SESSION 2011

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Exercice

Commutant d'une matrice

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

• Puisque $0 \times A = A \times 0 = 0$, $0 \in C(A)$.
• Soient $(M, N) \in (C(A))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda MA + \nu NA = (\lambda M + \mu N)A,$$

et donc $\lambda M + \mu N \in C(A)$.

On a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ C(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

2. • Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A - 3I_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x + 4y - 2z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -x + 4y - 3z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = y \\ -2x + 4y - 2y = 0 \\ -x + 4y - 3y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z.$$

Donc $\mathrm{Ker}(A - 3I_3) = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A - 2I_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x + 4y - 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ -x + 4y - 2z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{4}{3}y \\ x = 4y - \dfrac{8}{3}y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{4}{3}y \\ x = \dfrac{4}{3}y \end{array}\right. .$$

Donc $\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AX = 2X + e_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x + 4y - 2z = 4 \\ 4y - 3z = 3 \\ -x + 4y - 2z = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{4}{3}y - 1 \\ x = 4y - 2\left(\dfrac{4}{3}y - 1\right) - 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{4}{3}y - 1 \\ x = \dfrac{4}{3}y - 2 \end{array}\right. .$$

Donc le vecteur $e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur tel que $Ae_3 = e_2 + 2e_3$.

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 4 + 6 = -1 \neq 0$ et donc (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, on a $T = P^{-1}AP$ et donc les matrices A et T sont semblables.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
M \in C(T) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 2b & b+2c \\ 3d & 2e & e+2f \\ 3g & 2h & h+2i \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a = 3a \\ 3b = 2b \\ 3c = b+2c \\ 2d+g = 3d \\ 2e+h = 2e \\ 2f+i = e+2f \\ 2g = 3g \\ 2h = 2h \\ 2i = h+2i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 0 \\ c = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \\ d = 0 \\ i = e \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Les éléments de $C(T)$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$, $(a, e, f) \in \mathbb{R}^3$.

$C(T) = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2} + E_{3,3}, E_{2,3})$. De plus, la famille $(E_{1,1}, E_{2,2} + E_{3,3}, E_{2,3})$ est libre car pour $(a, e, f) \in \mathbb{R}^3$,

$$aE_{1,1}e(E_{2,2} + E_{3,3}) + fE_{2,3} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = e = f = 0.$$

Donc,

$$\boxed{\dim(C(T)) = 3.}$$

4. Notons φ l'application $M \mapsto P^{-1}MP$.

- Soient $(M, N) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(\lambda M + \mu N) = P^{-1}((\lambda M + \mu N)P = \lambda P^{-1}MP + \mu P^{-1}NP = \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N).$$

- Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. $M \in \text{Ker}(\varphi) \Rightarrow P^{-1}MP = 0 \Rightarrow PP^{-1}MPP^{-1} = P0P^{-1} \Rightarrow M = 0$.

Ainsi $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et donc $\varphi \in GL(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ car $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) < +\infty$.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. $M \in C(A) \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow PTP^{-1}M = MPTP^{-1} \Leftrightarrow TP^{-1}MP = P^{-1}MPT \Leftrightarrow \varphi(M) \in C(T)$.
Donc $\varphi(C(A)) = C(T)$ et puis que φ est un automorphisme, $\dim(C(A)) = \dim(C(T))$ ou encore

$$\boxed{\dim(C(A)) = 3.}$$

5. **(a)** Le polynôme minimal μ_A de A est un diviseur unitaire de $\chi_A = \chi_T = -(X-2)^2(X-3)$ et un multiple de $(X-2)(X-3)$. Donc, $\mu_A = (X-2)(X-3)$ ou $\mu_A = (X-2)^2(X-3)$.

Ensuite, $\text{rg}(A - 2I_3) = \text{rg}(T - 2I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ou encore $\dim(\text{Ker}(A - 2I_3) = 1 < 2$. Puisque 2 est valeur propre double de A, la matrice A n'est pas diagonalisable et donc μ_A n'est pas à racines simples.
On en déduit que $\mu_A = (X-2)^2(X-3)$ puis qu'un polynôme non nul annulateur de A est de degré supérieur ou égal à 3, celui-ci devant être un multiple de μ_A.

Donc le seul polynôme de degré inférieur ou égal à 2 et annulateur de A est le polynôme nul.

(b) On en déduit que la famille (I_3, A, A^2) est libre. Maintenant, I_3, A et A^2 sont dans $C(A)$. Donc, la famille (I_3, A, A^2) est une famille libre de $C(A)$ qui est de dimension $3 = \text{card}(I_3, A, A^2) < +\infty$. Par suite, la famille (I_3, A, A^2) est une base de $C(A)$ et en particulier

$$\boxed{C(A) = \text{Vect}(I_3, A, A^2).}$$

(c) On sait que $\mathbb{R}[A] \subset C(A)$. Réciproquement, un élément de $C(A)$ est un polynôme en A d'après la question précédente et donc $C(A) \subset \mathbb{R}[A]$. Finalement,

$$\boxed{C(A) = \mathbb{R}[A].}$$

Si on prend $A = I_3$, $\mathbb{R}[A] = \mathbb{R}I_3 \neq \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = C(A)$ et donc le résultat précédent n'est pas toujours vrai.

Problème

Inégalités sur les déterminants de matrices symétriques

1. *Question préliminaire*

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PD^tP$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note e_i la i-ème colonne de P de sorte que e_i est un vecteur propre unitaire de S associé à la valeur propre λ_i.

• Si $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant {}^te_iSe_i = \lambda_i{}^te_ie_i = \lambda_i\|e_i\|^2 = \lambda_i$. Par suite, toutes les valeurs propres de S sont des réels positifs.

• Supposons que toutes les valeurs propres de S soient des réels positifs. Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose ${}^tPX = X' = (x'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

$${}^tXSX = {}^tXPD{}^tPX = {}^t({}^tPX)D{}^tPX = {}^tX'DX' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \geqslant 0,$$

et donc $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Partie I

2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On pose $\text{Sp}(S) = (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. D'après la question 1, les λ_i sont des réels positifs et d'après le résultat admis par l'énoncé,

$$\sqrt[n]{\det(S)} = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \text{trace}(S).$$

3. *Application.*

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ${}^t({}^tMM) = {}^tM{}^t({}^tM) = {}^tMM$ et donc ${}^tMM \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX = \|MX\|_2^2 \leqslant 0.$$

Donc, ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

(b) $\det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = (\det(M))^2$. D'autre part,

$$\text{trace}({}^tMM) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \times m_{i,j}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2.$$

Par suite,

$$(\det M)^2 = \det({}^tMM) \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^n (\text{trace}({}^tMM))^n = \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2\right)^n.$$

Partie II : Théorème de réduction simultanée

4. **(a)** On sait que ${}^t\mathrm{RAR}$ est la matrice du produit scalaire φ dans la base $\mathcal{B}'$. Puisque cette base est orthonormée pour le produit scalaire φ, la matrice de φ dans $\mathcal{B}'$ est I_n et donc ${}^t\mathrm{RAR} = I_n$.

(b) ${}^t\mathrm{C} = {}^t\mathrm{R}{}^t\mathrm{BR} = {}^t\mathrm{RBR}$ et donc C est une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale réelle D telle que ${}^t\mathrm{QCQ} = \mathrm{D}$.

(c) On a $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{R}^{-1}\mathrm{CR}^{-1} = {}^t\mathrm{R}^{-1}\mathrm{QD}{}^t\mathrm{QR}^{-1} = {}^t({}^t\mathrm{QR}^{-1})\mathrm{D}({}^t\mathrm{QR}^{-1})$.
Soit $\mathrm{P} = {}^t\mathrm{QR}^{-1}$. P est une matrice inversible en tant que produit de deux matrices inversibles et $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{PDP}$.
D'autre part, ${}^t\mathrm{PP} = {}^t\mathrm{R}^{-1}\mathrm{Q}{}^t\mathrm{QR}^{-1} = {}^t\mathrm{R}^{-1}\mathrm{R}^{-1} = \mathrm{A}$.

La matrice $\mathrm{P} = {}^t\mathrm{QR}^{-1}$ est une matrice inversible telle que $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{PP}$ et $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{PDP}$.

(d) Soit φ la forme quadratique canoniquement associée à B.
Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(u) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$. Si on pose $x' = x + y$ et $y' = y$ ou encore $y = y'$ et $x = x' - y'$, on définit une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ et la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Cette matrice n'est pas orthogonale. Néanmoins, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(u) = x'^2$ et donc la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice diagonale $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. **(a)** On reprend les notations de la question précédente. Vérifions tout d'abord que les valeurs propres λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, de D sont positives (la matrice P n'étant pas nécessairement orthogonale, les valeurs propres de D ne sont pas nécessairement les valeurs propres de B).
Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ${}^t\mathrm{XDX} = {}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}^{-1}\mathrm{X} = {}^t(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X})\mathrm{B}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}) \geqslant 0$ car $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^+$. Donc $\mathrm{D} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et d'après la question 1, les valeurs propres λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, de la matrice D sont des réels positifs. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) &= \det({}^t\mathrm{PP} + {}^t\mathrm{PDP}) = \det({}^t\mathrm{P}(I_3 + \mathrm{D})\mathrm{P}) = \det(\mathrm{P}) \times \det(I_3 + \mathrm{D}) \times \det(\mathrm{P}) = (\det \mathrm{P})^2(\det(I_3 + \mathrm{D}) \\
&= (\det(\mathrm{P}))^2 \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i) \\
&\geqslant (\det(\mathrm{P})^2 \left(1 + \prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right) \ (\text{car } (\det(\mathrm{P}))^2 > 0 \text{ et } \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) = 1 + \prod_{i=1}^{n}\lambda_i + \ldots \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n}\lambda_i) \\
&= (\det(\mathrm{P}))^2 + (\det(\mathrm{P}))^2 \prod_{i=1}^{n}\lambda_i = \det({}^t\mathrm{P})\det(\mathrm{P}) + \det({}^t\mathrm{P})\det(\mathrm{D})\det(\mathrm{P}) = \det({}^t\mathrm{PP}) + \det({}^t\mathrm{PDP}) \\
&= \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B}).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}),\ \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B}).}$$

(b) On suppose maintenant que les matrices A et B sont dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Si on affine la démonstration de la question 1, on établit que les valeurs propres d'un élément de $\mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ sont positives mais ne sont pas toutes strictement positives. Ainsi, 0 est valeur propre de A et de B et donc $\det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B}) = 0$.
D'autre part, la matrice $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ est symétrique et pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t\mathrm{X}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{X} = {}^t\mathrm{XAX} + {}^t\mathrm{XBX} \geqslant 0$. Donc $\mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On en déduit que les valeurs propres de $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ sont des réels positifs puis que le déterminant de $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, qui est le produit de ces valeurs propres, est un réel positif. Par suite, $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant 0 = \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B})$.

$$\boxed{\forall(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}),\ \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B}).}$$

6. D'après la question 5.(a), les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des réels positifs.
Puisque $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, B est inversible et il en est de même de D. Les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont donc des réels strictement positifs.

(a) Soit $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
\det(t\mathrm{A} + (1-t)\mathrm{B}) &= \det(t{}^t\mathrm{PP} + (1-t){}^t\mathrm{PDP}) = \det({}^t\mathrm{P})\det(\mathrm{P})\det(tI_n + (1-t)\mathrm{D}) \\
&= (\det(\mathrm{P}))^2 \prod_{i=1}^{n}(t + (1-t)\lambda_i).
\end{aligned}$$

(b) Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $t \in [0, 1]$. $t + (1-t)\lambda_i = \mathrm{bar}(1(t), \lambda_i(1-t)) \in [\lambda_i, 1]$ et donc $t + (1-t)\lambda_i > 0$.
La fonction ln est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leqslant 0$. Donc la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$. Par suite,

$$\ln(t+(1-t)\lambda_i) \geqslant t\ln(1)+(1-t)\ln(\lambda_i) = \ln\left(\lambda_i^{1-t}\right),$$

et donc, par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $t+(1-t)\lambda_i \geqslant \lambda_i^{1-t}$.

(c) Puisque $(\det(P))^2 > 0$,

$$\det(tA+(1-t)B) = (\det(P))^2\prod_{i=1}^{n}(t+(1-t)\lambda_i) \geqslant (\det(P))^2\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{1-t} = (\det(P))^2(\det D)^{1-t}$$
$$= \left((\det(P))^2\right)^t\left((\det(P))^2\det D\right)^{1-t} = (\det(A))^t\,(\det(B))^{1-t}.$$

$$\boxed{\forall (A,B)\in(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2,\ \forall t\in[0,1],\ \det(tA+(1-t)B) \geqslant (\det(A))^t\,(\det(B))^{1-t}.}$$

7. (a) Soit $A\in\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Les valeurs propres λ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, de A sont tous des réels positifs. Pour $p\in\mathbb{N}$, on pose $A_p = A+\dfrac{1}{p+1}I_n$.

Soit $p\in\mathbb{N}$. A_p symétrique et ses valeurs propres, à savoir les $\lambda_i+\dfrac{1}{p+1}$, $1\leqslant i\leqslant n$, sont toutes des réels strictement positifs. Donc, A_p est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = A$, la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, convergente, de limite A. Donc A est adhérent à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

On a montré que tout élément de $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ est adhérent à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc que

$$\boxed{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}).}$$

(b) On définit de même la suite $B_p = B+\dfrac{1}{p+1}I_n$. Puisque les matrices A_p et B_p sont dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, pour tout entier naturel p, on a

$$\left(\det\left(A+\frac{1}{p+1}I_n+B+\frac{1}{p+1}I_n\right)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\det\left(A+\frac{1}{p+1}I_n\right)\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\det\left(B+\frac{1}{p+1}I_n\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Quand p tend vers $+\infty$, par continuité de la fonction $M\mapsto\det(M)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de la fonction $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient $(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \leqslant (\det(A))^{\frac{1}{n}}+(\det(B))^{\frac{1}{n}}$.

Partie III : Théorème de Choleski

8. (a) ${}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2 \Rightarrow T_1T_2^{-1} = {}^t(T_2){}^t(T_1^{-1}) \Rightarrow T_1T_2^{-1} = {}^t\left(\left(T_2^{-1}T_1\right)^{-1}\right)$.

Les matrices T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures et inversibles. On sait qu'il en est de même des matrices $T_1T_2^{-1}$ et $\left(T_2^{-1}T_1\right)^{-1}$. Mais alors, la matrice ${}^t\left(\left(T_2^{-1}T_1\right)^{-1}\right)$ est triangulaire inférieure inversible puis la matrice $T_1T_2^{-1}$ est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. On en déduit que la matrice $T_1T_2^{-1}$ est une matrice diagonale D ou encore, il existe une matrice diagonale réelle D telle que $T_1 = DT_2$. Puisque les coefficients diagonaux de T_1 et de T_2 sont des réels strictement positifs, en analysant la diagonale de la matrice T_2D, on voit que les coefficients diagonaux de D sont des réels positifs.

Enfin, l'égalité ${}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$ fournit ${}^tT_2{}^tDDT_2 = {}^tT_2T_2$ puis $D^2 = I_n$ (car T_2 est inversible) et enfin $D = I_n$ car les valeurs propres de D sont positives. On a montré que $T_1T_2^{-1} = I_n$ et donc que $T_1 = T_2$.

(b) Immédiatement,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1\\ 1 & 2 & \dots & \dots & 2\\ \vdots & 2 & & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & n-1 & n-1\\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 0\\ 1 & \dots & & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1\\ 0 & 1 & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. *Un peu d'informatique*

Immédiatement et sans calculatrice, on obtient

• $A_1 = \begin{pmatrix} 49 & 14 & -14 \\ 14 & 20 & -8 \\ -14 & -8 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

• $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

• $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

10. *Inégalité d'Hadamard*

(a) $\det(S) = \det({}^t TT) = (\det(T))^2 = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} t_{i,i}^2$.

Maintenant, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $s_{i,i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{j,i}t_{j,i} = \sum_{j=1}^{i} t_{j,i}^2 \geqslant t_{i,i}^2 \geqslant 0$ et donc

$$\det(S) = \prod_{i=1}^{n} t_{i,i}^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.$$

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \det(S) \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.}$$

(b) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On applique le résultat précédent à la matrice $S = {}^t MM$. S est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ d'après la question 5 et n'admet pas 0 pour valeur propre car M est inversible. Donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On en déduit que

$$(\det(M))^2 = \det(S) \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i} = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}^2 \right),$$

et donc

$$\boxed{\forall M = (a_{i,j}) \in GL_n(\mathbb{R}),\ |\det(M)| \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.}$$

