**SESSION 2010**

# CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

## MATHEMATIQUES 1

## PARTIE I

**A)**

**1)** $\chi_f = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 & -7 \\ -8 & -4-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 \\ -8 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$. Par suite, $f$ admet trois valeurs propres simples à savoir $0$, $1$ et $4$ et on sait que $f$ est diagonalisable.

**2)** Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

• $v \in E_0 = \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8x+4y-7z=0 \\ -8x-4y+8z=0 \\ z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=0 \\ y=-2x \end{array}\right.$. Donc $E_0 = \mathrm{Vect}(v_1)$ où $v_1 = (1, -2, 0)$.

• $v \in E_1 = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 7x+4y-7z=0 \\ -8x-5y+8z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-z=-\frac{4}{7}y \\ x-z=-\frac{5}{8}y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=z \end{array}\right.$. Donc $E_1 = \mathrm{Vect}(v_2)$ où $v_2 = (1, 0, 1)$.

• $v \in E_4 = \mathrm{Ker}(f-4\mathrm{Id}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x+4y-7z=0 \\ -8x-8y+8z=0 \\ z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=0 \\ y=-x \end{array}\right.$. Donc $E_4 = \mathrm{Vect}(v_3)$ où $v_3 = (1, -1, 0)$.

Dans la base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$, la matrice de $f$ est $D = \mathrm{diag}(0, 1, 4)$.

**3)** Soit $m \geqslant 1$. Les formules de changement de bases permettent d'écrire $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc en notant $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$A^m = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f^m) = P \times \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_0}(f^m) \times P^{-1} = PD^mP^{-1}.$$

**4)** $\left\{\begin{array}{l} v_1 = e_1 - 2e_2 \\ v_2 = e_1 + e_3 \\ v_3 = e_1 - e_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_2 = -v_1 + v_3 \\ e_1 = -v_1 + 2v_3 \\ e_3 = v_2 - e_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_2 = -v_1 + v_3 \\ e_1 = -v_1 + 2v_3 \\ e_3 = v_1 + v_2 - 2v_3 \end{array}\right.$. Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ puis pour $m \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_0}(f^m) &= A^m = PD^mP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4^m \\ 0 & 0 & -4^m \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 4^m & 4^m & -2\times 4^m + 1 \\ -2\times 4^m & -4^m & 2\times 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall m \geqslant 1,\ \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_0}(f^m) = \begin{pmatrix} 2\times 4^m & 4^m & -2\times 4^m + 1 \\ -2\times 4^m & -4^m & 2\times 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

 

**5)** Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
MD = DM &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & m_{1,2} & 4m_{1,3} \\ 0 & m_{2,2} & 4m_{2,3} \\ 0 & m_{3,2} & 4m_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 4m_{3,1} & 4m_{3,2} & 4m_{3,3} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow m_{1,2} = m_{1,3} = m_{2,1} = m_{2,3} = m_{3,1} = m_{3,2} = 0 \\
&\Leftrightarrow M \in \mathscr{D}_3(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.}}$$

**6)** Soit $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $H^2 = D$.

$$HD = H \times H^2 = H^3 = H^2 \times H = DH.$$

**7)** Si $H^2 = D$ alors $H$ et $D$ commutent d'après la question 6) et donc $H$ est une matrice diagonale d'après la question 5). Réciproquement, soit $H = \text{diag}(a, b, c) \in \mathscr{D}_3(\mathbb{R})$.

$$H^2 = D \Leftrightarrow \text{diag}(a^2, b^2, c^2) = \text{diag}(0, 1, 4) \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } (b = 1 \text{ ou } b = -1) \text{ et } (c = 2 \text{ ou } c = -2).$$

Il y a exactement quatre matrices $H$ telles que $H^2 = D$ à savoir $H_1 = \text{diag}(0, 1, 2)$, $H_2 = \text{diag}(0, -1, 2)$, $H_3 = \text{diag}(0, 1, -2)$ et $H_4 = \text{diag}(0, -1, -2)$.

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
M^2 = A &\Leftrightarrow P{-}1M^2P = P^{-1}AP \Leftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = D \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \{H_1, H_2, H_3, H_4\} \\
&\Leftrightarrow M \in \{PH_1P^{-1}, PH_2P^{-1}, PH_3P^{-1}, PH_4P^{-1}\}.
\end{aligned}$$

- $PH_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- $PH_2P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$
- $PH_3P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- $PH_4P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

La matrice a quatre racines carrées :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

 

**B)**

**1)** $J^2 = 3J$ et donc par récurrence

$$\boxed{\forall m \geqslant 1,\ J^m = 3^{m-1}J.}$$

**2)** On note que $A = I_3 + J$. Soit alors $m \geqslant 1$. Puisque les matrices $I_3$ et $J$ commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned}
A^m &= (I_3+J)^m = I_3^m + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}J^kI_3^{m-k} = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}3^{k-1}\right)J = I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}3^{k}\right)J \\
&= I_3 + \frac{1}{3}\left(\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}3^{k}\right)-1\right)J = I_3 + \frac{1}{3}((3+1)^m-1)J \\
&= I_3 + \frac{1}{3}(4^m-1)J.
\end{aligned}$$

Cette égalité reste vraie quand $m = 0$ car $I_3 + \frac{1}{3}(4^0-1)J = I_3 = A^0$.

$$\boxed{\forall m \geqslant 0,\ f^m = \mathrm{id} + \frac{1}{3}(4^m-1)j.}$$

**3)**

$$\begin{aligned}
\chi_f &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \ (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \\
&= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\
&= (1-\lambda)^2(4-\lambda).
\end{aligned}$$

L'endomorphisme $f$ admet exactement deux valeurs propres distinctes à savoir $\lambda = 1$, valeur propre d'ordre $2$ et $\mu = 4$, valeur propre d'ordre $1$.

**4)** D'après la question 2), pour tout entier naturel $m$, $f^m = 1^m(\mathrm{id} - \frac{1}{3}j) + 4^m\frac{1}{3}j$ et les endomorphismes $p = \mathrm{id} - \frac{1}{3}j$ et $q = \frac{1}{3}j$ conviennent.
Réciproquement, si $\forall m \in \mathbb{N}$, on a $f^m = 1^m p + 4^m q$, on a nécessairement $p + q = f^0 = \mathrm{id}$ et $p + 4q = f^1 = \mathrm{id} + j$ et donc $3q = (\mathrm{id} + j) - \mathrm{id} = j$ puis $q = \frac{1}{3}j$ et enfin $p = \mathrm{id} - q = \mathrm{id} - \frac{1}{3}j$. Ceci montre l'unicité du couple $(p, q)$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ f^m = 1^m p + 4^m q \text{ où } p = \mathrm{id} - \frac{1}{3}j \text{ et } q = \frac{1}{3}j.}$$

Montrons que la famille $(p, q)$ est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\alpha p + \beta q = 0 \Rightarrow \alpha(I_3 + J) + \beta J = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } p \text{ et } q \text{ sont linéairement indépendants.}}$$

**5)** $q^2 = \left(\frac{1}{3}j\right) = \frac{1}{9}j^2 = \frac{3}{9}j = \frac{1}{3}j = q$. Donc, $q$ est un projecteur. Puis $p = \mathrm{id} - q$ est le projecteur associé et donc $p^2 = p$ et $p \circ q = q \circ q = 0$.

$$\boxed{p^2 = p,\ q^2 = q \text{ et } p \circ q = q \circ q = 0.}$$

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ puis $h = \alpha p + \beta q$. Puisque $p$ et $q$ commutent, $h^2 = (\alpha p + \beta q)^2 = \alpha^2 p^2 + 2\alpha\beta p \circ q + \beta^2 q^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$. Puisque la famille $(p, q)$ est libre, on en déduit que

 

$$h^2 = f \Leftrightarrow \alpha^2 p + \beta^2 q = p + 4q \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \text{ et } \beta^2 = 4 \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in \{(1,2), (1,-2), (-1,2), (-1,-2)\}.$$

Il y a donc quatre éléments $h$ de $\text{Vect}(p, q)$ tels que $h^2 = f$ à savoir $h_1 = p + 2q = id + \frac{1}{3}j$, $h_2 = -p + 2q = -id + j$, $h_3 = p - 2q = id - j$ et $h_4 = -p - 2q = -id - \frac{1}{3}j$.

**6)** Si on pose $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$, on a $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2$ et $f(v_3) = 4v_3$. De plus, si $P$ est la matrice de la famille $(v_1, v_2, v_3)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$, $\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$. Donc $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de $f$. On en déduit que $f$ est diagonalisable.

$q(v_1) = \frac{1}{3}j(v_1) = 0$, $q(v_2) = 0$ et $q(v_3) = v_3$ et donc $\text{mat}_{\mathscr{B}}(q) = \text{diag}(0, 0, 1)$ puis $\text{mat}_{\mathscr{B}}(p) = I_3 - \text{mat}_{\mathscr{B}}(q) = \text{diag}(1, 1, 0)$.

Si $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$ puis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$, $\text{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \text{diag}(1, 1, 4)$, $\text{mat}_{\mathscr{B}}(p) = \text{diag}(1, 1, 0)$ et $\text{mat}_{\mathscr{B}}(q) = \text{diag}(0, 0, 1)$.

**7)** La matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice de la symétrie échangeant $e_1$ en $e_2$ et $e_2$ en $e_1$) vérifie $K^2 = I_2$ et donc la matrice $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie $Y^2 = \text{diag}(1, 1, 4) = D$.

**8)** D'après la question précédente, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\text{mat}_{\mathscr{B}}(\alpha p + \beta q) = \text{diag}(\alpha, \alpha, \beta)$. En particulier, $\text{mat}_{\mathscr{B}}(\alpha p + \beta q)$ est une matrice diagonale. Si maintenant $h$ est l'endomorphisme de matrice $Y$ dans la base $\mathscr{B}$, alors $h^2 = f$ car $Y^2 = D$ mais $h$ n'est pas une combinaison linéaire de $p$ et $q$ car $Y$ n'est pas diagonale.

**9)** Puisque $f$ est diagonalisable, $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_4$ où $E_1 = \text{Ker}(f - id)$ et $E_4 = \text{Ker}(f - 4id)$.
Soit $h$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $h^2 = f$. Alors $h$ et $f$ commutent et on sait que $E_1$ et $E_4$ sont stables par $h$ ou encore $h_{/E_1} \in \mathscr{L}(E_1)$ et $h/E_4 \in \mathscr{L}(E_4)$.
On en déduit déjà que $h(v_3) \in E_4 = \text{Vect}(v_3)$ et donc que $v_3$ est un vecteur propre de $h$. D'autre part, $h^2_{/E_1} = f_{/E_1} = id_{E_1}$. Donc $h_{/E_1}$ est une symétrie de $E_1$ et en particulier est diagonalisable. Si on note $(v'_1, v'_2)$ une base de $E_1$ constituée de vecteurs propres de $h_{/E_1}$, alors $(v'_1, v'_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (car $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_4$) constituée de vecteurs propres de $h$. On en déduit que $h$ est diagonalisable.

Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $h^2 = f$ est diagonalisable.

## PARTIE II

**1)**

$$\begin{aligned}(f - \lambda id) \circ (f - \mu id) &= f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda\mu id = (\lambda^2 p + \mu^2 q) - (\lambda + \mu)(\lambda p + \mu q) + \lambda\mu(p + q) \\ &= (\lambda^2 - \lambda(\lambda + \mu) + \lambda\mu)p + (\mu^2 - \mu(\lambda + \mu) + \lambda\mu)q = 0.\end{aligned}$$

$$\boxed{(f - \lambda id) \circ (f - \mu id) = 0.}$$

Le polynôme $(X - \lambda)(X - \mu)$ est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et annulateur de $f$. On en déduit que $f$ est diagonalisable.

**2)** Les valeurs propres d'un endomorphisme sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur. Donc $\text{Sp}(f) \subset \{\lambda, \mu\}$. Vérifions alors que $\lambda$ et $\mu$ sont effectivement valeurs propres de $f$.

Si $\lambda$ n'est pas valeur propre de $f$, alors $f - \lambda id$ est inversible et l'égalité $(f - \lambda id) \circ (f - \mu id) = 0$ fournit après simplification $f - \mu id = 0$ ou encore $f = \mu id$. On en déduit que $\lambda p + \mu q = \mu p + \mu q$ puis que $(\lambda - \mu)p = 0$ ce qui est absurde puisque $\lambda \neq \mu$ et $p \neq 0$. Donc $\lambda$ est valeur propre de $f$.
De même, si $\mu$ n'est pas valeur propre de $f$, on en déduit que $f = \lambda id$ puis que $(\lambda - \mu)q = 0$ ce qui n'est pas. Finalement

$$\boxed{\text{Sp}(f) = \{\lambda, \mu\}.}$$

 

**3)** L'égalité $(f-\lambda\mathrm{id})\circ(f-\mu\mathrm{id})=0$ s'écrit $(\lambda p+\mu q-\lambda(p+q))\circ(\lambda p+\mu q-\mu(p+q))=0$ ou encore $-(\mu-\lambda)^2 q\circ p=0$ et donc $q\circ p=0$. Puisque des polynômes en $f$ commutent, on a aussi $(f-\mu\mathrm{id})\circ(f-\lambda\mathrm{id})=0$ ce qui fournit $p\circ q=0$.

Puisque $\mathrm{id}=p+q$, $p=p\circ\mathrm{id}=p\circ(p+q)=p^2$ et de même $q=q\circ(p+q)=q^2$.

$$\boxed{p^2=p,\ q^2=q \text{ et } p\circ q=q\circ p=0.}$$

**4)** On en déduit que

$$(\lambda p+\mu q)\circ\left(\frac{1}{\lambda}p+\frac{1}{\mu}q\right)=p+q=\mathrm{id}.$$

Par suite, $f$ est inversible à droite et donc inversible car $\dim(\mathbb{R}^3)<+\infty$ et $f^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}p+\dfrac{1}{\mu}q$.

$$\boxed{f\in\mathscr{GL}(\mathbb{R}^3) \text{ et } f^{-1}=\frac{1}{\lambda}p+\frac{1}{\mu}q.}$$

**5)** Puisque $p^2=p$, on a plus généralement $\forall m\in\mathbb{N}^*$, $p^m=p$ et de même $\forall m\in\mathbb{N}^*$, $q^m=q$.
Soit $m\geqslant 2$. Puisque $p$ et $q$ commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$f^m=(\lambda p+\mu q)^m=\lambda^m p^m+\sum_{k=1}^{m-1}\binom{m}{k}p^k q^{m-k}+\mu^m q^m=\lambda^m p+p\circ q\sum_{k=1}^{m-1}\binom{m}{k}p^{k-1}q^{m-k-1}+\mu^m q=\lambda^m p+\mu^m q.$$

Cette formule reste claire quand $m=1$ ou $m=0$. Soit maintenant $m<0$. Le même calcul fournit

$$f^m=(f^{-1})^{-m}=\left(\frac{1}{\lambda}p+\frac{1}{\mu}q\right)^{-m}=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-m}+\left(\frac{1}{\mu}\right)^{-m}q=\lambda^m p+\mu^m q.$$

Finalement

$$\boxed{\forall m\in\mathbb{Z} \text{ et } f^m=\lambda^m p+\mu^m q.}$$

**6)** Montrons que la famille $(p,q)$ est libre. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$$\alpha p+\beta q=0\Rightarrow p\circ(\alpha p+\beta q)=0\Rightarrow \alpha p^2+\beta p\circ q=0\Rightarrow \alpha p=0\Rightarrow \alpha=0 \text{ (car } p\neq 0).$$

Il reste $\beta q=0$ et donc $\beta=0$. Ainsi, la famille $(p,q)$ est libre et donc $\dim F=2$.

**7)** Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ puis $h=\alpha p+\beta q$.

$$\begin{aligned}h^2=f&\Leftrightarrow(\alpha p+\beta q)^2=\lambda p+\mu q\Leftrightarrow\lambda^2p+\mu^2q=\lambda p+\mu q\\&\Leftrightarrow \alpha^2=\lambda \text{ et } \beta^2=\mu \text{ (car la famille } (p,q) \text{ est libre)}\\&\Leftrightarrow(\alpha,\beta)\in\{(\sqrt{\lambda},\sqrt{\mu}),(-\sqrt{\lambda},\sqrt{\mu}),(\sqrt{\lambda},-\sqrt{\mu}),(-\sqrt{\lambda},-\sqrt{\mu})\}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{R}(f)\cap F=\{\pm\sqrt{\lambda}p\pm\sqrt{\mu}q\}.}$$

**8)** La matrice définie par blocs par $K_k=\begin{pmatrix}K_2&0\\0&I_{k-2}\end{pmatrix}$ où $K_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ n'est pas diagonale et vérifie $K_k^2=I_k$.

**9)** Puisque $f$ est diagonalisable et que les valeurs propres de $f$ sont $\lambda$ et $\mu$, on a $E=E_\lambda\oplus E_\mu$ où $E_\lambda=\mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{id})$ et $E_\mu=\mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{id})$.
Les égalités $p+q=\mathrm{id}$ et $\lambda p+\mu q=f$ fournissent $p=\dfrac{1}{\lambda-\mu}(f-\mu\mathrm{id})$. On en déduit que si $x$ est un élément de $E_\lambda$, on a $p(x)=\dfrac{1}{\lambda-\mu}(\lambda x-\mu x)=x$ et si $x$ est un élément de $E_\mu$, on a $p(x)=\dfrac{1}{\lambda-\mu}(\mu x-\mu x)=0$. Donc $p$ est la projection sur $E_\lambda$ parallèlement à $E_\mu$ puis $q=\mathrm{id}-p$ est la projection sur $E_\mu$ parallèlement à $E_\lambda$.
On note $\mathscr{B}_1=(e_1,\dots,e_k)$ une base de $E_\lambda$ et $\mathscr{B}_2=(e_{k+1},\dots,e_n)$ une base de $E_\mu$ de sorte que $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $E$. $k$ est la dimension de $E_\lambda$ et donc aussi l'ordre de multiplicité de $\lambda$ car $f$ est diagonalisable. Par hypothèse, $k\geqslant 2$.

 

Soit alors $p'$ l'endomorphisme de $E$ tel que $M = \text{mat}_{\mathscr{B}}(p') = \begin{pmatrix} K_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k,n-k} \end{pmatrix}$. On a $M^2 = \begin{pmatrix} I_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k} \end{pmatrix} = \text{diag}(\underbrace{1\ldots1}_{k}0\ldots0) = \text{mat}_{\mathscr{B}}(p)$ et donc $p'^2 = p$.

Ensuite, $\text{mat}_{\mathscr{B}}(p') \times \text{mat}_{\mathscr{B}}(q) = \begin{pmatrix} K_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k,n-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_{k,k} & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & I_{n-k} \end{pmatrix} = 0_n = \text{mat}_{\mathscr{B}}(q) \times \text{mat}_{\mathscr{B}}(p')$. Donc $p' \circ q = q \circ p' = 0$.

En résumé, $p'$ est un endomorphisme de $E$ tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$. Maintenant $p' \notin F$ car la matrice de tout élément de $F$ dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale alors que la matrice de $p'$ dans la base $\mathscr{B}$ ne l'est pas.

**10)** Soit $h = \sqrt{\lambda}p' + \sqrt{\mu}q$. Alors $h^2 = \lambda p'^2 + \sqrt{\lambda\mu}p' \circ q + \sqrt{\lambda\mu}q \circ p' + \mu q^2 = \lambda p + \mu q = f$. Donc $h \in \mathcal{R}(f)$. Mais $h \notin F$ car sinon $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}(h - \sqrt{\mu}q) = p' \in F$ ce qui n'est pas.

$$\boxed{\mathcal{R}(f) \not\subset F.}$$

## PARTIE III

**1)** Soit $P = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Alors

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k = \sum_{k=0}^{\ell} a_k \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{\ell} a_k\lambda_i^k\right)p_i = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i)p_i.$$

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i)p_i.}$$

**2)** En appliquant au polynôme $P = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$, on obtient $\prod_{i=1}^{m}(f - \lambda_i id) = P(f) = 0$ et puisque $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, $f$ est diagonalisable.

**3)** Soit $\ell \in [\![1, m]\!]$. $L_\ell(\lambda_\ell) = \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ i\neq\ell}} \dfrac{\lambda_\ell - \lambda_i}{\lambda_\ell - \lambda_i} = 1$ et pour $j \neq \ell$, $L_\ell(\lambda_j) = \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ i\neq\ell}} \dfrac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_\ell - \lambda_i} = (\lambda_j - \lambda_j)\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ i\neq j,\ i\neq\ell}} \dfrac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_\ell - \lambda_i} = 0$.
En résumé, $\forall j \in [\![1, m]\!]$, $L_\ell(\lambda_j) = \delta_{j,\ell}$. En appliquant l'égalité de 1) au polynôme $L\ell$, on obtient $L_\ell(f) = p_\ell$.

$$\boxed{\forall \ell \in [\![1, m]\!],\ p_\ell = L_\ell(f).}$$

Soit $\ell \in [\![1, m]\!]$. $(f - \lambda_\ell id) \circ p_\ell = (f - \lambda_\ell id) \circ L_\ell(f) = \prod_{i=1}^{m}(f - \lambda_i id) = 0$ et donc $\forall x \in E$, $(f - \lambda_\ell id)(p_\ell(x)) = 0$ puis $\text{Im}(p_\ell) \subset \text{Ker}(f - \lambda_\ell id)$.

Puisque les valeurs propres de $f$ sont à choisir parmi les racines du polynôme annulateur $\prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$, on a déjà $\text{Sp}(f) \subset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Réciproquement, soit $\ell \in [\![1, m]\!]$. Si $\lambda_\ell \notin \text{Sp}(f)$, alors $\text{Im}(p_\ell) \subset \text{Ker}(f - \lambda_\ell id) = \{0\}$ puis $p_\ell = 0$ ce qui n'est pas. Donc $\lambda_\ell \in \text{Sp}(f)$.

$$\boxed{\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}.}$$

**4)** Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$.

$$p_i \circ p_j = L_i(f) \circ L_j(f) = (L_i \times L_j)(f) = \sum_{k=1}^{m} (L_iL_j)(\lambda_k)p_i.$$

Si $i \neq j$, pour chaque $k \in [\![1, m]\!]^2$, on a $k \neq i$ ou $k \neq j$ et donc $\forall k \in [\![1, m]\!]$, $(L_iL_j)(\lambda_k) = 0$ puis $p_i \circ p_j = 0$.
Si $i = j$, pour $k \neq i$, $L_i^2(\lambda_k) = 0$ et pour $k = i$, on a $L_i^2(\lambda_k) = 1^2 = 1$. Donc $p_i \circ p_i = p_i$.

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, m]\!]^2,\ p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ p_i \text{ si } i = j \end{cases}.}$$

 

**5)** Puisque $f$ est diagonalisable et que les valeurs propres de $f$ sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, on sait que $E = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id})$. De plus, $\mathrm{id} = \sum_{k=1}^{m} p_k$ et donc

$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ \forall x \in E,\ x = p_i(x) + \sum_{j \neq i} p_j(x)$$

avec $p_i(x) \in \mathrm{Im}(p_i) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id})$ et $\sum_{j \neq i} p_j(x) \in \sum_{j \neq i} \mathrm{Im}(p_j) \subset \sum_{j \neq i} \mathrm{Ker}(f - \lambda_j \mathrm{id})$. Donc, $p_i$ est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id})$ parallèlement à $\sum_{j \neq i} \mathrm{Ker}(f - \lambda_j \mathrm{id})$ ou encore

$$\boxed{\text{les } p_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m, \text{ sont les projecteurs associés à la décomposition } E = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}).}$$

**6)** Montrons que la famille $(p_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ est libre. Soit $(\alpha_j)_{1 \leqslant j \leqslant m} \in \mathbb{R}^m$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \alpha_j p_j = 0 &\Rightarrow \forall i \in [\![1, m]\!],\ p_i \circ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j p_j = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, m]\!],\ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j p_i \circ p_j = 0 \\
&\Rightarrow \forall i \in [\![1, m]\!],\ \alpha_i p_i = 0 \text{ (d'après 4))} \\
&\Rightarrow \forall i \in [\![1, m]\!],\ \alpha_i = 0 \text{ (car } p_i \neq 0).
\end{aligned}$$

Donc la famille $(p_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ est libre et

$$\boxed{\dim(F) = m.}$$

**7)** Soient $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbb{R}^m$ puis $h = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i \in F$. $\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i\right)^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \alpha_i \alpha_j p_i \circ p_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 p_i$ et donc, puisque la famille $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ est libre,

$$h^2 = f \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 p_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, m]\!],\ \alpha_i^2 = \lambda_i \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, m]\!],\ \alpha_i = \pm\sqrt{\lambda_i}.$$

$$\boxed{\mathcal{R}(f) \cap F = \{\pm\sqrt{\lambda_1} p_1 \ldots \pm \sqrt{\lambda_m} p_m\}.}$$

**8)** **8.1)** Puisque $f$ a $n$ valeurs propres deux à deux distinctes, on sait que les sous-espaces propres de $f$ sont des droites vectorielles et donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id})) = 1$.

**8.2)** Soit $h \in \mathcal{R}(f)$. Puisque $h^2 = f$, $h$ et $f$ commutent et les sous-espaces propres de $f$ sont stables par $h$. Soient $i \in [\![1, n]\!]$ puis $e_i$ un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda_i$. Donc $e_i \neq 0$ puis $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(e_i)$. Mais alors

$$h(e_i) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(e_i),$$

et il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $h(e_i) = \mu_i e_i$. Donc tout vecteur propre de $f$ est enccore vecteur propre de $h$.

**8.3)** Soit $h \in \mathcal{R}(f)$. Avec les notations de la question précédente, $(e_1, \ldots, e_n)$ étant une base de $E$ formée de vecteurs propres de $f$ associés à la famille de valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,

$$h^2 = f \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ h^2(e_i) = f(e_i) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mu_i^2 e_i = \lambda_i e_i \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mu_i^2 = \lambda_i.$$

Si l'un des $\lambda_i$ est dans $]0, +\infty[$, le problème n'a pas de solution et $\mathcal{R}(f) = \varnothing$. Supposons maintenant que tous les $\lambda_i$ sont positifs ou nuls.

$$\begin{aligned}
h^2 = f &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists \varepsilon_i \in \{-1, 1\}/\ \mu_i = \varepsilon_i \sqrt{\lambda_i} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists \varepsilon_i \in \{-1, 1\}/\ h(e_i) = \varepsilon_i \sqrt{\lambda_i} e_i \\
&\Leftrightarrow \exists (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \{-1, 1\}^n /\ h = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\lambda_i} p_i\ .
\end{aligned}$$

($\Rightarrow$ est vraie car les endomorphismes $h$ et $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\lambda_i} p_i$ coïncident sur une base de $E$).

 

Dans ce deuxième cas, on a $\mathcal{R}(f) \neq \varnothing$ et $\mathcal{R}(f) \subset F$.

$$\boxed{\mathcal{R}(f) \subset F \text{ et } \mathcal{R}(f) \neq \varnothing \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \geqslant 0.}$$

**9)** Soit $\mathscr{B} = (e_{1,1}, \ldots, e_{1,\beta_1}, \ldots, e_{m,1}, \ldots, e_{m,\beta_m})$ une base de $E$ adaptée à la décomposition $E = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i id)$ (pour $1 \leqslant i \leqslant m$, $\beta_i$ désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda_i$). La matrice de chaque $p_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$ dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale et donc la matrice dans $\mathscr{B}$ de tout élément de $F$ est diagonale car une combinaison linéaire de matrices diagonales est diagonale.

Construisons alors un endomorphisme $h$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ n'est pas diagonale et vérifiant $h^2 = f$. Puisque $m < n$ et que $\beta_1 + \ldots + \beta_m = n$, l'un au moins des $\beta_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, est supérieur ou égal à 2. Supposons par exemple $\beta_1 \geqslant 2$. Soit $h$ l'endomorphisme de $E$ tel que $h(e_{1,1}) = \sqrt{\lambda_1} e_{1,2}$, $h(e_{1,2}) = \sqrt{\lambda_1} e_{1,1}$ et $h(e_{i,j} = \sqrt{\lambda_i} e_{i,j}$ si $(i,j) \notin \{(1,1),(1,2)\}$. La matrice de $h$ dans $\mathscr{B}$ n'est pas diagonale et donc $h \notin F$. Mais pour tout couple $(i,j)$, $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant \beta_i$, $h^2(e_{i,j}) = \lambda_i e_{i,j} = f(e_{i,j})$ et donc $h^2 = f$ ou encore $h \in \mathcal{R}(f)$.

On a montré que si $m < n$ et tous les $\lambda_i$ sont positifs ou nuls, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

# PARTIE IV

**A)**

**1)** Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Supposons la famille $(f^i(x))_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$ liée. Donc il existe $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant p-1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i f^i(x) = 0$. Soit $k = \mathrm{Min}\{i \in [\![0, p-1]\!] /\ \alpha_i \neq 0$. Alors $\displaystyle\sum_{i=k}^{p-1} \alpha_i f^i(x) = 0$ puis $f^{p-1-k}\left(\displaystyle\sum_{i=k}^{p-1} \alpha_i f^i(x)\right) = 0$ et donc $\alpha_k f^{p-1}(x) = 0$ car pour $i \geqslant p$, $f^i = 0$. Mais l'égalité $\alpha_k f^{p-1}(x) = 0$ est absurde car $\alpha_k \neq 0$ et $f^{p-1}(x) \neq 0$. Donc la famille $(f^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre.

Puisque le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace, on en déduit que $p \leqslant n$ puis que $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0$.

$$\boxed{p \leqslant n \text{ et } f^n = 0.}$$

**2)** Supposons qu'il existe $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $h^2 = f$. Alors $h^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0$ et $h^{2p} = f^p = 0$. Donc $h$ est nilpotent d'indice $p' = 2p - 1$ ou $2p$. On en déduit que $2p - 1 \leqslant n$ ou $2p \leqslant n$ et donc $2p - 1 \leqslant n$ (car $2p \leqslant n \Rightarrow 2p - 1 \leqslant n$).

$$\boxed{\text{Si } \mathcal{R}(f) \neq \varnothing, \text{ alors } 2p - 1 \leqslant n.}$$

**3)** On sait que quand $x$ tend vers 0,

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{1/2} x^k + O(x^n)$$

où, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\binom{k}{1/2} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{2} - (k-1)\right)}{k!} = \frac{1}{2^k k!} 1 \times (-1) \times (-3) \times \ldots \times (-(2k-3)) \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (2k-3) \times (2k-2)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2k-2)} = \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1} k!(k-1)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{a_0 = 1 \text{ et } \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1}.}$$

**4)** En élevant au carré, on obtient $1 + x = P_n^2(x) + 2O(x^n)P_n(x) + (O(x^n))^2 = P_n^2(x) + O(x^n)(2P_n(x) + O(x^n)) = P_n^2(x) + x^n O(1)(2P_n(x) + O(x^n))$ et donc $P_n^2(x) - x - 1 = -x^n O(1)(2P_n(x) + O(x^n)) = x^n O(1)$. Donc $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \eta(x)$ où $\eta$ est une fonction bornée au voisinage de 0.

Notons $Q$ et $R$ le quotient et le reste de la division euclidienne de $P_n^2 - X - 1$ par $X^n$. On a donc $\deg(R) \leqslant n - 1$ et $x^n Q(x) + R(x) = x^n \eta(x)$ puis pour $x \neq 0$, $\eta(x) = Q(x) + \dfrac{R(x)}{x^n}$. Si maintenant $R \neq 0$, il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tels que $R(x) \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x^k$ puis $\dfrac{R(x)}{x^n} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{\alpha}{x^{n-k}}$ avec $n - k > 0$. On en déduit que $Q(x) + \dfrac{R(x)}{x^n}$ n'est pas bornée au voisinage de 0 ce qui est absurde. Donc $R = 0$ et $X^n$ divise le polynôme $P_n^2 - X - 1$.

$$\boxed{X^n \text{ divise le polynôme } P_n^2 - X - 1.}$$

 

**5)** Soit $h = P_n(f)$. $h^2 = P_n(f)^2 = f + id + f^n Q(f) = f + id$. Donc $P_n(f) \in \mathcal{R}(f + id)$ et $\mathcal{R}(f + id) \neq \varnothing$. Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_n(\alpha f)^2 = \alpha f + id + \alpha^n f^n Q(\alpha f) = \alpha f + id$ et donc $\mathcal{R}(\alpha f + id) \neq \varnothing$.

De même, pour $\beta \in ]0, +\infty[$, $\left(\sqrt{\beta} P_n\left(\frac{1}{\beta} f\right)\right)^2 = \beta\left(\frac{1}{\beta} f + id + \frac{1}{\beta^n} f^n Q\left(\frac{1}{\beta} f\right)\right) = f + \beta id$ et $\mathcal{R}(f + \beta id) \neq \varnothing$.

**B)**

**1)** Soit $f$ l'endomorphisme de matrice $T$ dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ puis $g = f - \lambda id$. Donc $g(e_1) = 0$ et $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $g(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{i-1})$. Montrons alors par récurrence que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $g^k(e_i) = 0$.

- $g(e_1) = 0$ et la propriété est vraie quand $k = 1$.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $g^k(e_i) = 0$ alors $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $g^{k+1}(e_i) = 0$ et d'autre part $g^{k+1}(e_{k+1}) = g^k(g(e_{k+1})) \in \text{Vect}(g^k(e_1), \ldots, g^k(e_k)) = \{0\}$. Donc $\forall i \in [\![1, k+1]\!]$, $g^{k+1}(e_i) = 0$.

Le résultat est démontré par récurrence. On en déduit en particulier que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $g^n(e_i) = 0$. L'endomorphisme $g^n$ s'annule sur une base de $\mathbb{R}^n$ et donc $g^n = 0$ ou encore

$$\boxed{(T - \lambda I_n)^n = 0.}$$

**2)** Par hypothèse, $\chi_f = (X - \lambda)^n$. Puisque $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{R}$, on sait que $f$ est triangulable et il existe donc une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ noté $T$ est une matrice du type de la question 1). Puisque $(T - \lambda I_n)^n = 0$, on en déduit que $(f - \lambda id)^n = 0$ et donc que

$$\boxed{E = \text{Ker}(f - \lambda id)^n.}$$

**3)** $f = g + \lambda id$ ou $g = f - \lambda id$ est un endomorphisme nilpotent d'indice inférieur ou égal à $n$. Puisque $\lambda > 0$, la question A)5) permet d'affirmer que $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(g + \lambda id) \neq \varnothing$.

 