

**Partie I - Généralités****I.A -**

**I.A.1)** Soient  $(a, a') \in \mathbb{R}^2$  et  $(\vec{u}, \vec{u}') \in (\mathbb{R}^3)^2$ . Posons  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ .

$$p(a\vec{u} + a'\vec{u}') = \begin{pmatrix} (ax + a'x') - \alpha(az + a'z') \\ (ay + a'y') - \beta(az + a'z') \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x - \alpha z \\ y - \beta z \end{pmatrix} + a' \begin{pmatrix} x' - \alpha z' \\ y' - \beta z' \end{pmatrix} = ap(\vec{u}) + a'p(\vec{u}').$$

Donc  $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ . Ensuite, puisque  $\begin{pmatrix} x - \alpha z \\ y - \beta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , en notant respectivement  $\mathcal{B}_3$  et  $\mathcal{B}_2$  les bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$ , on a

$$p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Soit  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .  $\vec{u} \in \text{Ker}(p) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha z \\ y = \beta z \end{cases}$  et donc  $\text{Ker}(p) = \{(\alpha z, \beta z, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\vec{v})$  où  $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Ensuite, d'après le théorème du rang,  $\dim(\text{Im}(p)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(p)) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$  et donc  $\text{Im}(p) = \mathbb{R}^2$ .

$$\text{Ker}(p) = \text{Vect}(\vec{v}) \text{ où } \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \text{Im}(p) = \mathbb{R}^2.$$

**I.A.2)** On note  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

$p(\vec{j}) = \vec{e}_2$   
 $p(\vec{k}) = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$   
 $p(\vec{i}) = \vec{e}_1$

**I.B - Interprétation géométrique de p**

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\bar{p} \circ p((x, y, z)) = \begin{pmatrix} (x - \alpha z) - \alpha \cdot 0 \\ (y - \beta z) - \beta \cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \alpha z \\ y - \beta z \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{p}((x, y, z)).$$

Donc  $\bar{p}$  est une projection. On a  $\text{Ker}(\bar{p}) = \text{Ker}(p) = \text{Vect}(\vec{v})$ . D'autre part, comme  $\text{Im}(p) = \mathbb{R}^2$ ,  $\text{Im}(\bar{p}) = \{(x, y, 0), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$ .

$\bar{p}$  est donc la projection sur  $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$  parallèlement à  $\vec{v}$  puis

$\bar{p}$  « est » la projection sur  $\mathbb{R}^2$  parallèlement à  $\vec{v}$ .

Soit  $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\|p(X)\|^2 - \|X\|^2 = (x - \alpha z)^2 + (y - \beta z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - 1)z^2 - 2(\alpha x + \beta y)z.$$

En particulier, pour  $X = \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\alpha}, \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2\beta}, 1\right)$ , on a

$$\|p(X)\|^2 - \|X\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 1 - 2\left(\alpha\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\alpha}\right) + \beta\left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2\beta}\right)\right) = -1 - 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1 > 0.$$

Ainsi,

$\exists X \in \mathbb{R}^3 / \|p(X)\| > \|X\|.$

**I.C -**

**I.C.1)** Posons  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  et  $\vec{u} = (a, b, c)$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$p(M_0 + \lambda\vec{u}) = \begin{pmatrix} (x_0 + \lambda a) - \alpha(z_0 + \lambda c) \\ (y_0 + \lambda b) - \beta(z_0 + \lambda c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - \alpha z_0 \\ y_0 - \beta z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a - \alpha c \\ b - \beta c \end{pmatrix} = p(M_0) + \lambda p(\vec{u}).$$

Par suite,

$$p(D) = \{p(M_0 + \lambda\vec{u}), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{p(M_0) + \lambda p(\vec{u}), \lambda \in \mathbb{R}\} = p(M_0) + \mathbb{R}p(\vec{u}).$$

$p(D) = p(M_0) + \mathbb{R}p(\vec{u}).$

**I.C.2)** Soient  $M_0$  un point de  $\mathbb{R}^3$  et  $\vec{u}$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^3$  puis  $D$  la droite  $M_0 + \mathbb{R}\vec{u}$ .

- Si  $\vec{u}$  est colinéaire à  $\vec{v}$ ,  $p(\vec{u}) = 0$  et donc  $p(D) = \{p(M_0)\}$ . Dans ce cas,  $p(D)$  est réduite à un point.
- Si  $\vec{u}$  n'est pas colinéaire à  $\vec{v}$ ,  $p(\vec{u}) \neq 0$  et dans ce cas,  $p(D) = \{p(M_0)\} + \mathbb{R}p(\vec{u})$  est la droite passant par  $p(M_0)$  et dirigée par  $p(\vec{u})$ .

L'image d'une droite affine par  $p$  est soit une droite affine, soit réduite à un point.

**I.C.3) a)** Soient  $D$  et  $D'$  deux droites sécantes en un point  $A$  et respectivement dirigées par les vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  tels que  $p(\vec{u}) \neq 0$  et  $p(\vec{u}') \neq 0$ .

Alors,  $p(D)$  est la droite  $p(A) + \mathbb{R}p(\vec{u})$  et  $p(D')$  est la droite  $p(A) + \mathbb{R}p(\vec{u}')$ . Les droites  $p(D)$  et  $p(D')$  sont donc sécantes en le point  $p(A)$ .

Si  $D$  et  $D'$  sont deux droites sécantes et si  $p(D)$  et  $p(D')$  sont des droites, alors  $p(D)$  et  $p(D')$  sont sécantes.

Soit  $D$  (resp.  $D'$ ) la droite passant par le point  $A(0, 0, 1)$  (resp.  $A'(0, 0, -1)$ ) et dirigée par le vecteur  $\vec{i}$  (resp.  $\vec{j}$ ).  $D$  et  $D'$  ne sont pas coplanaires et donc ne sont pas sécantes.

Mais  $p(D)$  (resp.  $p(D')$ ) est dirigée par  $p(\vec{i}) = \vec{i}$  (resp.  $p(\vec{j}) = \vec{j}$ ).  $p(D)$  et  $p(D')$  sont donc deux droites sécantes de  $\mathbb{R}^2$ .

Ainsi, si  $p(D)$  et  $p(D')$  sont deux droites sécantes,  $D$  et  $D'$  ne sont pas nécessairement sécantes. La réciproque est fautive.

**b)** Soient  $D$  et  $D'$  deux droites parallèles. On note  $\vec{u}$  un vecteur directeur de ces deux droites. Alors,  $p(D)$  et  $p(D')$  sont dirigées par le vecteur  $p(\vec{u})$  et sont donc parallèles.

Si  $D$  et  $D'$  sont parallèles et si  $p(D)$  et  $p(D')$  sont des droites,  $p(D)$  et  $p(D')$  sont parallèles.

Soient  $D$  une droite dirigée par  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{v}$  et  $D'$  une droite dirigée par  $\vec{u}' = \vec{i}$ .  $p(D)$  est une droite dirigée par  $p(\vec{u}) = \vec{i}$  et  $p(D')$  est une droite dirigée par  $p(\vec{u}') = \vec{i}$ . Donc  $p(D)$  et  $p(D')$  sont parallèles, mais  $D$  et  $D'$  ne le sont pas car  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  ne sont pas colinéaires. La réciproque est fautive.

**I.C.4)** Soit  $\Pi$  un plan affine. On note  $(A, \vec{u}, \vec{u}')$  un repère de  $\Pi$  et  $\vec{\pi}$  la direction de  $\Pi$ .

De même qu'en I.C.1),

$$p(\Pi) = \{p(A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}'), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{p(A) + \lambda p(\vec{u}) + \mu p(\vec{u}'), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = p(A) + \mathbb{R} p(\vec{u}) + \mathbb{R} p(\vec{u}').$$

Ceci montre déjà que  $p(\Pi)$  est un point, une droite ou le plan  $\mathbb{R}^2$  tout entier.

- On ne peut avoir  $p(\vec{u}) = p(\vec{u}') = 0$  car  $\text{Ker}(p)$  est de dimension 1 et  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  ne sont pas colinéaires. Donc  $p(\Pi)$  est une droite ou le plan  $\mathbb{R}^2$  tout entier.

- Si  $\vec{v} \notin \vec{\pi}$ , alors  $\vec{\pi} \cap \text{Ker}(p) = \{0\}$ . Dans ce cas, la restriction de  $p$  à  $\vec{\pi}$  est injective. On en déduit que l'image par  $p$  de la famille libre  $(\vec{u}, \vec{u}')$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^2$  et donc une base de  $\mathbb{R}^2$ . Dans ce cas,  $p(\Pi) = \mathbb{R}^2$ .

- Si  $\vec{v} \in \vec{\pi}$ , on peut choisir une nouvelle base de  $\vec{\pi}$  de la forme  $(\vec{v}, \vec{w})$ . Dans ce cas,  $p(\Pi) = p(A) + \mathbb{R} p(\vec{v}) + \mathbb{R} p(\vec{w}) = p(A) + \mathbb{R} p(\vec{w})$  avec  $p(\vec{w}) \neq 0$  et  $p(\Pi)$  est une droite.

Si  $\vec{v} \in \vec{\pi}$ ,  $p(\Pi)$  est une droite et si  $\vec{v} \notin \vec{\pi}$ ,  $p(\Pi) = \mathbb{R}^2$ .

### I.D - Une propriété métrique de $p$

**I.D.1)** Soit  $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$q(X) = \|X\|^2 - \|p(X)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x - \alpha z)^2 - (y - \beta z)^2 = (1 - \alpha^2 - \beta^2)z^2 + 2(\alpha x + \beta y)z = z((\alpha^2 + \beta^2 - 1)z - 2(\alpha x + \beta y)).$$

L'ensemble des  $X \in \mathbb{R}^3$  tels que  $q(X) = 0$  est donc la réunion des plans  $\Pi_1$  d'équation  $z = 0$  et  $\Pi_2$  d'équation  $(\alpha^2 + \beta^2 - 1)z - 2(\alpha x + \beta y) = 0$  ( $\Pi_2$  est effectivement un plan puisque par exemple  $\alpha \neq 0$ ).

Soit  $\Pi$  un plan parallèle à  $\Pi_1$  ou à  $\Pi_2$ . On a donc  $\vec{\pi} = \vec{\pi}_1$  ou  $\vec{\pi} = \vec{\pi}_2$ .

On note alors que pour tous points  $M$  et  $M'$  de  $\mathbb{R}^3$ , puisque  $p$  est linéaire, on a

$$\overrightarrow{p(M)p(M')} = p(M') - p(M) = p(M' - M) = p(\overrightarrow{MM'}).$$

Soient  $M$  et  $M'$  deux points de  $\Pi$ .  $\overrightarrow{MM'}$  est dans  $\vec{\pi} = \vec{\pi}_1$  ou dans  $\vec{\pi} = \vec{\pi}_2$  et donc

$$\|\overrightarrow{p(M)p(M')}\| = \|p(\overrightarrow{MM'})\| = \|\overrightarrow{MM'}\|,$$

par définition de  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ .

Ainsi, pour tous points  $M$  et  $M'$  de  $\Pi$ ,  $\|\overrightarrow{p(M)p(M')}\| = \|\overrightarrow{MM'}\|$ . Le plan  $\Pi$  est donc représenté en vraie grandeur par  $p$ .

Les plans parallèles à  $\Pi_1$  ou  $\Pi_2$  sont représentés en vraie grandeur par  $p$ .

**I.D.2) a)** Pour  $x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on a  $Q(X) = 2\alpha xz + 2\beta yz + (1 - \alpha^2 - \beta^2)z^2$ .

- **Existence.** Soit  $u$  l'endomorphisme de matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 - \alpha^2 - \beta^2 \end{pmatrix}$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_3$  de  $\mathbb{R}^3$ . Puisque

$\mathcal{B}_3$  est orthonormée et que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}_3$  est symétrique,  $u$  est autoadjoint. De plus, pour  $X = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$\langle X, u(X) \rangle = {}^tX(AX) = a_{1,1}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 + 2a_{1,2}xy + 2a_{1,3}xz + 2a_{2,3}yz = 2\alpha xz + 2\beta yz + (1 - \alpha^2 - \beta^2)z^2 = Q(X).$$

- **Unicité.** Soient  $u$  et  $u'$  deux endomorphismes autoadjoints tels que  $\forall X \in \mathbb{R}^3$ ,  $q(X) = \langle u(X), X \rangle = \langle u'(X), X \rangle$ . Posons  $v = u' - u$ .  $v$  est autoadjoint en tant que combinaison linéaire d'endomorphismes autoadjoints et vérifie  $\forall X \in \mathbb{R}^3$ ,  $\langle v(X), X \rangle = 0$ .

Par polarisation, on a  $\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle v(X), Y \rangle = 0$ . En effet,

$$0 = \frac{1}{2} (\langle v(X+Y), X+Y \rangle - \langle v(X), X \rangle - \langle v(Y), Y \rangle) = \frac{1}{2} (\langle v(X), Y \rangle + \langle v(Y), X \rangle) = \langle v(X), Y \rangle,$$

car  $v$  est autoadjoint.

Mais alors,  $v(\vec{i}) \in (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})^\perp = \{0\}$  et donc  $v(\vec{i}) = 0$ . De même,  $v(\vec{j}) = v(\vec{k}) = 0$ .  $v$  s'annule ainsi sur une base de  $\mathbb{R}^3$  et donc  $v = 0$  ou encore  $u = u'$ .

$$\boxed{\exists! u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) / \forall X \in \mathbb{R}^3, Q(X) = \langle u(X), X \rangle.}$$

b) En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_u &= \begin{vmatrix} -X & 0 & \alpha \\ 0 & -X & \beta \\ \alpha & \beta & 1 - \alpha^2 - \beta^2 - X \end{vmatrix} = (-X)(X^2 - (1 - \alpha^2 - \beta^2)X - \beta^2) + \alpha(\alpha X) \\ &= -X(X^2 - (1 - \alpha^2 - \beta^2)X - \alpha^2 - \beta^2) = -X(X-1)(X - (-\alpha^2 - \beta^2)). \end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_u = -X(X-1)(X - (-\alpha^2 - \beta^2)).}$$

Donc  $\text{Sp}(u) = (0, 1, -\alpha^2 - \beta^2)$ .  $u$  une valeur propre strictement positive, une valeur propre strictement négative et une valeur propre nulle.

### I.E - Une généralisation

**I.E.1)** On choisit une base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  de  $P$  et d'après le théorème de la base orthonormée incomplète, on peut la compléter en  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ .

**I.E.2)** Pour  $(X, Y) \in (\mathbb{R}^3)^2$ , posons  $B_{q'}((X, Y)) = \langle u'(X), Y \rangle$ .  $B_{q'}$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{R}^3$  (car  $u'$  est un endomorphisme autoadjoint) et vérifie  $\forall X \in \mathbb{R}^3, B_{q'}((X, X)) = \langle u'(X), X \rangle = q'(X)$ . On en déduit que  $q'$  est une forme quadratique et que  $B_{q'}$  est sa forme polaire.

Puisque  $\mathcal{B}$  est orthonormée, le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ , de la matrice  $A'$  de  $u'$  dans  $\mathcal{B}$ , est  $\langle u(e_j), e_i \rangle$ . Puisque  $\mathcal{B}$  est orthonormée et que  $u'$  est autoadjoint,  $A'$  est une matrice symétrique.

On a déjà  $a_{1,1} = \langle u'(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \rangle = q'(\vec{e}_1) = 0$  et de même  $a_{2,2} = 0$ . Ensuite, le vecteur  $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  est dans  $P$  et par polarisation on obtient

$$a_{1,2} = a_{2,1} = \langle u'(\vec{e}_1), \vec{e}_2 \rangle = B_{q'}((\vec{e}_1, \vec{e}_2)) = \frac{1}{2} (q'(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - q'(\vec{e}_1) - q'(\vec{e}_2)) = 0.$$

Finalement, la matrice de  $u'$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$ .

**I.E.3)** Soit  $X = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ . On a

$$q'(X) = \langle u'(X), X \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} x_i x_j \langle u(\vec{e}_i), \vec{e}_j \rangle = 2ax_1 x_3 + 2bx_2 x_3 + cx_3^2 = x_3(2ax_1 + 2bx_2 + cx_3).$$

Par suite, l'ensemble des  $X \in \mathbb{R}^3$  tels que  $q'(X) = 0$  est donc la réunion du plan d'équation  $x_3 = 0$  c'est-à-dire le plan  $P$  et du plan d'équation  $2ax_1 + 2bx_2 + cx_3 = 0$  (qui est bien un plan car  $(a, b) \neq (0, 0)$ ).

Déterminons les valeurs propres de  $u'$ .

$$\chi_{u'} = \begin{vmatrix} -X & 0 & a \\ 0 & -X & b \\ a & b & c - X \end{vmatrix} = (-X)(X^2 - cX - b^2) + a(aX) = -X(X^2 - cX - a^2 - b^2).$$

On a donc  $\text{Sp}(u') = (0, c - \sqrt{c^2 + 4a^2 + 4b^2}, c + \sqrt{c^2 + 4a^2 + 4b^2})$ .

Puisque  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,  $\sqrt{c^2 + 4a^2 + 4b^2} > \sqrt{c^2} = |c| \geq \pm c$  et donc  $c + \sqrt{c^2 + 4a^2 + 4b^2} > 0$  et  $c - \sqrt{c^2 + 4a^2 + 4b^2} < 0$ .

Si  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,  $u'$  admet une valeur propre strictement positive, une valeur propre strictement négative et une valeur propre nulle.

**I.E.4)** Puisque 0 est valeur propre de  $u'$ ,  $\text{rg}(u') \leq 2$ .

- Si  $(a, b) \neq (0, 0)$ , l'une des deux premières colonnes de  $A'$  et la dernière colonne ne sont pas colinéaires et donc  $\text{rg}(u') = 2$ .
- Si  $(a, b) = (0, 0)$  alors  $\text{rg}(u') = 1$  si  $c \neq 0$  et  $\text{rg}(u') = 0$  si  $c = 0$ .

Si  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,  $\text{rg}(u') = 2$  et si  $(a, b) = (0, 0)$ ,  $\text{rg}(u') = 1$  si  $c \neq 0$  et  $\text{rg}(u') = 0$  si  $c = 0$ .

## Partie II - L'image d'une sphère

**II.A - Une inéquation définissant le domaine  $p(S)$**

**II.A.1)** Posons  $A = (x, y, 0)$ . On a  $p(A) = \xi$ . Soit alors  $X \in \mathbb{R}^3$ .

$X \in p^{-1}(\{\xi\}) \Leftrightarrow p(X) = \xi \Leftrightarrow p(X) = p(A) \Leftrightarrow p(X - A) = 0 \Leftrightarrow X - A \in \text{Ker} p \Leftrightarrow X - A \in \mathbb{R} \vec{v} \Leftrightarrow X \in A + \mathbb{R} \vec{v} \Leftrightarrow X \in D_\xi$ .

$$p^{-1}(\{\xi\}) = D_\xi.$$

Si  $\xi \in p(S)$ , il existe  $a \in S$  tel que  $p(a) = \xi$ . Mais alors,  $a \in p^{-1}(\{\xi\}) = D_\xi$ . Le point  $a$  est ainsi commun à  $S$  et  $D_\xi$  et donc  $S \cap D_\xi \neq \emptyset$ .

Si  $S \cap D_\xi \neq \emptyset$ , soit  $a \in S \cap D_\xi$ . Alors  $a \in p^{-1}(\xi)$  et donc  $\xi = p(a) \in p(S)$ .

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, (\xi \in p(S) \Leftrightarrow S \cap D_\xi \neq \emptyset).$$

Ensuite

$$S \cap D_\xi \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3, \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 \\ X = x + t \cos \theta \\ Y = y + t \sin \theta \\ Z = z + t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3, \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} (x + t \cos \theta)^2 + (y + t \sin \theta)^2 + t^2 - R^2 = 0 \\ X = x + t \cos \theta \\ Y = y + t \sin \theta \\ Z = t \end{cases}$$

$$\exists t \in \mathbb{R} / (x + t \cos \theta)^2 + (y + t \sin \theta)^2 + t^2 - R^2 = 0.$$

Donc

$$\forall \xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, (\xi \in p(S) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / (x + t \cos \theta)^2 + (y + t \sin \theta)^2 + t^2 - R^2 = 0).$$

**II.A.2)** L'équation précédente s'écrit encore  $2t^2 + 2(x \cos \theta + y \sin \theta)t + x^2 + y^2 - R^2 = 0$ . Cette équation a au moins une solution réelle si et seulement si son discriminant réduit est positif ou nul. Or,

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 - 2(x^2 + y^2 - R^2) \geq 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) - (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 \leq 2R^2.$$

**II.A.3) a)** La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est  $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . On sait alors que  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  ou encore que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

b) Une rotation est une isométrie et donc  $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ . Par suite,

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow 2(x'^2 + y'^2) - x'^2 = 2R^2 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{2R^2} + \frac{y'^2}{R^2} = 1.$$

$\mathcal{E}$  est l'ellipse d'équation  $\frac{x'^2}{2R^2} + \frac{y'^2}{R^2} = 1$  dans  $\mathcal{R}'$ .

c) Avec les notations usuelles,  $a = R\sqrt{2} > R = b$  et donc  $\mathcal{E}$  est une ellipse d'axe focal  $(Ox')$  qui est encore la droite passant par  $O$  et d'angle polaire  $\theta$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

Ensuite,  $c^2 = a^2 - b^2 = R^2$  et donc  $c = R$ . Les foyers  $F$  et  $F'$  sont les points de coordonnées  $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix}$  dans le repère  $\mathcal{R}'$ .

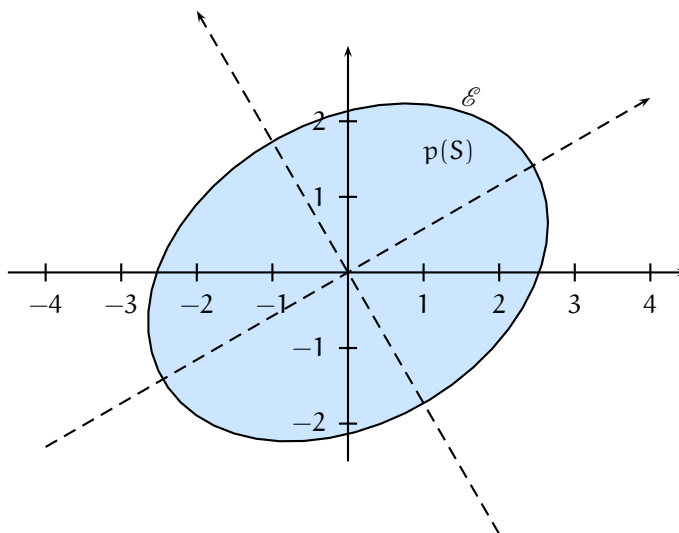
Enfin,  $e = \frac{c}{a} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$$a = R\sqrt{2}, b = R, c = R, e = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

d)  $M \in p(S) \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) - (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 \leq 2R^2 \Leftrightarrow 2(x'^2 + y'^2) - x'^2 \leq 2R^2 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{2R^2} + \frac{y'^2}{R^2} \leq 1$ . Donc

$p(S)$  est le domaine borné limité par  $\mathcal{E}$ .

Graphique dans le cas  $\theta = \frac{\pi}{6}$  et  $R = 2$ .



## II.B - Etude du contour apparent de $S$

II.B.1) Soit  $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Reprenons les calculs fait en II.A.1) et II.A.2).  $\xi$  appartient à  $\mathcal{E}$  si et seulement si le discriminant considéré est nul. Dans ce cas, l'équation d'inconnue  $t$  correspondante admet la solution double  $t_0 = -\frac{1}{2}(x \cos \theta + y \sin \theta)$ .

Le point  $\xi$  admet alors un et un seul antécédent noté  $\pi(\xi)$  et

$$\forall \xi \in \mathcal{E}, \pi(\xi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x \cos \theta + y \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**II.B.2)** Soit  $\xi \in \mathcal{E}$ .

$$\begin{aligned} \langle \pi(\xi), \vec{v} \rangle &= \cos \theta \left( x - \frac{1}{2}(x \cos \theta + y \sin \theta) \cos \theta \right) + \sin \theta \left( y - \frac{1}{2}(x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \theta \right) - \frac{1}{2}(x \cos \theta + y \sin \theta) \\ &= \frac{1}{2}(x \cos \theta + y \sin \theta)(1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \xi \in \mathcal{E}, \langle \pi(\xi), \vec{v} \rangle = 0.}$$

**II.B.3)** Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$  tel que  $\langle \vec{v}, X \rangle = 0$ . On a donc  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  et  $x \cos \theta + y \sin \theta + z = 0$ .

$$\begin{aligned} \Phi(p(X)) &= 2((x - z \cos \theta)^2 + (y - z \sin \theta)^2) - ((x - z \cos \theta) \cos \theta + (y - z \sin \theta) \sin \theta)^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2 - 2z(x \cos \theta + y \sin \theta)) - ((x \cos \theta + y \sin \theta) - z)^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2 - 2z(-z)) - (-z - z)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2R^2. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\Phi(p(X)) = 2R^2$  et donc  $p(X) \in \mathcal{E}$ . Finalement,

$$\boxed{\forall X \in S, X \in \Sigma \Leftrightarrow \langle \vec{v}, X \rangle = 0.}$$

Ainsi,  $\Sigma$  est l'intersection de  $S$  et du plan passant par  $O$  de vecteur normal  $\vec{v}$  et donc  $\Sigma$  un grand cercle de la sphère  $S$ . De plus, comme l'image par  $p$  de ce grand cercle est la « vraie » ellipse  $\mathcal{E}$ , la sphère  $S$  n'est pas représentée en vraie grandeur par  $p$ .

## II.C - De certaines symétries vectorielles laissant stables $\mathcal{E}$

**II.C.1)**  $p_0$  est une application linéaire de  $P_0$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

$\vec{v} \notin P_0$  et donc  $\text{Ker}(p_0) = \text{Ker}(p) \cap P_0 = \{0\}$ . On en déduit que  $p_0$  est injective. Enfin, puisque  $\dim(P_0) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2) < +\infty$ ,

$$\boxed{p_0 \text{ est un isomorphisme de } P_0 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

**II.C.2) a)**  $s$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même et

$$s^2 = p_0 \circ \sigma \circ p_1 \circ p_0 \circ \sigma \circ p_1 = p_0 \circ \sigma \circ \text{Id}_{P_0} \circ \sigma \circ p_1 = p_0 \circ \sigma^2 \circ p_1 = p_0 \circ p_1 = \text{Id}_{P_0}.$$

$$\boxed{s \text{ est une involution linéaire de } \mathbb{R}^2 \text{ sur lui-même.}$$

**b)**  $s = \text{Id}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow p_0 \circ \sigma \circ p_1 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \sigma = p_0^{-1} \circ p_1^{-1} \Leftrightarrow \sigma = \text{Id}_{P_0}$  et de même,  $s = -\text{Id}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \sigma = -\text{Id}_{P_0}$ .

Excepté ces cas particuliers,  $\sigma$  admet deux droites propres à savoir les droites  $D_1 = \text{Ker}(\sigma - \text{Id}_{P_0})$  et  $D_2 = \text{Ker}(\sigma + \text{Id}_{P_0})$  et de même  $s$  admet deux droites propres à savoir les droites  $\Delta_1 = \text{Ker}(s - \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$  et  $\Delta_2 = \text{Ker}(s + \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ .

Soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \vec{u} \in \Delta_1 &\Leftrightarrow s(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow p_0 \circ \sigma \circ p_1(\vec{u}) = \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \sigma(p_1(\vec{u})) = p_1(\vec{u}) \Leftrightarrow p_1(\vec{u}) \in D_1 \Leftrightarrow \vec{u} \in p_0(D_1). \end{aligned}$$

Donc,  $\Delta_1 = p_0(D_1)$  et de même,  $\Delta_2 = p_0(D_2)$ .

$$\boxed{\text{Ker}(s - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = p_0(\text{Ker}(\sigma - \text{Id}_{P_0})) \text{ et } \text{Ker}(s + \text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = p_0(\text{Ker}(\sigma + \text{Id}_{P_0})).}$$

**c)**  $\Sigma$  est contenu dans  $P_0$  et donc

$$\begin{aligned} s(\Sigma) \subset \Sigma &\Leftrightarrow p_0(\sigma(p_1(\Sigma))) \subset \Sigma \Leftrightarrow \sigma(p_1(\Sigma)) \subset p_1(\Sigma) \\ &\Leftrightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}. \end{aligned}$$

### Partie III - Balayage de $p(S)$ par des cercles

#### III.A - Question préliminaire

Pour  $t \in I$ , posons  $\Gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ . Pour  $t_0 \in I$ , on a

$$(p \circ \Gamma)'(t_0) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - \cos \theta z \\ y - \sin \theta z \end{pmatrix} (t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) - \cos \theta z'(t_0) \\ y'(t_0) - \sin \theta z'(t_0) \end{pmatrix} = p(\Gamma'(t_0)).$$

De plus, comme  $\Gamma'(t_0)$  n'est pas colinéaire à  $\vec{v}$ , on a  $(p \circ \Gamma)'(t_0) = p(\Gamma'(t_0)) \neq 0$ . Le point  $p \circ \gamma(t_0)$  est donc régulier.

Le point  $p \circ \gamma(t_0)$  est régulier et la tangente en ce point est dirigée par  $p(\Gamma'(t_0))$ .

#### III.B -

**III.B.1)** Notons  $P_\delta$  le plan d'équation  $z = R \sin \delta$ . La distance du centre  $O$  de  $S$  au plan  $P_\delta$  est  $R|\sin \delta|$  et est inférieure ou égale au rayon  $R$  de  $S$ . Donc  $S \cap P_\delta$  est un cercle noté  $C_\delta$ . Déterminons alors une paramétrisation de ce cercle.

Soit  $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} M \in S \cap P_\delta &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = R \sin \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - R^2 \sin^2 \delta \\ z = R \sin \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 \delta \\ z = R \sin \delta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = R \cos \delta \cos \varphi \\ y = R \cos \delta \sin \varphi \\ z = R \sin \delta \end{cases} \end{aligned}$$

Le centre de  $C_\delta$  est le point  $\Omega_\delta = (0, 0, R \sin \delta)$  et le rayon de  $C_\delta$  est  $r = \sqrt{R^2 - (R \sin \delta)^2} = \sqrt{R^2 \cos^2 \delta} = R \cos \delta$  (car  $\cos \delta \geq 0$ ).

Le centre de  $C_\delta$  est le point  $\Omega_\delta = (0, 0, R \sin \delta)$  et le rayon de  $C_\delta$  est  $r = R \cos \delta$ .

**III.B.2)** Soit  $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} M \in P_0 \cap C_\delta &\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = R \cos \delta \cos \varphi \\ y = R \cos \delta \sin \varphi \\ z = R \sin \delta \\ x \cos \theta + y \sin \theta + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = R \cos \delta \cos \varphi \\ y = R \cos \delta \sin \varphi \\ z = R \sin \delta \\ \cos \delta \cos \varphi \cos \theta + \cos \delta \sin \varphi \sin \theta + \sin \delta = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = R \cos \delta \cos \varphi \\ y = R \cos \delta \sin \varphi \\ z = R \sin \delta \\ \cos \delta \cos(\varphi - \theta) + \sin \delta = 0 \text{ (E)} \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ , l'équation (E) n'a pas de solution. Si  $|\delta| < \frac{\pi}{2}$ , l'équation (E) équivaut à  $\cos(\varphi - \theta) = -\tan \delta$ . Cette dernière équation d'inconnue  $\varphi$  a des solutions si et seulement si  $-1 \leq -\tan \delta \leq 1$  ce qui équivaut à  $|\delta| \leq \frac{\pi}{4}$ .

En résumé, si  $|\delta| > \frac{\pi}{4}$ , l'équation (E) n'a pas de solution et  $C_\delta \cap P_0 = \emptyset$ .

Si  $|\delta| \leq \frac{\pi}{4}$ , l'équation (E) a au moins une solution (par exemple,  $\varphi = \theta + \text{Arccos}(-\tan \delta)$ ) et pour cette valeur de  $\varphi$ , le

point  $\begin{pmatrix} R \cos \delta \cos \varphi \\ R \cos \delta \sin \varphi \\ R \sin \delta \end{pmatrix}$  appartient à  $C_\delta \cap P_0$  de sorte de  $P_0 \cap C_\delta \neq \emptyset$ .

$$\forall \delta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], P_0 \cap C_\delta \neq \emptyset \Leftrightarrow |\delta| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Plus précisément, quand  $|\delta| < \frac{\pi}{4}$ , l'équation (E) admet deux solutions modulo  $2\pi$  (et donc  $P_0 \cap C_\delta$  contient au plus deux points) à savoir  $\varphi_1 = \theta + \text{Arccos}(-\tan \delta)$  et  $\varphi_2 = \theta - \text{Arccos}(-\tan \delta)$ . Ces solutions sont distinctes modulo  $2\pi$  car

$$|\delta| < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\tan \delta \in ]-1, 1[ \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 2 \operatorname{Arccos}(-\tan \delta) \in ]0, 2\pi[.$$

Puisque  $R \cos \delta \neq 0$ , les points  $M_\delta(\varphi_1)$  et  $M_\delta(\varphi_2)$  sont distincts.  $P_0 \cap C_\delta$  est donc constitué de exactement deux points.

**III.B.3)**  $M_\delta(\varphi_0) \in P_0 \cap C_\delta \subset P_0 \cap S = \Sigma$ . Donc  $M_\delta(\varphi_0) \in \Sigma$ .

- Les points  $O$  et  $M_\delta(\varphi_0)$  sont dans  $P_0$  et le vecteur  $\vec{v}$  est normal à  $P_0$ . Donc,  $\vec{v}$  est orthogonal à  $\overrightarrow{OM_\delta(\varphi_0)}$ .
- Ensuite,

$$\left\langle \overrightarrow{OM_\delta(\varphi_0)}, \left[ \frac{dM_\delta}{d\varphi} \right]_{\varphi=\varphi_0} \right\rangle = (R \cos \delta \cos \varphi_0) \times (-R \cos \delta \sin \varphi_0) + (R \cos \delta \sin \varphi_0) \times (R \cos \delta \cos \varphi_0) + (R \sin \delta) \times 0 = 0,$$

Le vecteur  $\left[ \frac{dM_\delta}{d\varphi} \right]_{\varphi=\varphi_0}$  est donc orthogonal à  $\overrightarrow{OM_\delta(\varphi_0)}$ .

- Enfin, puisque  $\Sigma$  est un cercle de centre  $O$  d'après la question II.B.3) et que  $M_\delta(\varphi_0) \in \Sigma$ , tout vecteur tangent à  $\Sigma$  est orthogonal à  $\overrightarrow{OM_\delta(\varphi_0)}$ .

**III.B.4)** On a  $S = \bigcup_{-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}} C_\delta$  et donc  $p(S) = \bigcup_{-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}} p(C_\delta)$ .

Pour  $\delta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  donné,  $p(C_\delta)$  est l'arc paramétré de  $\mathbb{R}^2$   $\varphi \mapsto \begin{pmatrix} -R \cos \theta \sin \delta + R \cos \delta \cos \varphi \\ -R \sin \theta \sin \delta + R \cos \delta \sin \varphi \end{pmatrix}$ . On reconnaît le cercle de centre  $\Omega_\delta = (-R \cos \theta \sin \delta, -R \sin \theta \sin \delta)$  et de rayon  $R_\delta = R \cos \delta$ .

$$\forall \delta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], p(C_\delta) \text{ est le cercle de centre } \Omega_\delta = (-R \cos \theta \sin \delta, -R \sin \theta \sin \delta) \text{ et de rayon } R_\delta = R \cos \delta.$$

$$p(S) \text{ est la réunion des } p(C_\delta), \delta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Supposons  $|\delta| < \frac{\pi}{4}$ . Dans ce cas, le cercle  $C_\delta$  coupe le plan  $P_0$  en deux points distincts  $M_1 = M_\delta(\varphi_1)$  et  $M_2 = M_\delta(\varphi_2)$ . Les points  $M_1$  et  $M_2$  sont sur  $\Sigma$  et donc les points  $p(M_1)$  et  $p(M_2)$  sont sur  $\mathcal{E}$ . De plus, puisque  $M_1$  et  $M_2$  sont deux points distincts de  $P_0$  et que la restriction de  $p$  à  $P_0$  est injective,

les points  $p(M_1)$  et  $p(M_2)$  sont deux points distincts de  $\mathcal{E}$ .

Soit  $i \in \{1, 2\}$ . Notons  $\vec{T}$  un vecteur directeur de la tangente à  $\Sigma$  en  $M_i$  dans  $P_0$  et  $\vec{T}'$  un vecteur directeur de la tangente à  $C_\delta$  en  $M_i$  dans  $P_\delta$ . Les vecteurs  $\vec{T}$  et  $\vec{T}'$  ne sont pas colinéaires à  $\vec{v}$  et donc, d'après la question III.A -, ces vecteurs se projettent en des vecteurs  $p(\vec{T})$  et  $p(\vec{T}')$  non nuls dirigeant respectivement les tangentes à  $p(M_i)$  à  $\mathcal{E}$  et  $p(C_\delta)$ .

Maintenant, la question III.B.3) montre que les vecteurs  $\vec{v}$ ,  $\vec{T}$  et  $\vec{T}'$  sont orthogonaux au vecteur non nul  $\overrightarrow{OM_i}$  et donc sont dans le plan  $\pi = \overrightarrow{OM_i}^\perp$ . Puisque le plan  $\pi$  contient  $\vec{v}$ , la question I.C.4) montre que  $p(\pi)$  est une droite et en particulier, les vecteurs  $p(\vec{T})$  et  $p(\vec{T}')$  sont colinéaires ce qui montre que le cercle  $p(C_\delta)$  et l'ellipse  $\mathcal{E}$  sont tangents en  $M_i$ .

Le cas  $|\delta| = \frac{\pi}{4}$  est identique à la nuance près que les points  $M_1$  et  $M_2$  sont confondus.

**III.B.5)** Soient  $\delta$  et  $\delta'$  deux réels tels que  $0 \leq \delta < \delta' \leq \frac{\pi}{2}$ .

La distance  $d$  entre les centres  $\Omega_\delta$  et  $\Omega_{\delta'}$  de  $p(C_\delta)$  et  $p(C_{\delta'})$  est

$$d = \sqrt{R^2 \cos^2 \theta (\sin \delta' - \sin \delta)^2 + R^2 \sin^2 \theta (\sin \delta' - \sin \delta)^2} = R(\sin \delta' - \sin \delta).$$

On a d'une part

$$d = R \sin \delta' - R \sin \delta \leq R \sin \delta' + R \sin \delta < R \cos \delta' + R \cos \delta = R_\delta + R_{\delta'}.$$

D'autre part,  $|R_\delta - R_{\delta'}| = R|\cos \delta - \cos \delta'| = R(\cos \delta - \cos \delta')$  par décroissance de la fonction  $\cos$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  puis

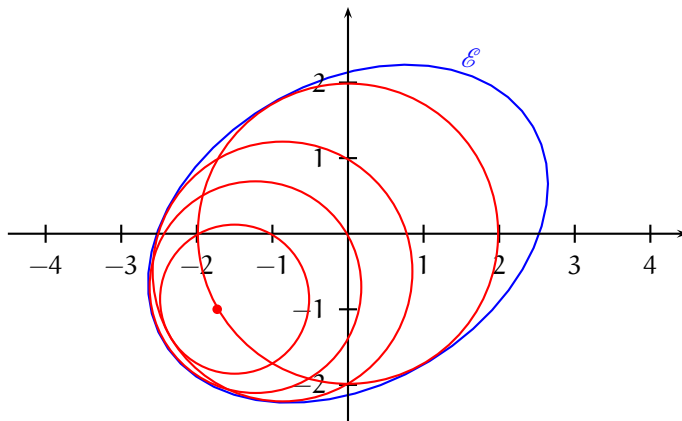
$$\begin{aligned} d - |R_\delta - R_{\delta'}| &= R(\sin \delta' - \sin \delta) - R(\cos \delta - \cos \delta') = R(\sin \delta' + \cos \delta') - R \sin \delta + \cos \delta \\ &= R\sqrt{2} \left( \sin \left( \delta' + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left( \delta + \frac{\pi}{4} \right) \right). \end{aligned}$$

Mais alors,

- si  $0 \leq \delta < \delta' \leq \frac{\pi}{4}$ , on a  $\frac{\pi}{4} \leq \delta + \frac{\pi}{4} < \delta' + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$  et donc  $d - |R_\delta - R_{\delta'}| > 0$  par stricte croissance de la fonction sin sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Dans ce cas, on a  $|R_\delta - R_{\delta'}| < \Omega_\delta \Omega_{\delta'} < R_\delta + R_{\delta'}$  et on sait que les cercles  $p(C_\delta)$  et  $p(C_{\delta'})$  sont sécants en deux points distincts,
- si  $\frac{\pi}{4} \leq \delta < \delta' \leq \frac{\pi}{2}$ , on a  $\frac{\pi}{2} \leq \delta + \frac{\pi}{4} < \delta' + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$  et donc  $d - |R_\delta - R_{\delta'}| < 0$  par stricte décroissance de la fonction sin sur  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ . Dans ce cas, on a  $R_\delta - R_{\delta'} > \Omega_\delta \Omega_{\delta'}$  et on sait que le cercle  $p(C_{\delta'})$  est intérieur au cercle  $p(C_\delta)$ .

### III.C - La récompense finale

Les cercles tracés ci-dessous sont, du plus grand au plus petit :  $p(C_0)$ ,  $p(C_{\pi/6})$ ,  $p(C_{\pi/4})$ ,  $p(C_{\pi/3})$  et  $p(C_{\pi/2})$  (qui est réduit à un point) et tout ceci dans le cas où  $\theta = \frac{\pi}{6}$  et  $R = 2$ .



III.D - On peut aussi découper la sphère  $S$  verticalement par des plans  $P_\delta$  d'équation  $x = R \sin \delta$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ .