
MATHEMATIQUES 2

Partie I

I.1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

I.1.1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(-zx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} x^n$ et $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n}$. Ces deux séries ont un rayon de convergence infini.

I.1.2. On sait que le produit de CAUCHY des deux séries entières ci-dessus a un rayon de convergence infini et que pour $(x, z) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned} F(x, z) &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!} x^k \right) \times \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{2^l l!} x^{2l} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k+2l=n} \frac{(-1)^k z^k}{k!} \times \frac{(-1)^l}{2^l l!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{n-2p} z^{n-2p}}{(n-2p)!} \times \frac{(-1)^p}{2^p p!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^p z^{n-2p}}{2^p p! (n-2p)!} \right) x^n. \end{aligned}$$

$$\forall (x, z) \in \mathbb{C}^2, F(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^n \text{ où } A_n(z) = (-1)^n \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^p z^{n-2p}}{2^p p! (n-2p)!}.$$

A_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n \times \frac{(-1)^0}{2^0 0! (n-0)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n unitaire.

Pour $z \in \mathbb{C}$, $H_0(z) = F(0, z) = 1$ puis $H_1(z) = \sum_{p=0}^0 \frac{(-1)^p z^{1-2p}}{2^p p! (1-2p)!} = z$.

$$\forall z \in \mathbb{C}, H_0(z) = 1 \text{ et } H_1(z) = z.$$

I.1.3. Soit $z \in \mathbb{C}$. La fonction $g : x \mapsto F(x, z)$ est dérivable sur \mathbb{R} et que pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -(z+x)F(x, z)$. Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^n \right) &= -(z+x)F(x, z) = -(x+z) \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^n = - \sum_{n=0}^{+\infty} z A_n(z) x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^{n+1} \\ &= -z A_0(z) - \sum_{n=0}^{+\infty} z A_{n+1}(z) x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^{n+1} \\ &= -z - \sum_{n=0}^{+\infty} (z A_{n+1}(z) + A_n(z)) x^{n+1}. \end{aligned}$$

Mais on a aussi

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n A_n(z) x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) A_{n+1}(z) x^n = A_1(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2) A_{n+2}(z) x^{n+1}.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$-z A_{n+1}(z) - A_n(z) = (n+2) A_{n+2}(z).$$

On multiplie les deux membres de cette égalité par $(-1)^n(n+1)!$. On obtient $(-1)^n(n+2)!A_{n+2}(z) = (-1)^{n+1}(n+1)!zA_{n+1}(z) - (-1)^n(n+1)!A_n(z)$ ou encore, en tenant compte de $(-1)^{n+2} = (-1)^n$ et $(n+1)! = (n+1) \times n!$, on obtient $H_{n+2}(z) = zH_{n+1}(z) - (n+1)H_n(z)$.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, H_{n+2}(z) = zH_{n+1}(z) - (n+1)H_n(z).$$

$H_2(z) = zH_1(z) - H_0(z) = z^2 - 1$, puis $H_3(z) = z(z^2 - 1) - 2z = z^3 - 3z$ et $H_4(z) = z(z^3 - 3z) - 3(z^2 - 1) = z^4 - 6z^2 + 3$.

$$\forall z \in \mathbb{C}, H_0(z) = 1, H_1(z) = z, H_2(z) = z^2 - 1, H_3(z) = z^3 - 3z \text{ et } H_4(z) = z^4 - 6z^2 + 3.$$

I.2.

I.2.1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2/2}$ puis $f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xf(x)$ et $f''(x) = -e^{-x^2/2} + x^2e^{-x^2/2} = (x^2 - 1)f(x)$. Donc pour tout réel x ,

$$f''(x) + xf'(x) + f(x) = ((x^2 - 1) - x^2 + 1)f(x) = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dérive n fois l'égalité précédente et avec la formule de LEIBNIZ, on obtient pour tout réel x , $f^{(n+2)}(x) + xf^{(n+1)}(x) + f^{(n)}(x) = 0$ ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) + xf^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x) = 0.$$

I.2.2. La fonction f ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Pour x réel donné, on divise les deux membres de l'égalité précédente par $f(x)$ et on multiplie par $(-1)^n = (-1)^{n+2} = -(-1)^{n+1}$. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, K_{n+2}(x) - xK_{n+1}(x) + (n+1)K_n(x) = 0.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $K_0(x) = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$ et $K_1(x) = -\frac{-xf(x)}{f(x)} = x$. Puisque \mathbb{R} est infini, on a donc $H_0 = K_0$ et $H_1 = K_1$. Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n = K_n$.

C'est vrai pour $n = 0$ et pour $n = 1$ et si pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $H_n = K_n$ et $H_{n+1} = K_{n+1}$ alors $H_{n+2} = xH_{n+1} - (n+1)H_n = xK_{n+1} - (n+1)K_n = K_{n+2}$. Le résultat est démontré par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_n = K_n.$$

I.3. I.3.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question I.2.2, pour tout réel x on a $H_{n+1}(x) = K_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{f(x)}f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}e^{x^2/2}f^{(n+1)}(x)$. En dérivant, on obtient pour tout réel x

$$H'_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}xe^{x^2/2}f^{(n+1)}(x) + (-1)^{n+1}e^{x^2/2}f^{(n+2)}(x) = xH_{n+1}(x) - H_{n+2}(x) = (n+1)H_n(x).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, H'_{n+1} = (n+1)H_n.$$

I.3.2. L'égalité est claire pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit $n \geq 2$. D'après la question précédente

$$H''_n - xH'_n + nH_n = n(n-1)H_{n-2} - xH_nH_{n-1} + nH_n = n(H_n - xH_{n-1} + (n-1)H_{n-2}) = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, H''_n - xH'_n + nH_n = 0.$$

I.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de LEIBNIZ fournit pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi''_n(x) &= (-1)^n H''_n(x) e^{-x^2/4} + 2(-1)^n H'_n(x) \left(-\frac{x}{2} e^{-x^2/4}\right) + (-1)^n H_n(x) \left(-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}\right) e^{-x^2/4} \\ &= (-1)^n \left(H''_n(x) - xH'_n(x) - \frac{1}{2}H_n(x) \right) e^{-x^2/4} + \frac{x^2}{4} \varphi_n(x) = (-1)^n \left(-nH_n(x) - \frac{1}{2}H_n(x) \right) e^{-x^2/4} + \frac{x^2}{4} \varphi_n(x) \\ &= -\frac{2n+1}{2} \varphi_n(x) + \frac{x^2}{4} \varphi_n(x), \end{aligned}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n''(x) - \frac{x^2}{4} \varphi_n(x) = -\frac{2n+1}{2} \varphi_n(x).$$

I.5.

I.5.1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. La fonction $H_p H_q f$ est continue sur \mathbb{R} . De plus, puisque H_p et H_q sont des polynômes, $H_p(x)H_q(x)f(x) = H_p(x)H_q(x)e^{-x^2/2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que la fonction $H_p H_q f$ est intégrable sur \mathbb{R} et donc que $I_{p,q}$ existe.

I.5.2. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On note que $H_{p+1}H_{q+1}f = (-1)^q H_{p+1}f^{(q+1)}$. Soient alors A et B deux réels tels que $A < B$. Les deux fonctions H_{p+1} et $f^{(q)}$ sont de classe C^1 sur le segment $[A, B]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_A^B H_{p+1}(x)H_{q+1}(x)f(x) dx &= (-1)^{q+1} \int_A^B H_{p+1}(x)f^{(q+1)}(x) dx = (-1)^{q+1} \left(\left[H_{p+1}(x)f^{(q)}(x) \right]_A^B - \int_A^B H'_{p+1}(x)f^{(q)}(x) dx \right) \\ &= \left[-H_{p+1}(x)H_q(x)f(x) \right]_A^B + \int_A^B H'_{p+1}(x)H_q(x)f(x) dx \\ &= -H_{p+1}(B)H_q(B)f(B) + H_{p+1}(A)H_q(A)f(A) + (p+1) \int_A^B H_p(x)H_q(x)f(x) dx. \end{aligned}$$

Quand A tend vers $+\infty$ et B tend vers $-\infty$, $-H_{p+1}(B)H_q(B)f(B) + H_{p+1}(A)H_q(A)f(A)$ d'après un théorème de croissances comparées. Quand A tend vers $+\infty$ et B tend vers $-\infty$, on obtient donc $\int_{-\infty}^{+\infty} H_{p+1}(x)H_{q+1}(x)f(x) dx = (p+1)$

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)H_q(x)f(x) dx \text{ puis}$$

$$I_{p+1,q+1} = (-1)^{(p+1)+(q+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{p+1}(x)H_{q+1}(x)f(x) dx = (p+1) \times (-1)^{p+q} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)H_q(x)f(x) dx = (p+1)I_{p,q}.$$

Par symétrie des rôles de p et q , on a aussi $I_{p+1,q+1} = (q+1)I_{p,q}$.

Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \neq q$. D'après ce qui précède, $(p+1)I_{p,q} = (q+1)I_{p,q}$ et donc $(p-q)I_{p,q} = 0$ puis $I_{p,q} = 0$ car $p-q \neq 0$.

D'autre part, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_{p+1,p+1} = (p+1)I_{p,p}$ et donc pour $p \in \mathbb{N}$, $I_{p,p} = p!I_{0,0} = \sqrt{2\pi} p!$.

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{p,q} = \delta_{p,q} \sqrt{2\pi} p!.$$

Partie II

II.1. Soit $\nu \in \mathbb{R}$. On note g_ν la fonction $t \mapsto \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)$. Puisque la fonction g_ν est continue sur \mathbb{R} et que $|g_\nu| = f$, la fonction g_ν est intégrable sur \mathbb{R} et donc $\widehat{f}(\nu)$ existe.

Soit $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de sorte que $\forall \nu \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu, t) dt$.

$$(\nu, t) \mapsto \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)$$

- Pour chaque $\nu \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto G(\nu, t)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} .
- Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto G(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} .
- Pour chaque $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $|G(x, t)| \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \varphi_0(t)$ où φ_0 est une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} et intégrable sur \mathbb{R} .

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, \widehat{f} est continue sur \mathbb{R} .

$$\widehat{f} \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}.$$

II.2. Avec les notations de la question précédente,

- Pour chaque $\nu \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto G(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} .
- La fonction G admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur \mathbb{R}^2 et

$$\forall (\nu, t) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial G}{\partial \nu}(\nu, t) = -2i\pi t \exp\left(-2i\pi \nu t - \frac{t^2}{2}\right).$$

De plus,

- pour chaque $\nu \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial G}{\partial \nu}(\nu, t)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} ,
- pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\nu \mapsto \frac{\partial G}{\partial \nu}(\nu, t)$ est continue sur \mathbb{R} ,
- pour chaque $(\nu, t) \in \mathbb{R}^2$, $\left| \frac{\partial G}{\partial \nu}(\nu, t) \right| = 2\pi|t| \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \varphi_1(t)$ où φ_1 est une fonction continue et intégrable sur \mathbb{R} car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ),

$$\widehat{f} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall \nu \in \mathbb{R}, \widehat{f}'(\nu) = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp\left(-2i\pi \nu t - \frac{t^2}{2}\right) dt.$$

II.3. II.3.1. Puisque deux des trois intégrales ci-dessous existent, la troisième existe et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} -t \exp\left(-2i\pi \nu t - \frac{t^2}{2}\right) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi \nu - t) \exp\left(-2i\pi \nu t - \frac{t^2}{2}\right) dt + 2i\pi \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2i\pi \nu t - \frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \left[\exp\left(-2i\pi \nu t - \frac{t^2}{2}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi \nu \widehat{f}(\nu) = 2i\pi \nu \widehat{f}(\nu) \end{aligned}$$

car $\left| \exp\left(-2i\pi \nu t - \frac{t^2}{2}\right) \right| = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ et donc $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp\left(-2i\pi \nu t - \frac{t^2}{2}\right) = 0$.

Par suite, pour $\nu \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}'(\nu) = 2i\pi \times 2i\pi \nu \widehat{f}(\nu) = -4\pi^2 \nu \widehat{f}(\nu)$.

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \widehat{f}'(\nu) = -4\pi^2 \nu \widehat{f}(\nu).$$

II.3.2. $\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \sqrt{2\pi}$ puis

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathbb{R}, \widehat{f}'(\nu) + 4\pi^2 \nu \widehat{f}(\nu) &= 0 \Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{R}, e^{2\pi^2 \nu^2} \widehat{f}'(\nu) + 4\pi^2 \nu e^{2\pi^2 \nu^2} \widehat{f}(\nu) = 0 \\ &\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{R}, \left(e^{2\pi^2 \nu^2} \widehat{f} \right)'(\nu) = 0 \Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{R}, e^{2\pi^2 \nu^2} \widehat{f}(\nu) = e^0 \widehat{f}(0) \\ &\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\nu) = \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 \nu^2}. \end{aligned}$$

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\nu) = \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 \nu^2}.$$

Partie III

III.1.

III.1.1. On note tout d'abord que f est décroissante sur \mathbb{R}^+ et croissante sur \mathbb{R}^- .

Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \frac{A}{2\pi}$. Soit $x \in [-A, A]$. Alors $x + 2n\pi \geq -A + 2\pi \frac{A}{2\pi} = 0$. Ainsi, la fonction $x \mapsto f(x + 2n\pi)$ est croissante sur $[-A, A]$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ et f est décroissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction $x \mapsto f(x + 2n\pi)$ est décroissante sur $[-A, A]$.

De même, $x - 2n\pi \leq A - 2\pi \frac{A}{2\pi} = 0$. Ainsi, la fonction $x \mapsto f(x - 2n\pi)$ est croissante sur $[-A, A]$ à valeurs dans $] -\infty, 0]$ et f est croissante sur $] -\infty, 0]$. On en déduit que la fonction $x \mapsto f(x - 2n\pi)$ est croissante sur $[-A, A]$.

III.1.2. On en déduit que pour $x \in [-A, A]$,

$$0 \leq f(x - 2n\pi) + f(x + 2n\pi) \leq f(A - 2n\pi) + f(-A + 2n\pi) = 2 \exp\left(-\frac{(2n\pi - A)^2}{2}\right).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons alors $\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [-A, A]} |u_n(x)|$. Puisque chaque u_n est une fonction continue sur le segment $[-A, A]$, chaque $\|u_n\|_\infty$ existe dans \mathbb{R} . De plus, d'après la question précédente, pour n grand on a $\|u_n\|_\infty \leq 2 \exp\left(-\frac{(2n\pi - A)^2}{2}\right)$ et en particulier $\|u_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, la série numérique de terme général $\|u_n\|_\infty$ converge ou encore

la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $[-A, A]$.

III.2. III.2.1. En particulier, pour tout $A > 0$, la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $[-A, A]$ et donc la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur \mathbb{R} .

III.2.2. Soit $A > 0$. Chaque u_n est continue sur $[-A, A]$ et la série de fonctions de terme général u_n converge normalement et donc uniformément vers U sur $[-A, A]$.

Par suite, pour tout $A > 0$, la fonction U est continue sur $[-A, A]$ et donc

la fonction U est continue sur \mathbb{R} .

III.2.3. La fonction f est paire et donc la fonction u_0 est paire. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n(-x) = f(-x - 2n\pi) + f(-x + 2n\pi) = f(x + 2n\pi) + f(x - 2n\pi) = u_n(x).$$

Ainsi, chaque fonction u_n est paire. On en déduit que chaque fonction U_n est paire en tant que somme de fonctions paires. Soit alors $x \in \mathbb{R}$.

$$U(-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x) = U(x).$$

On a montré que

la fonction U est paire.

III.2.4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$U_n(x + 2\pi) = \sum_{k=-n}^n f(x + 2\pi - 2k\pi) = \sum_{k=-n}^n f(x - 2(k-1)\pi) = \sum_{k=-(n+1)}^{n-1} f(x - 2k\pi) = U_n(x) + f(x + 2(n+1)\pi) - f(x - 2n\pi).$$

Quand n tend vers $+\infty$, x étant fixé, $f(x + 2(n+1)\pi)$ et $f(x - 2n\pi)$ tendent vers 0. Par suite, quand n tend vers $+\infty$ à x fixé dans l'égalité précédente, on obtient $U(x + 2\pi) = U(x)$. On a montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $U(x + 2\pi) = U(x)$ et donc que

la fonction U est 2π -périodique.

III.3. III.3.1. La fonction U est 2π -périodique et de classe C^1 sur \mathbb{R} . D'après le théorème de DIRICHLET, on sait que la série de FOURIER de U converge vers U sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(x) = \frac{a_0(U)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(U) \cos(nx).$$

III.3.2. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos(nx) \, dx &= \sum_{l=-k}^k \int_{-\pi}^{\pi} f(x - 2l\pi) \cos(nx) \, dx = \sum_{l=-k}^k \int_{-\pi-2l\pi}^{\pi-2l\pi} f(t) \cos(n(t + 2k\pi)) \, dt \\ &= \sum_{l=-k}^k \int_{-(2l+1)\pi}^{-(2l-1)\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = \int_{-(2k+1)\pi}^{2k+1\pi} f(t) \cos(nt) \, dt. \end{aligned}$$

III.3.3. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$.

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos(nx) \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos(nx) \, dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |U(x) - U_k(x)| \times |\cos(nx)| \, dx \leq 2\pi \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |U(x) - U_k(x)|.$$

Puisque la suite de fonctions de terme général U_n converge uniformément vers U sur $[-\pi, \pi]$ d'après la question III.1.2, cette dernière expression tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ à n fixé. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos(nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos(nx) \, dx.$$

Comme d'autre part, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos(nx) \, dx = \int_{-(2k+1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(x) \cos(nx) \, dx$, on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(nx) \, dx$ est une intégrale convergente et que

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos(nx) \, dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos(nx) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(nx) \, dx.$$

III.3.4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_n(U) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{inx} \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(inx - \frac{x^2}{2} \right) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-2i\pi \left(-\frac{n}{2\pi} \right) x - \frac{x^2}{2} \right) \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\hat{f} \left(-\frac{n}{2\pi} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \times \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 \left(-n/2\pi \right)^2} \text{ (d'après la question II.3.2)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-n^2/2} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(U) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-n^2/2}.$$

On en déduit encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{(x - 2n\pi)^2}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2/2} \cos(nx).$$