n-k \rrbracket, e_i = \ell(\mathbf{u}_i) - \mathbf{u}_i$. On a alors $\dim(\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-k}, W)) = n - k + k = n$ et donc $\text{Ker}(\sigma_{e_{n-k}} \circ \dots \circ \sigma_{e_1} \circ \ell - \text{Id}_E) = E$. On en déduit que $\sigma_{e_{n-k}} \circ \dots \circ \sigma_{e_1} \circ \ell = \text{Id}_E$ puis que $\ell = \sigma_{e_1}^{-1} \circ \dots \circ \sigma_{e_{n-k}}^{-1} = \sigma_{e_1} \circ \dots \circ \sigma_{e_{n-k}}$. ℓ est encore une fois un produit de $n - k$ réflexions.

Avec la convention usuelle qu'un produit vide d'automorphismes est l'identité, le résultat reste vrai si $\ell = \text{Id}_E$ et on a montré que

tout automorphisme orthogonal ℓ tel que $\dim(\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E)) = k$ est la composée de $n - k$ réflexions.