SESSION 2010

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

PROBLÈME : QUELQUES UTILISATIONS DES PROJECTEURS

I. Questions préliminaires

1. A est la matrice élémentaire $E_{2,1}$. Par suite $A^2 = 0$ puis $\forall n \geqslant 2$, $A^n = 0$. On en déduit que $\exp(A) = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même, $B^2 = 0$ puis $\exp(B) = I_2 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ensuite,

$$\exp(A) \times \exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis $(A+B)^2 = I_2$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A+B)^{2n} = I_2$ puis $(A+B)^{2n+1} = A+B$. Par suite,

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}(A+B)^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(A+B)^{2n+1} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}\right) I_2 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\right)(A+B) = \mathrm{ch}(1)I_2 + \mathrm{sh}(1)(A+B) \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(1) & \mathrm{sh}(1) \\ \mathrm{sh}(1) & \mathrm{ch}(1) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \exp(A) \times \exp(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \exp(A+B) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(1) & \mathrm{sh}(1) \\ \mathrm{sh}(1) & \mathrm{ch}(1) \end{pmatrix}.}$$

2. Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, si les matrices A et B commutent, $\exp(A) \times \exp(B) = \exp(A+B)$.

II. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

3. Polynôme interpolateur de Lagrange Soit $P \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$.

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\phi) &\Rightarrow (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_r)) = (0, \ldots, 0) \\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (car un polynôme de degré au plus } r-1 \text{ ayant au moins } r \text{ racines deux à deux distinctes est nul).}\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$ et ϕ est une application linéaire injective. Comme $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ et $\mathbb{R}^r$ sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ayant même dimension finie r, on en déduit que ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^r$. En particulier, le r-uplet $(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_r})$ a un antécédent et un seul par ϕ noté L ou encore il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

4. **(a)** (Si $r = 1$ ou $r = 2$, les différents produits vides considérés sont conventionnellement égaux à 1)
Soit $(i, j) \in [\![1, r]\!]^2$.

- Si $i = j$, $l_i(\lambda_j) = l_i(\lambda_i) = \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} \frac{\lambda_i - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} = 1$.
- Si $i \neq j$, $l_i(\lambda_j) = \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} = \frac{\lambda_j - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin \{i,j\}}}^{r} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} = 0$.

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, r]\!]^2,\ l_i(\lambda_j) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{array}\right. = \delta_{i,j}.}$$

(b) Soit $P = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} l_i$. Chaque polynôme l_i est de degré $r-1$ et donc P est un élément de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$. De plus, pour $j \in [\![1, r]\!]$,

$$P(e^{\lambda_j}) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} l_i(\lambda_j) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} \delta_{i,j} = e^{\lambda_j}.$$

Par unicité de L, on en déduit que $P = L$ et donc

$$\boxed{L = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} l_i.}$$

5. Une propriété de l'exponentielle **(a)** On sait que tout endomorphisme d'un espace de dimension finie est continu sur cet espace. Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie, l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto PMP^{-1}$ est continu sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f cet endomorphisme

(b) Pour tout entier naturel k, on a $(PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ et donc pour tout entier naturel p,

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{(PDP^{-1})^k}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{D^k}{k!}\right)P^{-1} = f\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{D^k}{k!}\right).$$

Maintenant, f est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier, f est continu en D. La suite $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{D^k}{k!}\right)$ converge vers $\exp(D)$ quand p tend vers $+\infty$ et donc, par continuité de f en D, la suite $\left(f\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{D^k}{k!}\right)\right)$ converge vers $f(\exp(D)) = P\exp(D)P^{-1}$. Comme d'autre part, $f\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{D^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(PDP^{-1})^k}{k!}$ converge vers $\exp(PDP^{-1})$, on a montré que $\exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$.

$$\boxed{\forall P \in GL_n(\mathbb{R}),\ \forall D \in D_n(\mathbb{R}),\ \exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)\,P^{-1}.}$$

6. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, les ordres de multiplicité respectifs des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, de la matrice A. Puisque la matrice A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{\alpha_r})$.

Déjà

$$\begin{aligned}\exp(D) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\text{diag}(\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!}}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_r^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_r^k}{k!}}_{\alpha_r}) = \text{diag}(\underbrace{e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_1}}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{e^{\lambda_r}, \ldots, e^{\lambda_r}}_{\alpha_r}) \\ &= \text{diag}(\underbrace{L\lambda_1), \ldots, L(\lambda_1)}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{L(\lambda_r), \ldots, L(\lambda_r)}_{\alpha_r}) = L(D).\end{aligned}$$

La question précédente permet alors d'écrire $\exp(A) = \exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1} = PL(D)P^{-1}$. Enfin, si on pose $L = \sum_{k=0}^{r-1} a_k X^k$,

$$PL(D)P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{r-1} a_k D^k\right)P^{-1} = \sum_{k=0}^{r-1} a_k\left(PDP^{-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{r-1} a_k A^k = L(A).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A \text{ diagonalisable} \Rightarrow \exp(A) = L(A).}$$

7. Posons $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$. Par définition, $\nu(x) = \lambda x$. Mais alors $\forall i \in \mathbb{N}$, $\nu^i(x) = \lambda^i x$ puis

$$(P(\nu))(x) = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \nu^i\right)(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i \nu^i(x) = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i\right)x = P(\lambda)x.$$

8. **(a)** Puisque ν est diagonalisable, $E = \overset{r}{\underset{k=1}{\oplus}} E_k$. Soit alors $i \in [\![1, r]\!]$.

• Soit $x \in E_i$. Alors $\nu(x) = \lambda_i x$ puis d'après la question précédente et la question 4.a), $(l_i(\nu))(x) = l_i(\lambda_i)x = x$.

• Soient $j \in [\![1, r]\!] \setminus \{i\}$ puis $x \in E_j$. Alors $\nu(x) = \lambda_j x$ puis $(l_i(\nu))(x) = l_i(\lambda_j)x = 0$. Mais alors, par linéarité de $l_i(\nu)$, pour tout x de $\overset{r}{\underset{\substack{k=1\\k\neq i}}{\oplus}} E_k$, $(l_i(\nu))(x) = 0$.

En résumé, pour tout x de E_i, $(l_i(\nu))(x) = x$ et pour tout x de $\overset{r}{\underset{k=1,\ k\neq i}{\oplus}} E_k$, $(l_i(\nu))(x) = 0$. Ceci montre que $l_i(\nu)$ est le projecteur sur E_i parallèlement à $\overset{r}{\underset{\substack{k=1\\k\neq i}}{\oplus}} E_k$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, r]\!],\ l_i(\nu) \text{ est le projecteur sur } E_i \text{ parallèlement à } \overset{r}{\underset{\substack{k=1\\k\neq i}}{\oplus}} E_k.}$$

(b) On en déduit que $\exp(A) = L(A) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} l_i(A)$ où $l_i(A)$ est la matrice de la projection $l_i(\nu)$.

III. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas non diagonalisable

9. On sait qu'un en endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples. Puisque le polynôme $(X-1)^2(X-2)$ est à racines simples, l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable.

10. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ convient.

11. Les polynômes $(X-1)^2$ et $(X-2)$ sont premiers entre eux car sans racine commune dans $\mathbb{C}$. Puisque $(u - id)^2 \circ (u - 2id) = 0$, le théorème de décomposition des noyaux permet alors d'écrire $E = \mathrm{Ker}(u - id)^2 \oplus \mathrm{Ker}(u - 2id)$.

12. Puisque les endomorphismes u et id commutent,

$$p + q = (u - id)^2 + u \circ (2id - u) = u^2 - 2u + id + 2u - u^2 = id.$$

13. D'après la question 12, pour tout x de E, $x = p(x) + q(x) = (u - id)^2(x) + u \circ (2id - u)(x)$ $(*)$. Or $(u - 2id)(p(x)) = (u - 2id) \circ (u - id)^2(x) = 0$ et donc $p(x) \in \mathrm{Ker}(u - 2id)$. De même, $(u - id)^2(q(x)) = (u - id)^2 \circ u \circ (2id - u)(x) = -u((u - id)^2 \circ (u - 2id)(x)) = 0$ (deux polynômes en u commutent) et donc $q(x) = x - p(x) \in \mathrm{Ker}(u - id)^2$.
En résumé, pour tout x de E, $p(x) \in \mathrm{Ker}(u - 2id)$ et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(u - id)^2$. On sait alors que p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - 2id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - id)^2$.
Enfin, puisque $q = id - p$ d'après la question 12, p et q sont des projecteurs associés ou encore q est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - id)^2$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - 2id)$.

14. **(a)** On a vu précédemment que pour tout x de E, $(u - 2id)(p(x)) = 0$.

(b) Par suite, pour tout x de E, $u(p(x)) = 2p(x)$ et donc pour tout x de E et tout entier naturel k, $u^k(p(x)) = 2^k p(x)$ ou encore

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u^k \circ p = 2^k p.}$$

(c) Pour tout entier naturel m, $\left(\sum_{i=0}^{m} \frac{u^i}{i!}\right) \circ p = \sum_{i=0}^{m} \frac{u^i}{i!} \circ p = \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{2^i}{i!}\right) p$. Quand m tend vers $+\infty$, $\left(\sum_{i=0}^{m} \frac{2^i}{i!}\right) p$ tend vers $e^2 p$. Maintenant, l'application $f \mapsto f \circ p$ est un endomorphisme de l'espace de dimension finie $\mathcal{L}(E)$ et donc cette application est continue sur $\mathcal{L}(E)$. Comme à la question 5.b), on en déduit que

$$\exp(u \circ p) = \left(\lim_{m \to +\infty} \sum_{i=0}^{m} \frac{u^i}{i!}\right) \circ p = \lim_{m \to +\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{u^i}{i!}\right) \circ p = e^2 p.$$

$$\boxed{\exp(u) \circ p = e^2 p.}$$

15. Puisque deux polynômes en u commutent pour $k \geqslant 2$,

$$(u - id)^k \circ q = (u - id)^k \circ u(2id - u) = -u \circ (u - id)^{k-2} \circ (u - id)^2 \circ (u - 2id) = u \circ (u - id)^{k-2} \circ 0 = 0.$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ (u - id)^k \circ q = 0.}$$

Comme les endomorphismes id et $u - id$ commutent, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}\exp(u) \circ q &= \exp(id + u - id) \circ q = \exp(id) \circ \exp(u - id) \circ q = (e id) \circ \exp(u - id) \circ q \\ &= e \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}((u - id)^k \circ q) \text{ (par continuité de l'application } f \mapsto f \circ q \text{ sur } \mathcal{L}(E)) \\ &= e(q + (u - id) \circ q) = e\, u \circ q.\end{aligned}$$

$$\boxed{\exp(u) \circ q = e\, u \circ q.}$$

16. D'après la question 12,

$$\begin{aligned}\exp(u) &= \exp(u) \circ (p + q) = \exp(u) \circ p + \exp(u) \circ q = e^2 p + e\, u \circ q = e^2(u - id)^2 + eu \circ u \circ (2id - u) \\ &= -eu^3 + (e^2 + e)u^2 - 2e^2 u + e^2 id \\ &= -e(4u^2 - 5u + 2id) + (e^2 + e)u^2 - 2e^2 u + e^2 id \text{ (car } u^3 - 4u^2 + 5u - 2id = (u - id)^2 \circ (u - 2id) = 0) \\ &= (e^2 - 3e)u^2 + (-2e^2 + 5e)u + (e^2 - 2e)id.\end{aligned}$$

$$\boxed{\exp(u) = (e^2 - 3e)u^2 + (-2e^2 + 5e)u + (e^2 - 2e)id.}$$

IV. Calcul de distances à l'aide de projecteurs orthogonaux

17. On sait que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ où de plus, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de F, $p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$.

18. Soit $x \in E$. On sait que $p_{\text{Vect}(n)}(x) = \dfrac{\langle x, n \rangle}{\|n\|^2} n$. Redémontrons-le. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p_{\text{Vect}(n)} = \lambda n$. Le réel λ est déterminé par la condition $x - \lambda \in n^\perp$ ce qui fournit $\langle x - \lambda \in n, n \rangle = 0$ puis $\lambda = \dfrac{\langle x, n \rangle}{\|n\|^2}$.

On en déduit que $p_H(x) = x - p_{H^\perp}(x) = x - p_{\text{Vect}(n)}(x) = x - \dfrac{\langle x, n \rangle}{\|n\|^2} n$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ p_H(x) = x - \frac{\langle x, n \rangle}{\|n\|^2} n.}$$

19. Une application **(a)** L'application $\varphi\ :\ M \mapsto \text{Tr}(M)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices dont la trace est nulle, est le noyau de φ et est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\langle A, B \rangle = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$. En particulier, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A, I_n \rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \text{Tr}(A).$$

Donc I_n est un élément non nul de $H^\perp$ qui est de dimension 1 puisque H est un hyperplan. On en déduit que

$$\boxed{H^\perp = \text{Vect}(I_n).}$$

(b) D'après les questions 17 et 18,

$$d(M, H) = \|M - p_H(M)\| = \|p_{H^\perp}(M)\| = \left\| \frac{\langle M, I_n \rangle}{\|I_n\|^2} I_n \right\| = \frac{|\langle M, I_n \rangle|}{\|I_n\|} = \frac{|\text{Tr}(M)|}{n}.$$

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d(M, H) = \frac{|\text{Tr}(M)|}{n}.}$$

20. Et pour une norme non euclidienne ? $F = \{\lambda(1,0),\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda,0),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Or, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N_\infty(x - \lambda(1,0)) = N_\infty((1-\lambda,1)) = \max\{|\lambda - 1|, 1\}.$$

Par suite, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N_\infty(x - \lambda(1,0)) \geqslant 1$ avec égalité si et seulement si $|\lambda - 1| \leqslant 1$ ce qui équivaut à $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$. Donc

$$\boxed{d_\infty(x,F) = 1}$$

et les points m de F pour lesquels cette distance est atteinte sont les points du segment d'extrémités $(0,0)$ et $(2,0)$.

