

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE 1

1. Pour $n \geq 2$, on pose $a_n = \frac{2}{n^2 - 1}$. La suite $(a_n)_{n \geq 2}$ et pour $n \geq 2$, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2 - 1}{(n+1)^2 - 1}$.

Par suite, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} = 1$. D'après la règle de d'ALEMBERT, $R = 1$.

$$R = 1.$$

2. Soit $x \in]-1, 1[$.

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (\text{puisque } |x| < 1, \text{ les deux séries convergent}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$xS(x) = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x + \frac{x^2}{2} = (1-x^2) \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}.$$

Donc si $x \neq 0$, $S(x) = \frac{(1-x^2) \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{x}$ et d'autre part, $S(0) = 0$.

$$\forall x \in]-1, 1[, S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{(1-x^2) \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{x} & \text{si } x \in]-1, 1[\setminus\{0\} \end{cases}.$$

3. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $(1-x^2) \ln(1-x) = (1+x)(1-x) \ln(1-x) \rightarrow 0$ d'après un théorème de

croissances comparées. Par suite, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} S(x) = \frac{0 + 1 + \frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} S(x) = \frac{3}{2}.$$

Remarque. Pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \geq 2$, $|a_n x^n| \leq \frac{2}{n^2 - 1}$. Comme $\frac{2}{n^2 - 1}$ est le terme général d'une série numérique convergente, la série de fonctions de terme général $x \mapsto a_n x^n$, $n \geq 2$, converge normalement et donc uniformément vers la fonction S sur $[-1, 1]$. Puisque chacune de ces fonctions est continue sur $[-1, 1]$, la somme S est une fonction définie et continue sur $[-1, 1]$ et donc

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} S(x) &= S(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

EXERCICE 2

1. Sur $]0, +\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' - \frac{3}{2x}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Les deux fonctions $x \mapsto -\frac{3}{2x}$ et $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sont continues sur $]0, +\infty[$. Donc les solutions de (E) sur I constituent un \mathbb{R} -espace affine de dimension 1.

Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur }]0, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0, f'(x) - \frac{3}{2x}f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \forall x > 0, e^{-\frac{3}{2}\ln(x)}f'(x) - \frac{3}{2x}e^{-\frac{3}{2}\ln(x)}f(x) = \frac{e^{-\frac{3}{2}\ln(x)}}{2\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0 \left(\left(\frac{f}{x^{3/2}} \right)' (x) = \frac{1}{2x^2} \right) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x > 0, \frac{f(x)}{x^{3/2}} = -\frac{1}{2x} + C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x > 0, f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + Cx\sqrt{x}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{]0, +\infty[} = \left\{ x \mapsto -\frac{\sqrt{x}}{2} + Cx\sqrt{x}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Soit f une éventuelle solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Nécessairement, $f(0) = 0$ (fourni par (E)) et $\exists C \in \mathbb{R} / \forall x > 0, f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + Cx\sqrt{x}$. En résumé, nécessairement, $\exists C \in \mathbb{R} / \forall x \geq 0, f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + Cx\sqrt{x}$.

Soient $C \in \mathbb{R}$ puis f une fonction du type précédent. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\sqrt{x}}{2}$ et donc f n'est pas dérivable en 0. Ainsi, aucune des fonctions précédentes n'est dérivable en 0 et donc aucune des fonctions précédentes ne peut être solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

$$\mathcal{S}_{]0, +\infty[} = \emptyset.$$

PROBLÈME AUTOUR DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

1. Question préliminaire

(a) Si la fonction f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et positive sur $[a, +\infty[$, on sait que

f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si la fonction F a une limite réelle en $+\infty$.

(b) Si la fonction f n'est pas de signe constant au voisinage de $+\infty[$, on sait que

si f est intégrable sur $[a, +\infty[$ alors la fonction F a une limite réelle en $+\infty$,

mais l'implication contraire est fausse.

PARTIE I : Exemples et propriétés

2. (a) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

- La fonction nulle est dans E.
- Soient $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Tout d'abord, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur \mathbb{R}^+ en tant que combinaisons linéaires de fonctions continues sur \mathbb{R}^+ . Ensuite, pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-xt} = \lambda f(t)e^{-xt} + \mu g(t)e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ en tant que combinaisons linéaires de fonctions intégrables sur \mathbb{R}^+ . Finalement, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dans E.

On a montré que

$$E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}).$$

(b) • La fonction nulle est continue et bornée sur \mathbb{R}^+ et donc $0 \in F$.

- Soit $f \in F$. f est continue sur \mathbb{R}^+ et pour $x > 0$, $f(t)e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(e^{-xt}) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $\forall x > 0$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ . En résumé, $f \in F$. On a montré que $F \subset E$.

• Soient $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur \mathbb{R}^+ . D'autre part, si M_1 et M_2 désignent des majorants de $|f|$ et $|g|$ respectivement sur \mathbb{R}^+ , alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $|\lambda f(t) + \mu g(t)| \leq |\lambda|M_1 + |\mu|M_2$. Donc la fonction $\lambda f + \mu g$ est bornée sur \mathbb{R}^+ et finalement $\lambda f + \mu g$ est dans F .

On a montré que

F est un sous-espace vectoriel de E.

(c) Soient $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour $x > 0$, les fonctions $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto g(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$ et

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(x) \int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-xt} dt = \lambda \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt + \mu \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt = (\lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g))(x).$$

Donc, $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$. On a montré que

$\mathcal{L} \in \mathcal{L}(E, \mathcal{F}(\mathbb{R}_*, \mathbb{R}))$.

3. (a) Puisque \mathcal{U} est continue et bornée sur \mathbb{R}^+ , $\mathcal{U} \in F$. Soit $x > 0$.

$$\mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{x} \text{ (car } x > 0 \text{)}.$$

$\forall x > 0, \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \frac{1}{x}$.

(b) Soit $\lambda \geq 0$. Puisque h_λ est continue et bornée sur \mathbb{R}^+ , $h_\lambda \in F$. Soit $x > 0$.

$$\mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+x)t} dt = \left[-\frac{e^{-(\lambda+x)t}}{\lambda+x} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{\lambda+x} \text{ (car } \lambda+x > 0 \text{)}.$$

$\forall \lambda \geq 0, \forall x > 0, \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \frac{1}{\lambda+x}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction g_n est continue sur \mathbb{R}^+ .

Soit $x > 0$. $t^n e^{-xt} \times e^{\frac{x}{2}t} = t^n e^{-\frac{x}{2}t} \rightarrow 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geq A, t^n e^{-xt} \times e^{\frac{x}{2}t} \leq 1$.

Pour $t \geq A$, on a $|g_n(t)e^{-xt}| = |f(t)|t^n e^{-xt} \leq |f(t)|e^{-\frac{x}{2}t}$. Comme la fonction f est dans E et que $\frac{x}{2} > 0$, la fonction $t \mapsto |f(t)|e^{-\frac{x}{2}t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ et il en est de même de la fonction $t \mapsto g_n(t)e^{-xt}$.

Ainsi, $\forall x > 0$, la fonction $t \mapsto g_n(t)e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ et finalement $g_n \in E$.

$\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in E$.

5. Transformée de Laplace d'une dérivée

La fonction f' est continue sur \mathbb{R}^+ et positive sur \mathbb{R}^+ car la fonction f est croissante sur \mathbb{R}^+ . Soit $x > 0$.

Soit $A > 0$, les deux fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto -e^{-xt}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$x \int_0^A f(t)e^{-xt} dt = [-f(t)e^{-xt}]_0^A + \int_0^A f'(t)e^{-xt} dt = f(0) - f(A)e^{-xA} + \int_0^A f'(t)e^{-xt} dt.$$

La fonction f est dans E et donc la fonction $A \mapsto x \int_0^A f(t)e^{-xt} dt$ a une limite réelle quand A tend vers $+\infty$ à savoir $x\mathcal{L}(f)(x)$. Ensuite, puisque f est bornée, $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A)e^{-xA} = 0$.

Puisque $\forall A > 0, \int_0^A f'(t)e^{-xt} dt = x \int_0^A f(t)e^{-xt} dt - f(0) + f(A)e^{-xA}$, la fonction $A \mapsto x \int_0^A f'(t)e^{-xt} dt$ a une limite réelle quand A tend vers $+\infty$ à savoir $x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

Puisque la fonction f' est positive sur \mathbb{R}^+ , on en déduit que la fonction $t \mapsto f'(t)e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ et donc que $f' \in E$ puis que $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

6. Régularité d'une transformée de Laplace

(a) Soit $f \in E$. Soit $a > 0$. Soit $\Phi : \begin{matrix} [a, +\infty[\times [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & f(t)e^{-xt} \end{matrix}$.

- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.
- La fonction Φ admet sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x et

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -tf(t)e^{-xt} = -g_1(t)e^{-xt}.$$

- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ (car $g_1 \in E$).

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[a, +\infty[$.

- Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| = |g_1(t)|e^{-xt} \leq |g_1(t)|e^{-at} = \varphi_1(t)$ où la fonction φ_1 est une fonction continue par morceaux, positive, indépendante de x et intégrable sur $[0, +\infty[$ (car $g_1 \in E$).

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$, on a montré que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$(\mathcal{L}(f))'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(f(t)e^{-xt}) dt = - \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt} dt = -\mathcal{L}(g_1)(x).$$

(b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}(f) \in C^n(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et que $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$.

• C'est vrai pour $n = 1$ d'après la question précédente.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{L}(f) \in C^n(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et que $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$.

La fonction g_n est dans E d'après la question 4. D'après la question 6.a), la fonction $(-1)^n \mathcal{L}(g_n)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ ou encore la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^{n+1} sur $]0, +\infty[$. De plus, $\mathcal{L}(f)^{(n+1)} = (-1)^n (\mathcal{L}(g_n))' = (-1)^{n+1} \mathcal{L}(tg_n) = (-1)^{n+1} \mathcal{L}(g_{n+1})$.

On a montré par récurrence que

$$\forall f \in E, f \in C^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n).$$

PARTIE II : Comportements asymptotiques de la transformée de LAPLACE

7. (a) f est dans F et donc f est continue et bornée sur $[0, +\infty[$. Soit $x > 0$.

$$|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt} dt \leq \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{\|f\|_\infty}{x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\|f\|_\infty}{x} = 0$, on a montré que

$$\forall f \in F, \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0.$$

(b) *Théorème de la valeur initiale*

f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ , croissante et bornée sur \mathbb{R}^+ . D'après la question la question 5, $\forall x > 0$, $x\mathcal{L}(f)(x) = f(0) + \mathcal{L}(f')(x)$. Puisque f' est continue et bornée sur \mathbb{R}^+ , la question précédente permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f')(x) = 0$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0).$$

8. Théorème de la valeur finale

(a) Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$, il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geq A$, $|f(t) - \ell| \leq 1$. Pour $t \geq A$, on a alors $|f(t)| \leq |f(t) - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|$. D'autre part, la fonction f est continue sur le segment $[0, A]$ et donc f est bornée sur ce segment. Soit M un majorant de la fonction $|f|$ sur $[0, A]$.

Ainsi, pour tout réel $t \in [0, +\infty[$, on a $|f(t)| \leq \text{Max}\{M, 1 + |l|\}$ et on a montré que f est bornée sur \mathbb{R}^+ . Finalement, $f \in F$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $a_n > 0$, en posant $x = a_n t$, on obtient

$$a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = a_n \int_0^{+\infty} f(t) e^{-a_n t} dt = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a_n}\right) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} h_n(x) dx.$$

(c) • Chaque fonction h_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

• Pour chaque $x \in]0, +\infty[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = \ell e^{-x}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{a_n} = +\infty$. Donc, la suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $h : x \mapsto \ell e^{-x}$ qui est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, +\infty[$, $|h_n(x)| \leq \|f\|_\infty e^{-x} = \varphi(x)$ (hypothèse de domination) où la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^{+\infty} h_n(x) dx\right)$ converge vers

$$\int_0^{+\infty} h(x) dx = \ell [-e^{-x}]_0^{+\infty} = \ell.$$

On a montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell.$$

(d) Ainsi, pour toute suite (a_n) de réels strictement positifs, convergente et de limite nulle, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

Montrons alors que $\lim_{x \rightarrow 0} x \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

Supposons par l'absurde que $x \mathcal{L}(f)(x)$ ne tende pas vers ℓ quand x tend vers 0 .

Alors $\exists \varepsilon > 0 / \forall \alpha > 0, \exists x \in]0, \alpha[/ |x \mathcal{L}(f)(x) - \ell| \geq \varepsilon$. ε est dorénavant ainsi fixé.

Ce qui précède permet en particulier d'affirmer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in]0, \frac{1}{n+1}[$ tel que $|a_n \mathcal{L}(f)(a_n) - \ell| \geq \varepsilon$. Mais alors, la suite (a_n) est une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0 telle que la suite $(a_n \mathcal{L}(f)(a_n))$ ne tende pas vers ℓ ce qui est absurde. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathcal{L}(f)(x) = \ell$ ou encore, puisque $\ell \neq 0$,

$$\mathcal{L}(f)(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ell}{x}.$$

9. (a) La fonction f est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Pour tout réel $x \geq 0$, on peut donc écrire $R(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$.

Puisque la fonction f est continue sur \mathbb{R}^+ , la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ , de dérivée la fonction f . Par suite, la fonction R est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ et $R' = -f$.

La fonction R est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ et en particulier est continue sur \mathbb{R}^+ . D'autre part, puisque la fonction f est intégrable sur \mathbb{R}^+ , on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0$. Donc, La fonction R est dans F d'après la question 8.a).

Maintenant, la fonction R n'est pas croissante sur \mathbb{R}^+ et on ne peut donc pas appliquer la question 5. On démontre le résultat de l'énoncé grâce à une intégration par parties. Soit $x > 0$. Alors $x \mathcal{L}(R)(x) = \int_0^{+\infty} R(t) x e^{-xt} dt$.

Soit X un réel strictement positif. Les deux fonctions $t \mapsto R(t)$ et $t \mapsto -e^{-xt}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^X R(t) x e^{-xt} dt = [-R(t) e^{-xt}]_0^X - \int_0^X f(t) e^{-xt} dt = R(0) - R(X) e^{-xX} - \int_0^X f(t) e^{-xt} dt.$$

Quand X tend vers $+\infty$, $\int_0^X R(t) x e^{-xt} dt$ tend vers $x \mathcal{L}(R)(x)$ puis $R(X) e^{-xX}$ tend vers 0 car la fonction R est bornée sur \mathbb{R}^+ et enfin $\int_0^X f(t) e^{-xt} dt$ tend vers $\mathcal{L}(f)(x)$. On a donc montré que $\forall x > 0, x \mathcal{L}(R)(x) = R(0) - \mathcal{L}(f)(x)$ ou encore

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x \mathcal{L}(R)(x).$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $R(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A, |R(t)| \leq \varepsilon$.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| &= | -x\mathcal{L}(R)(x) | = x \left| \int_0^A R(t)e^{-xt} dt + \int_A^{+\infty} R(t)e^{-xt} dt \right| \\
&\leq x \left(\int_0^A |R(t)|e^{-xt} dt + \int_A^{+\infty} |R(t)|e^{-xt} dt \right) \leq x \left(\int_0^A |R(t)| dt + \int_A^{+\infty} \varepsilon e^{-xt} dt \right) \\
&= x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon x \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_A^{+\infty} = x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon e^{-xA} \\
&\leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon.
\end{aligned}$$

(c) Ainsi, pour tout $x > 0$, $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon$ (où A ne dépend que de ε et ne dépend donc pas de x). Maintenant, $\lim_{x \rightarrow 0} x \int_0^A |R(t)| dt = 0$ et donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0, \alpha[$, $x \int_0^A |R(t)| dt < \varepsilon$. Pour $x \in]0, \alpha[$, on a $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in]0, \alpha[, |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| < 2\varepsilon$ et donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = R(0) = \int_0^{+\infty} f(t) dt.}$$

On peut donc prolonger $\mathcal{L}(f)$ par continuité en 0 en posant $\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

PARTIE III : Application

10. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

(a) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ puis sur $[0, +\infty[$ car $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Donc la fonction F est définie sur $[0, +\infty[$.

Soient a et x deux réels tels que $0 < a < x$. Les deux fonctions $t \mapsto 1 - \cos t$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[a, x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{\sin t}{t} dt &= \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_a^x + \int_a^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \\
&= \frac{1 - \cos x}{x} - \frac{1 - \cos a}{a} + \int_a^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \quad (*)
\end{aligned}$$

Quand a tend vers 0, $\frac{1 - \cos a}{a} \sim \frac{a^2/2}{a} = \frac{a}{2}$ et donc $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - \cos a}{a} = 0$. D'autre part, la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est continue sur $]0, x]$ et se prolonge par continuité en 0 (car $\frac{1 - \cos t}{t^2}$ tend vers 0 quand t tend vers $\frac{1}{2}$).

Quand x tend vers 0 dans (*), on obtient

$$\forall x > 0, F(x) = \frac{1 - \cos x}{x} + \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt.$$

Pour tout $x > 0$, $\left| \frac{1 - \cos x}{x} \right| \leq \frac{2}{x}$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$. D'autre part, la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, (prolongeable par continuité en 0) et dominée en $+\infty$ par $\frac{1}{t^2}$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et en particulier, la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.

On en déduit que la fonction F a une limite réelle en $+\infty$ que l'on note $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et de plus $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)| dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \int_{n\pi + \frac{\pi}{4}}^{(n+1)\pi - \frac{\pi}{4}} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{(n+1)\pi - \frac{\pi}{4}}.$$

La série numérique de terme général $\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{(n+1)\pi - \frac{\pi}{4}}$ diverge et donc la série numérique de terme général

$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)| dt$ diverge. On sait alors que la fonction f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

(c) Soient $x > 0$ et $X > 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^X (\sin t) e^{-xt} dt &= \text{Im} \left(\int_0^X e^{it} e^{-xt} dt \right) = \text{Im} \left(\int_0^X e^{(-x+i)t} dt \right) \\ &= \text{Im} \left(\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right]_0^X \right) = \text{Im} \left(\frac{e^{(-x+i)X} - 1}{-x+i} \right) = \text{Im} \left(\frac{(e^{-xX} \cos X - 1 + i e^{-xX} \sin X)(-x-i)}{x^2 + 1} \right) \\ &= -\frac{1}{1+x^2} (e^{-xX} (x \sin X + \cos X) - 1). \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto (\sin t) e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, $|t^2 (\sin t) e^{-xt}| \leq t^2 e^{-xt} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et donc

$(\sin t) e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc la fonction $t \mapsto (\sin t) e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $|e^{-xX} (x \sin X + \cos X)| \leq (x+1) e^{-xX} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Par suite,

$$\boxed{\forall x > 0, \int_0^{+\infty} (\sin t) e^{-xt} dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

(d) Ainsi, pour tout $x > 0$, avec les notations de la question 4, $\mathcal{L}(g_1)(x) = \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} (\sin t) e^{-xt} dt = \frac{1}{1+x^2}$.

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ et admet une limite réelle en $+\infty$. D'après la question 8.a), $f \in F$ puis d'après la question 2.a), $f \in E$. D'après la question 6.a), la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$(\mathcal{L}(f))'(x) = -\mathcal{L}(g_1)(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

et donc, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(f)(x) = C - \text{Arctan } x$.

Puisque $f \in F$, la question 7.a) permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ et donc $C = \frac{\pi}{2}$. Par suite,

$$\boxed{\forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x = \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right).$$

D'après le résultat admis par l'énoncé, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = R(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$