SESSION 2009

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

Partie I

I.1 I.1.1 $x_2 = 2x_1\cos(\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)$. Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $x_p = \sin(p\theta)$.
- Le résultat est vrai pour $p = 1$ et $p = 2$.
- Soit $p \geqslant 1$. Supposons que $x_p = \sin(p\theta)$ et $x_{p+1} = \sin((p+1)\theta)$. Alors

$$\begin{aligned}x_{p+2} &= 2x_{p+1}\cos(\theta) - x_p = 2\sin((p+1)\theta)\cos(\theta) - \sin(p\theta) = \sin((p+2)\theta) + \sin(p\theta) - \sin(p\theta)\\ &= \sin((p+2)\theta).\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ x_p = \sin(p\theta).}$$

I.1.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$x_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \sin((n+1)\theta) = 0 \Leftrightarrow (n+1)\theta \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{n+1}\mathbb{Z}.$$

I.2 I.2.1 Soit $t \in \mathbb{R}$.
- $d_1(t) = 2t$.
- $d_2(t) = \begin{vmatrix} 2t & 1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 4t^2 - 1$.
- $d_3(t) = \begin{vmatrix} 2t & 1 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t\begin{vmatrix} 2t & 1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2td_2(t) - d_1(t) = 8t^3 - 4t$.
- $d_4(t) = \begin{vmatrix} 2t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t\begin{vmatrix} 2t & 1 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = 2td_3(t) - d_2(t) = 16t^4 - 12t^2 + 1$.

I.2.2 Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 3$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}d_n(t) &= \begin{vmatrix} 2t & 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = 2td_{n-1}(t) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 1 & 2t & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & 2t \end{vmatrix}\\ &= 2td_{n-1}(t) - d_{n-2}(t) \text{ (en développant suivant la première ligne).}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant 3,\ d_n(t) = 2td_{n-1}(t) - d_{n-2}(t).}$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, d_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^n.
- La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que d_n soit un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^n et d_{n+1} soit un polynôme de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^{n+1}. Alors $d_{n+2} = 2Xd_{n+1} - d_n$ est un polynôme puis $\deg(d_{n+2}) = \deg(Xd_{n+1}) = n+2$ et $\text{dom}(d_{n+2}) = \text{dom}(2Xd_{n+1}) = 2\text{dom}(d_{n+1}) = 2^{n+2}$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 2^n.}$$

I.3 **I.3.1** Soit $\theta \in]0, \pi[$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_n(\cos(\theta)) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

• Pour $n = 1$, $d_1(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta) = \dfrac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}$ et pour $n = 2$,

$$\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)}{\sin(\theta)} = 3 - 4\sin^2(\theta) = 4\cos^2(\theta) - 1 = d_2(\cos(\theta)).$$

Le résultat est donc vrai quand $n = 1$ et $n = 2$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $d_n(\cos(\theta))) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ et $d_{n+1}(\cos(\theta))) = \dfrac{\sin((n+2)\theta)}{\sin(\theta)}$. Alors

$$\begin{aligned} d_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)d_{n+1}(\cos(\theta)) - d_n(\cos(\theta)) &= \frac{2\sin((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \\ &= \frac{\sin((n+2)\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta) - \sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin(\theta)}. \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in]0, \pi[,\ d_n(\cos(\theta))) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.}$$

I.3.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0, \pi[$.

$$d_n(\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} = 0 \Leftrightarrow \sin((n+1)\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{n+1}\mathbb{Z} \cap]0, \pi[\Leftrightarrow \theta \in \left\{\frac{k\pi}{n+1},\ 1 \leqslant k \leqslant n\right\}.$$

I.4 **I.4.1** $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_n(\lambda) = d_n\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)$.

I.4.2 D'après la question I.3.2, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\chi_n\left(-2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\right) = d_n\left(\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\right) = 0$. Donc les nombres $-2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ sont valeurs propres de la matrice $A_n(0)$.

Plus précisément, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $0 < \dfrac{k\pi}{n+1} < \pi$ et puisque la fonction cosinus est injective sur $]0, \pi[$, les n nombres $-2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont deux à deux distincts. Puisque $A_n(0)$ est de format n, on a trouvé toutes les valeurs propres de la matrice $A_n(0)$, toutes réelles et simples. Enfin, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$-2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 2\cos\left(\pi - \frac{k\pi}{n+1}\right) = 2\cos\left(\frac{(n+1-k)\pi}{n+1}\right)$$

et les valeurs propres de $A_n(0)$ peuvent aussi s'écrire $\lambda_{k'} = 2\cos\left(\dfrac{k'\pi}{n+1}\right)$, $1 \leqslant k' \leqslant n$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A_n(0) \text{ sont les } \lambda_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\ 1 \leqslant k \leqslant n.}$$

Par stricte décroissance de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$, la plus grande valeur propre de $A_n(0)$ est $\lambda_1 = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$.

I.4.3 Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $\theta = \dfrac{\pi}{n+1}$.

$$(A_n(0)-\rho I_n)X=\rho X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-2x_1\cos(\theta)+x_2=0\\ \forall p\in [\![1,n-2]\!],\ x_p-2\cos(\theta)x_{p+1}+x_{p+2}=0\\ x_{n-1}-2\cos(\theta)x_n=0\end{array}\right. \quad (S).$$

D'après la question I.1, si on pose $\forall p\in [\![1,n]\!]$, $x_p=\sin(p\theta)$, on a

- $-2x_1\cos(\theta)+x_2=0$,
- $\forall p\in [\![1,n-2]\!],\ x_p-2\cos(\theta)x_{p+1}+x_{p+2}=0$,
- $x_{n-1}-2\cos(\theta)x_n+x_{n+1}=0$ et $x_{n+1}=0$.

Le vecteur $X=\begin{pmatrix}\sin(\theta)\\ \sin(2\theta)\\ \vdots\\ \sin(n\theta)\end{pmatrix}$ est donc solution du système (S). De plus, pour $k\in [\![1,n]\!]$, $0<\dfrac{\pi}{n+1}\leqslant\dfrac{k\pi}{n+1}=k\theta\leqslant\dfrac{n\pi}{n+1}<\pi$ et donc $\sin(k\theta)$. Les composantes du vecteur X sont donc strictement positives. En particulier, X n'est pas nul.

$$\boxed{\text{Un vecteur propre de } A_n(0) \text{ associé à } \rho=\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \text{ est } \begin{pmatrix}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\\ \sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)\\ \vdots\\ \sin\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)\end{pmatrix}.}$$

Partie II

II.1 II.1.1 Soit $\varphi\in O(e)$. Pour tout $u\in E$ tel que $\|u\|\leqslant 1$, on a $\|\varphi(u)\|=\|u\|\leqslant 1$ et donc $|||\varphi|||\leqslant 1$.
D'autre part, $\|e_1\|\leqslant 1$ et $\|\varphi(e_1)\|=1$. Donc $|||\varphi|||\geqslant 1$. Finalement $|||\varphi|||=1$.

$$\boxed{\forall\varphi\in O(E),\ |||\varphi|||=1.}$$

II.1.2 Soit $u=u_1e_1+\ldots+u_ne_n\in\mathbb{R}^n$ tel que $\|u\|\leqslant 1$.

$$\begin{aligned}\|\delta(u)\|^2&=\left\|\sum_{i=1}^n u_i\delta(e_i)\right\|^2=\left\|\sum_{i=1}^n u_i\alpha_ie_i\right\|^2\\ &=\sum_{i=1}^n u_i^2\alpha_i^2 \text{ (car la base } \mathfrak{B} \text{ est orthonormée)}\\ &\leqslant\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right)\times\left(\max_{i\in[\![1,n]\!]}|\alpha_i|\right)^2=\|u\|^2\left(\max_{i\in[\![1,n]\!]}|\alpha_i|\right)^2\leqslant\left(\max_{i\in[\![1,n]\!]}|\alpha_i|\right)^2.\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall u\in E$, $(\|u\|\leqslant 1\Rightarrow\|\delta(u)\|\leqslant\max_{i\in[\![1,n]\!]}|\alpha_i|)$. Ceci montre que $|||\delta|||\leqslant\max_{i\in[\![1,n]\!]}|\alpha_i|$.

D'autre part, soit $j\in [\![1,n]\!]$ un indice tel que $|\alpha_j|=\max_{i\in[\![1,n]\!]}|\alpha_i|$. On a $\|\delta(e_j)\|=\|\alpha_je_j\|=|\alpha_j|\|e_j\|=|\alpha_j|=\max_{i\in[\![1,n]\!]}|\alpha_i|$. Puisque $\|e_j\|\leqslant 1$, ceci montre que $|||\delta|||\geqslant\max_{i\in[\![1,n]\!]}|\alpha_i|$ et finalement

$$\boxed{|||\delta|||=\max_{i\in[\![1,n]\!]}|\alpha_i|.}$$

II.1.3 Soit f un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème spectral, f est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Donc il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{B}'$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}'}(f)=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. D'après la question précédente, $|||f|||=\max_{i\in[\![1,n]\!]}|\lambda_i|$ ou encore, puisque $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ est le spectre de f,

$$\boxed{\forall f\in S(\mathbb{R}^n),\ |||f|||=\max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}|\lambda|.}$$

II.2 **II.2.1** L'application $L : u \mapsto (l(u), u)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^n)^2$ en tant qu'application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel et l'application $B : (u, v) \mapsto (u|v)$ est continue sur $(\mathbb{R}^n)^2$ en tant qu'application bilinéaire sur un espace vectoriel de dimension finie. Donc l'application $\Phi = B \circ L$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, on sait que la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$. Puisque l'application Φ est continue sur le compact S à valeurs dans $\mathbb{R}$, on sait que Φ admet un maximum sur S.

II.2.2 $\|v + tu\|^2 = \|v\|^2 + 2t(u|v) + t^2\|u\|^2 = 1 + t^2 > 0$ et donc le réel $\alpha = \|v + tu\| = \sqrt{1 + t^2}$ convient.

$$\begin{aligned}\Phi(v) \geqslant \Phi(w) = (l(w)|w)) &= \frac{1}{\alpha^2}((l(v)|v) + t(l(v)|u) + t(l(u)|v) + t^2(l(u)|u))\\ &= \frac{1}{1+t^2}(\Phi(v) + 2t(l(v)|u) + t^2\Phi(u)) \text{ (car } l \text{ est autoadjoint).}\end{aligned}$$

On en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2(\Phi(v) - \Phi(u)) - 2t(l(v)|u) \geqslant 0$.

- Si $\Phi(v) - \Phi(u) \neq 0$, le trinôme $t \mapsto t^2(\Phi(v) - \Phi(u)) - 2t(l(v)|u)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est donc négatif ou nul ce qui fournit $(l(v)|u)^2 \leqslant 0$ et donc $(l(v)|u) = 0$.
- Si $\Phi(v) - \Phi(u) = 0$, il reste $\forall t \in \mathbb{R}$, $-2t(l(v)|u) \geqslant 0$. En particulier, pour $t = -1$ et $t = 1$, on obtient $(l(v)|u) \geqslant 0$ et $(l(v)|u) \leqslant 0$. Dans ce cas aussi $(l(v)|u) = 0$.

On a montré que $l(v)$ est orthogonal à tout vecteur unitaire de $(\mathrm{Vect}(v))^\perp$. En particulier, $l(v)$ est orthogonal à tout vecteur d'une base orthonormée de $(\mathrm{Vect}(v))^\perp$. On en déduit que $v \in \left((\mathrm{Vect}(v))^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(v)$. Puisque v n'est pas nul, on a montré que v est un vecteur propre de l.

II.2.3 $\Phi(x) = (l(x)|x) = \lambda(x|x) = \lambda\|x\|^2 = \lambda$. De même, $\Phi(v) = \rho$. L'inégalité $\Phi(x) \leqslant \Phi(v)$ fournit alors $\lambda \leqslant \rho$. On a ainsi montré que ρ est la plus grande valeur propre de l.

$$\boxed{\forall l \in S(\mathbb{R}^n),\ \max_{u \in S} (l(u)|u) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(l)} \lambda.}$$

II.3 **II.3.1** Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée du vecteur $l(e_j)$ dans la base $\mathfrak{B}$. Puisque la base $\mathfrak{B}$ est orthonormée, on a $\forall(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = (l(e_j)|e_i)$. On en déduit que

$$\Phi(x) = (l(x)|x) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j l(e_j) | \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j (l(e_j)|e_i) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Par suite, puisque les $a_{i,j}$ sont positifs

$$|\Phi(x)| \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}|x_i||x_j| = \Phi(x^+).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |\Phi(x)| \leqslant \Phi(x^+).}$$

II.3.2 Si de plus $x \in S$, on a aussi $x^+ \in S$ car $\displaystyle\sum_{i}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. D'après la question II.2, $\rho = \Phi(x)$ est le maximum de l'application Φ sur S. On en déduit que $0 \leqslant |\rho| = |\Phi(x)| \leqslant \Phi(x^+) \leqslant \Phi(x) = \rho$ et donc que $0 \leqslant \rho = \Phi(x^+)$.

$$\boxed{\Phi(x^+) = \rho \text{ et } \rho \geqslant 0.}$$

II.4 Puisque $x \in S$, $\Phi(x) = \lambda$ et donc d'après la question II.3.1, $\rho \geqslant \Phi(x^+) \geqslant |\Phi(x)| = |\lambda|$.

II.5 Si $x \in S$ et $l(x) = \rho x$, alors $\Phi(x) = \rho$ puis $\Phi(x^+) = \rho$ d'après la question II.3.2. Puisque $x^+ \in S$ et réalise le maximum de Φ sur S, la question II.2.1 montre que x^+ est un vecteur propre de l associé à la valeur propre ρ.

Le vecteur x^+ est positif. Supposons par l'absurde que x^+ ne soit pas strictement positif.
Soit I l'ensemble des indices $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i = 0$. Par hypothèse, I n'est pas vide mais I n'est pas non plus $[\![1, n]\!]$ car x^+ n'est pas nul. Donc l'ensemble $J = [\![1, n]\!] \setminus I$ n'est pas vide. I et J constituent une partition de $[\![1, n]\!]$.

Soit $i \in I$. Puisque $l(x^+) = \rho x^+$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| = \rho|x_i| = 0$ et même $\displaystyle\sum_{j \in J} a_{i,j}|x_j| = 0$. Cette somme de termes positifs étant nulles, chacun de ses termes est nul et donc $\forall j \in J$, $a_{i,j}|x_j| = 0$ puis $a_{i,j} = 0$ car $x_j \neq 0$ pour $j \in J$.
On vient de trouver une partition (I, J) de $[\![1, n]\!]$ telle que $\forall(i, j) \in I \times J$, $a_{i,j} = 0$ ce qui contredit (2). Donc

$$\boxed{x^+ > 0.}$$

II.6 Puisque y est un vecteur propre de l associé à ρ, y n'est pas nul et $\dfrac{y}{\|y\|}$ est un vecteur propre de l associé à la valeur propre ρ et élément de S. D'après la question précédente $y^+ > 0$ et en particulier, $\dfrac{|y_1|}{\|y\|} > 0$ puis $y_1 \neq 0$.

Soit $z = x - \dfrac{x_1}{y_1}y$. x et y sont dans le sous-espace propre $E_\rho(l)$ et il en est de même de z. La première composante de z est nulle et z vérifie $l(z) = \rho z$. Le début de la question montre que z ne peut être non nul. Donc $z = 0$ puis $x = \dfrac{x_1}{y_1}y$. Ainsi, tout vecteur propre de l associé à la valeur propre ρ est colinéaire à y ou encore $E_\rho(l) = \text{Vect}(y)$. On a montré que

$$\boxed{\dim(E_\rho(l)) = 1.}$$

II.7 Si $x > 0$, $x^+ = x$. D'après la question II.3.1,

$$0 \leqslant |\Phi(x)| \leqslant \Phi(x^+) = \Phi(x) = (l(x)|x) = \lambda\|x\|^2,$$

et puisque $\|x\|^2 > 0$, on en déduit que $\lambda \geqslant 0$.

Ainsi, λ est une valeur propre positive admettant un vecteur propre strictement positif x associé. ρ admet également le vecteur propre ν pour vecteur propre associé. D'après la question II.5, $\nu > 0$.

Supposons $\lambda \neq \rho$. Puisque l est autoadjoint, on sait que les sous-espaces propres $E_\lambda(l)$ et $E_\rho(l)$ sont orthogonaux d'après le théorème spectral. On devrait donc avoir $(x|\nu) = 0$. Mais ici, comme $x > 0$ et $\nu > 0$, on a $(x|\nu) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\nu_i > 0$ et en particulier $(x|\nu) \neq 0$. Ceci montre que $\lambda = \rho$.

II.8 La matrice A est symétrique, réelle et vérifie la propriété (1). Montrons que la matrice A vérifie la propriété (2).

Soit (I, J) une partition de $[\![1, n]\!]$. Donc $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$, $I \cup J = [\![1, n]\!]$ et $I \cap J = \varnothing$.
- S'il existe $i \in I$ tel que $j = i + 1 \notin I$, alors $(i, j) \in I \times J$ et $a_{i,j} = 1 \neq 0$.
- Sinon, $\forall i \in I$, $i + 1 \in I$ et dans ce cas, $I = [\![i_0, n]\!]$ où $i_0 = \text{Min}(I)$. On ne peut avoir $i_0 = 1$ car alors $I = [\![1, n]\!]$. Donc $i_0 \geqslant 2$ puis $J = [\![1, i_0 - 1]\!]$. Dans ce cas, $(i, j) = (n, 1)$ est un couple d'indices tel que $(i, j) \in I \times J$ et $a_{i,j} = 1 \neq 0$.

Donc la matrice A est symétrique réelle et vérifie les conditions (1) et (2). D'après la question II.7, la plus grande valeur propre de la matrice A est positive et est la seule valeur propre associée à un vecteur propre strictement positif.

On remarque que la somme des colonnes de A est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ou encore, si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AX = 2X$. X est un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre 2 et d'après ce qui précède

$$\boxed{\text{la plus grande valeur propre de } A \text{ est } 2.}$$

