
MATHEMATIQUES 1

Partie I : Étude de la fonction φ **I.1/ Étude des fonctions d et δ**

I.1.1/ La fonction d est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $t \in [0, +\infty[$, $d'(t) = 1 - \sin t$. La fonction d' est positive sur $[0, +\infty[$ et donc la fonction d est croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que pour $t > 0$, $d(t) \geq d(0) = 0$ puis que $1 - \cos t \leq t$ et enfin que $\frac{1 - \cos t}{t} \leq 1$. D'autre part, pour $t > 0$, on a $\frac{1 - \cos t}{t} \geq 0$ et finalement

$$\forall t > 0, 0 \leq \frac{1 - \cos t}{t} \leq 1.$$

I.1.2/ La fonction δ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $t \in [0, +\infty[$, $\delta'(t) = t - \sin t$. Il est connu que pour $t \geq 0$, $\sin t \leq t$. On en déduit que la fonction δ' est positive sur $[0, +\infty[$ puis que la fonction δ est croissante sur $[0, +\infty[$. Par suite, pour $t > 0$, $\delta(t) \geq \delta(0) = 0$ et donc $\frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{1}{2}$. D'autre part, pour $t > 0$, on a $\frac{1 - \cos t}{t^2} \geq 0$ et finalement

$$\forall t > 0, 0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{1}{2}.$$

I.2/ Existence de la fonction φ sur $[0, +\infty[$

La fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 (par $\frac{1}{2}$) et dominée en $+\infty$ par la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Soit alors $x \in [0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, pour $t > 0$, $0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} \leq \frac{1 - \cos t}{t^2}$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, il en est de même de la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt}$. Finalement

Pour tout réel positif x , $\varphi(x)$ existe.

I.3/ Limite de la fonction φ en $+\infty[$

I.3.1/ Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $0 \leq x_1 \leq x_2$.

Pour tout réel $t > 0$, $e^{-x_1 t} \geq e^{-x_2 t}$ et donc $\frac{1 - \cos t}{t^2} (e^{-x_1 t} - e^{-x_2 t}) \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\varphi(x_1) - \varphi(x_2) \geq 0$. On a montré que

la fonction φ est décroissante sur $[0, +\infty[$.

D'autre part, la fonction φ est positive sur $[0, +\infty[$. Ainsi, la fonction φ est décroissante et minorée par 0 sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction φ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ et que cette limite est positive.

I.3.2/ Soit $x > 0$. D'après la question I.1.2/, pour tout $t > 0$, on a $0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} \leq \frac{e^{-xt}}{2}$ et donc, par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \varphi(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{2} dt = \frac{1}{2x}.$$

Comme $\frac{1}{2x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

I.4/ Caractère C^k de la fonction φ

I.4.1/ Soit $\Phi : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, t) \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt}$$

- Pour chaque $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Pour chaque $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Pour chaque $(x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $|\Phi(x, t)| = \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} = \varphi_0(t)$ où la fonction φ_0 est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question I.2/.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

φ est continue sur $[0, +\infty[$.

I.4.2/ Soit $a > 0$.

- Pour chaque $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.
- La fonction Φ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur $[a, +\infty[\times]0, +\infty[$ et $\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -\frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt}$. De plus,
 - pour chaque $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
 - pour chaque $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[a, +\infty[$.
 - pour chaque $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$, d'après la question I.1.1/,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \leq e^{-at} = \varphi_1(t).$$

où la fonction φ_1 est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), φ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et la dérivée de φ s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel strictement positif a ,

φ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $\varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} dt$.

I.4.3/ Soit $x > 0$. $|\varphi'(x)| = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a montré que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0.$$

I.4.4/ Soit $a > 0$. En plus des résultats de la question I.4.2/, la fonction Φ admet une dérivée partielle seconde par rapport à sa première variable sur $[a, +\infty[\times]0, +\infty[$ et $\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) = (1 - \cos t) e^{-xt}$. De plus,

- pour chaque $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- pour chaque $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.
- pour chaque $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) \right| = \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \leq 2e^{-at} = \varphi_2(t)$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, φ est de classe C^2 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ et donc sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée seconde s'obtient par dérivation sous le signe somme.

φ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $\varphi''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-xt} dt$.

I.4.5/ Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$. Mais alors, la fonction $t \mapsto (\cos t) e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ en tant que différence de deux fonctions intégrables sur $]0, +\infty[$.

On a déjà $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (\cos t)e^{-xt} dt &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right]_0^{+\infty} \right) = \operatorname{Re} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} - \frac{1}{-x+i} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{x-i} \right) \quad (\text{car } \left| \frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{x^2+1}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{x+i}{x^2+1} \right) = \frac{x}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall x > 0, \varphi''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

I.4.6/ Donc, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, \varphi'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + C$. De plus, d'après la question I.4.3/, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0$ ce qui fournit $C = 0$.

$$\forall x > 0, \varphi'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1).$$

En particulier, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = -\infty$. Ainsi, φ est continue sur $]0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = -\infty$. On sait alors que φ n'est pas dérivable en 0.

I.5/ Expression explicite de la fonction φ

I.5.1/ $x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) = -x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x \times \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) = 0.$$

I.5.2/ $\int \ln(x^2+1) dx = x \ln(x^2+1) - \int x \frac{2x}{x^2+1} dx = x \ln(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{Arctan} x + C$.

I.5.3/ D'après les questions I.4.6/ et I.5.2/, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 0, \varphi(x) = (x \ln x - x) - \frac{1}{2} (x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{Arctan} x) + C = \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) - \operatorname{Arctan} x + C.$$

D'après la question I.2/, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ et donc, d'après la question I.5.1/, $0 = 0 - \frac{\pi}{2} + C$. Par suite, $C = \frac{\pi}{2}$ puis pour $x > 0$,

$$\varphi(x) = x \left(\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) - \operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{2} = x \left(\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right).$$

$$\forall x > 0, \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt = x \left(\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right).$$

I.5.4/ Puisque la fonction φ est continue en 0, quand x tend vers 0 on obtient $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\varphi(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Partie II : Etude de l'existence de J_m

II.1/ Étude de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{(\sin t)^m}{t}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

De plus $\frac{(\sin t)^m}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{m-1}$ et on en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{(\sin t)^m}{t}$ se prolonge par continuité en 0 puis que la fonction $t \mapsto \frac{(\sin t)^m}{t}$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul m , J_m existe.

II.2/ Étude de J_1

Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$. Les deux fonctions $t \mapsto 1 - \cos t$ et $t \mapsto -\frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[a, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_a^A \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \left[-\frac{1 - \cos t}{t} \right]_a^A + \int_a^A \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1 - \cos a}{a} - \frac{1 - \cos A}{A} + \int_a^A \frac{\sin t}{t} dt.$$

Or $\frac{1 - \cos a}{a} \underset{a \rightarrow 0}{\sim} \frac{a^2/2}{a} = \frac{a}{2}$ et donc $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - \cos a}{a} = 0$. D'autre part, $\left| \frac{1 - \cos A}{A} \right| \leq \frac{2}{A}$ et donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos A}{A} = 0$.

Quand a tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$. On a montré que J_1 est une intégrale convergente et que

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \varphi(0) = \frac{\pi}{2}.$$

II.3/ Étude de l'existence de I_k

Si $k = 0$, $I_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t} dt = +\infty$.

Soit k un entier relatif non nul. Soit $A > \frac{\pi}{2}$. Une intégration par parties fournit

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{e^{ikt}}{t} dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ikt} \right]_{\frac{\pi}{2}}^A + \frac{1}{ik} \int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{e^{ikt}}{t^2} dt = \frac{1}{ik} \left(\frac{e^{ikA}}{A} - \frac{e^{ik\pi/2}}{\pi/2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{e^{ikt}}{t^2} dt \right).$$

Maintenant, $\left| \frac{e^{ikA}}{A} \right| = \frac{1}{A}$ et donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{ik} \left(\frac{e^{ikA}}{A} - \frac{e^{ik\pi/2}}{\pi/2} \right) = -\frac{e^{ik\pi/2}}{ik\pi/2}$. Ensuite, la fonction $t \mapsto \frac{e^{ikt}}{t^2}$ est continue sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$, est dominée par $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et donc est intégrable sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$. En particulier, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{e^{ikt}}{t^2} dt$ existe dans \mathbb{C} .

Finalement, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{e^{ikt}}{t} dt$ existe dans \mathbb{C} ou encore I_k est une intégrale convergente.

I_k est une intégrale convergente si et seulement si $k \in \mathbb{Z}^*$.

II.4/ Étude de la nature de J_m

II.4.1/ Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(\sin t)^m}{t} dt &= \frac{1}{(2i)^m} \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(e^{it} - e^{-it})^m}{t} dt \\ &= \frac{1}{(2i)^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^{ikt} e^{-i(m-k)t}}{t} dt \\ &= \frac{1}{(2i)^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} I_{2k-m}(x). \end{aligned}$$

II.4.2/ Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall k \in [0, 2p+1]$, $2k - (2p+1) \neq 0$ et donc chaque intégrale $I_{2k-(2p+1)}$ est une intégrale convergente d'après la question II.3/. Il en est de même de l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p+1}}{t} dt$. D'autre part, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^{2p+1}}{t} dt$ est une intégrale convergente d'après la question II.1/. Finalement $J_{2p+1} = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p+1}}{t} dt$ est une intégrale convergente.

$\forall p \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_{2p+1} existe.

II.4.3/ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans la somme $\sum_{k=0}^{2p} \binom{m}{k} I_{2k-2p}(x)$, un et un seul terme diverge quand x tend vers $+\infty$, le terme obtenu pour $k = p$. La somme est donc divergente quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que l'intégrale J_{2p} diverge. De plus, comme la fonction $t \mapsto \frac{(\sin t)^{2p}}{t}$ est positive, $J_{2p} = +\infty$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, J_{2p} = +\infty.$$

Partie III : Calcul de J_{2p+1}

III.1/ Un développement de Fourier

III.1.1/ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. La fonction h_x est 2π -périodique, continue par morceaux sur \mathbb{R} . On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.

Pour $t \in]-\pi, \pi[$, $h_x(-t) = \cos\left(\frac{x}{\pi}(-t)\right) = \cos\left(\frac{x}{\pi}t\right) = h_x(t)$. De plus, $h_x(-\pi) = h_x(\pi)$ par 2π -périodicité. Toujours par 2π -périodicité, la fonction h_x est paire. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(h_x) = 0$ et que

$$\begin{aligned} a_n(h_x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h_x(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{\pi}t\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\cos\left(\left(\frac{x}{\pi} + n\right)t\right) + \cos\left(\left(\frac{x}{\pi} - n\right)t\right) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\left(\frac{x}{\pi} + n\right)t\right)}{\frac{x}{\pi} + n} + \frac{\sin\left(\left(\frac{x}{\pi} - n\right)t\right)}{\frac{x}{\pi} - n} \right]_0^\pi \quad (\text{car } x \notin \pi\mathbb{Z}) \\ &= \frac{\sin(x + n\pi)}{x + n\pi} + \frac{\sin(x - n\pi)}{x - n\pi} = \frac{(-1)^n 2x \sin x}{x^2 - n^2\pi^2} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(h_x) = \frac{(-1)^n 2x \sin x}{x^2 - n^2\pi^2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(h_x) = 0.$$

III.1.2/ Montrons que la fonction h_x est continue sur \mathbb{R} . h_x est déjà continue sur chaque $]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$. De plus, $h_x(-\pi^+) = h_x(\pi^-) = h_x(\pi) = h_x(-\pi)$ et donc h_x est continue en $-\pi$ puis sur \mathbb{R} par 2π -périodicité.

Ainsi, la fonction h_x est 2π -périodique, continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 par morceaux. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de h_x converge vers h_x sur \mathbb{R} . En particulier, pour $x = 0$,

$$1 = h_x(0) = \frac{a_0(h_x)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(h_x) \cos(n \times 0) + b_n(h_x) \sin(n \times 0)) = \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2x \sin x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

En particulier, la série considérée converge.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2x \sin x}{x^2 - n^2\pi^2} = 1.$$

III.2/ Etude d'un procédé de calcul

III.2.1/ La fonction f est continue sur le segment $[-1, 1]$ et donc est bornée sur $[-1, 1]$. Soit M un majorant de la fonction $|f|$ sur $[-1, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $|\gamma_n| \leq \int_{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \frac{|f(\sin t)|}{t} dt \leq \pi \times M \times \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi} = \frac{2M}{2n-1}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2M}{2n-1} = 0$, on a montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = 0.$$

III.2.2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $x = t - n\pi$, on obtient

$$\gamma_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin(x + n\pi))}{x + n\pi} dx = (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{x + n\pi} dx \quad (\text{car } f \text{ est impaire}).$$

En posant $y = -x$, on a aussi

$$\gamma_n = (-1)^n \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin(-y))}{-y + n\pi} (-dy) = (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin y)}{y - n\pi} dy \quad (\text{car } f \text{ est impaire}).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{2}(\gamma_n + \gamma_n) = \frac{1}{2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n f(\sin t)}{t + n\pi} dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n f(\sin t)}{t - n\pi} dt \right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n t f(\sin t)}{t^2 - n^2\pi^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n 2t f(\sin t)}{t^2 - n^2\pi^2} dt \quad (\text{car la fonction } t \mapsto \frac{(-1)^n t f(\sin t)}{t^2 - n^2\pi^2} \text{ est paire}). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \gamma_n = u_n.}$$

III.2.3/ Si $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, la série de terme général $(-1)^n \frac{2t \sin t}{t^2 - n^2\pi^2}$ converge d'après la question III.1.2/. Il en est de même de la série de terme général $u_n(t)$. D'autre part, la série de terme général $u_n(0) = 0$ converge. Finalement, pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la série de terme général $u_n(t)$ converge.

III.2.4/ • Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $t^2 - n^2\pi^2 \leq (\frac{\pi}{2})^2 - \pi^2 < 0$ et en particulier, $t^2 - n^2\pi^2 \neq 0$. Donc chaque fonction u_n est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

• Montrons que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. M désigne toujours un majorant de la fonction $|f|$ sur $[-1, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $|u_n(t)| = \frac{2t|f(\sin t)|}{n^2\pi^2 - t^2} \leq \frac{\pi M}{n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}}$. Comme la série numérique de terme général

$\frac{\pi M}{n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}}$ converge, on a montré que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement et donc uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Mais alors, S est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en tant que limite uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ d'une suite de fonctions continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\boxed{S \text{ est continue sur } [0, \frac{\pi}{2}].}$$

III.2.5/ Puisque la fonction S est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt$ existe. Puisque la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, un théorème d'intégration terme à terme permet d'affirmer que la série de terme général $\gamma_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(t) dt$ converge et que

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n.}$$

III.2.6/ Soient $A \geq \frac{\pi}{2} + \pi$ puis n_A le plus grand des entiers k tels que $\frac{\pi}{2} + k\pi \leq A$ c'est-à-dire $n_A = E\left(\frac{A - \frac{\pi}{2}}{\pi}\right) \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{f(\sin t)}{t} dt = \sum_{k=1}^{n_A} \int_{\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + k\pi} \frac{f(\sin t)}{t} dt + \int_{\frac{\pi}{2} + n_A\pi}^A \frac{f(\sin t)}{t} dt = \sum_{k=1}^{n_A} \gamma_k + \int_{\frac{\pi}{2} + n_A\pi}^A \frac{f(\sin t)}{t} dt \quad (*).$$

Or

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{\pi}{2} + n_A\pi}^A \frac{f(\sin t)}{t} dt \right| &\leq \int_{\frac{\pi}{2} + n_A\pi}^A \frac{|f(\sin t)|}{t} dt \leq \left(A - \left(\frac{\pi}{2} + n_A\pi \right) \right) \times \frac{M}{\frac{\pi}{2} + n_A\pi} \\ &\leq \pi \times \frac{M}{\frac{\pi}{2} + n_A\pi} = \frac{2M}{2n_A + 1} \leq \frac{2M}{2(A-1) + 1} = \frac{2M}{2A-1}. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2M}{2A-1} = 0$, on en déduit que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{2} + n_A \pi}^A \frac{f(\sin t)}{t} dt = 0$. Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} n_A = +\infty$, en faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'égalité (*), on obtient la convergence de l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt$ (car la série de terme général γ_k converge d'après la question III.2.5/) et

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt.$$

III.2.7/ Puisque f est dérivable en 0 et impaire, on a $f(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)u + o(u) = f'(0)u + o(u)$ et donc $f(\sin t) \underset{t \rightarrow 0}{=} f'(0)(\sin t) + o(\sin t) = f'(0)t + o(t)$. On en déduit que les deux fonctions $g : t \mapsto \frac{f(\sin t)}{t}$ et $h : t \mapsto \frac{f(\sin t)}{\sin t}$ se prolongent par continuité en 0 en posant respectivement $g(0) = f'(0)$ et $h(0) = f'(0)$. Les fonctions g et h étant d'autre part continues sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, ces fonctions sont intégrables sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. En particulier, les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{t} dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t} dt$ sont des intégrales convergentes.

III.2.8/ D'après les questions III.2.6/ et III.2.7/, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt$ est convergente. De plus,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(\sin t) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) + S(t) \right) dt \quad (\text{d'après la question III.2.6/}). \end{aligned}$$

Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, posons $\Sigma(t) = f(\sin t) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) + S(t)$.

Quand t tend vers 0, $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} = \frac{\sin t - t}{t \sin t} \sim \frac{t^3/6}{t^2} = \frac{t}{6}$. Par suite, $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) = 0$. D'autre part, puisque la fonction S est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ d'après la question II.2.4/, $\lim_{t \rightarrow 0} S(t) = S(0)$ puis $\lim_{t \rightarrow 0} \Sigma(t) = S(0) = 0$. La fonction Σ se prolonge donc par continuité en 0 en posant $\Sigma(0) = 0$.

En résumé, $\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Sigma(t) dt$ où $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\Sigma(t) = \begin{cases} f(\sin t) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) + S(t) & \text{si } t \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

La fonction Σ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Plus précisément, d'après la question III.1.2/, $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{\sin t}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t \sin t}{t^2 - n^2 \pi^2} = 1$ et donc après multiplication des deux membres par $\frac{f(\sin t)}{\sin t}$, $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{f(\sin t)}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t f(\sin t)}{t^2 - n^2 \pi^2} = \frac{f(\sin t)}{\sin t}$ puis $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\Sigma(t) = \frac{f(\sin t)}{t} - \frac{f(\sin t)}{\sin t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t f(\sin t)}{t^2 - n^2 \pi^2} = 0$. Ceci reste vrai pour $t = 0$ par continuité de Σ en 0. Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t} dt.$$

III.3/ Application au calcul de J_{2p+1}

III.3.1/ On applique les résultats précédents à la fonction $f = \text{Id}_{[-1,1]}$. f est bien définie et continue sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles, impaire et dérivable en 0. Avec ce choix de f , $\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = J_1$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$. D'après la question III.2.8/, on a

$$J_1 = \frac{\pi}{2}.$$

III.3.2/ On applique cette fois-ci les résultats précédents à la fonction f définie par $\forall t \in [-1, 1], f(t) = t^3$. f est bien définie et continue sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles, impaire et dérivable en 0.

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^3}{t} dt = J_3 \text{ et d'autre part,}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2t)) dt = \frac{\pi}{4}.$$

On en déduit que

$$J_1 = \frac{\pi}{4}.$$

III.3.3/ Soit $p \in \mathbb{N}$. On applique maintenant les résultats précédents à la fonction f définie par $\forall t \in [-1, 1], f(t) = t^{2p+1}$. f est bien définie et continue sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles, impaire et dérivable en 0.

Toujours d'après la question II.2.8/, on a

$$J_{2p+1} = \int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t dt \text{ (intégrales de WALLIS).}$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t dt$. On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ puis pour $p \in \mathbb{N}$, une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} I_{p+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \times \sin^{2p+1} t dt = [-\cos t \sin^{2p+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2p+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{2p} t dt \\ &= (2p+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^{2p} t dt = (2p+1)(I_p - I_{p+1}), \end{aligned}$$

et donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} I_p$$

On en déduit que pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$I_p = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{(2p) \times (2p-1) \times \dots \times 2 \times 1}{((2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \times \frac{\pi}{2},$$

ce qui reste vrai pour $p = 0$.

$$\forall p \in \mathbb{N}, J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \times \frac{\pi}{2}.$$