SESSION 2008

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES I. FILIERE MP

Partie I - Quelques résultats généraux

I.A -

I.A.1) Théorème de Cauchy-Lipschitz. Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une et une seule solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$.

Ici, les fonctions $a = 0$ et $b = \lambda - q$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc à (E_λ) en tout $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.
Soit y une solution de (E_λ) sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $z(x) = -y(-x)$. z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z''(x) + (\lambda - q(x))z(x) &= -y''(-x) + (\lambda - q(x))(-y(x)) = -\left(y''(-x) + (\lambda - q(-x))y(-x)\right) \text{ (car } q \text{ est paire)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, z est également solution de (E_λ) sur $\mathbb{R}$. Mais alors, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz,

$$\begin{aligned} y \text{ est impaire} &\Leftrightarrow y = z \\ &\Leftrightarrow (y(0) = z(0) \text{ et } y'(0) = z'(0)) \Leftrightarrow (y(0) = -y(0) \text{ et } y'(0) = y'(0)) \\ &\Leftrightarrow y(0) = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Une solution } y \text{ de } (E_\lambda) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est impaire si et seulement si } y(0) = 0.}$$

I.A.2) De même, si y est une solution de (E_λ) sur $\mathbb{R}$, la fonction $z : x \mapsto y(-x)$ est une solution de (E_λ) sur $\mathbb{R}$. Par suite,

$$y \text{ est paire} \Leftrightarrow y(0) = z(0) \text{ et } y'(0) = z'(0) \Leftrightarrow y(0) = y(0) \text{ et } y'(0) = -y'(0) \Leftrightarrow y'(0) = 0.$$

Soit (y_1, y_2) une base de l'espace des solutions de (E_λ) sur $\mathbb{R}$. Le wronskien W de la famille (y_1, y_2) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et en particulier,

$$W(0) = y_1(0)y_2'(0) - y_2(0)y_1'(0) \neq 0,$$

ce qui n'est pas si y_1 et y_2 sont toutes deux paires ou toutes deux impaires, d'après ce qui précède.

On suppose de plus que λ est une valeur propre de Q. Le sous-espace propre $\mathscr{E}_\lambda$ de Q associé à λ est l'ensemble des solutions impaires de (E_λ) sur $\mathbb{R}$. On a donc $1 \leq \dim(\mathscr{E}_\lambda) \leq 2$. Mais d'après ci-dessus, (E_λ) admet au moins une solution qui n'est pas impaire. Donc $\dim(\mathscr{E}_\lambda) < 2$ et finalement

$$\boxed{\text{les sous-espaces propres de } Q \text{ sont de dimension } 1.}$$

I.B -

I.B.1) Ce qui précède s'applique en particulier aux applications linéaires A et B et les sous-espaces propres de A et B sont des droites.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et y une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

$$A(y) = \lambda y \Leftrightarrow y'' + (\lambda - a)y = 0 \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \begin{cases} \alpha \operatorname{ch}(x\sqrt{a-\lambda}) + \beta \operatorname{sh}(x\sqrt{a-\lambda}) \text{ si } a > \lambda \\ \alpha + \beta x \text{ si } a = \lambda \\ \alpha \cos(x\sqrt{\lambda - a}) + \beta \sin(x\sqrt{\lambda - a}) \text{ si } a < \lambda \end{cases}.$$

Dans tous les cas, y est impaire si et seulement si $\alpha = 0$.

Réciproquement,
• si $\lambda \leq a$ les fonction $y : x \mapsto \beta x$ ou $x \mapsto \beta \operatorname{sh}(x\sqrt{a-\lambda})$, $\beta \neq 0$, sont non bornées sur $\mathbb{R}$ et donc non périodiques. Dans ce cas, l'équation $A(y) = \lambda y$ n'admet pas d'autre solution dans E_2 que la fonction nulle et λ n'est pas valeur propre de A.
• Si maintenant $\lambda > a$, les fonctions $y : x \mapsto \beta \sin(x\sqrt{\lambda - a})$ sont les solutions impaires de l'équation $A(y) = \lambda y$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\lambda \in \operatorname{Sp}(A) &\Leftrightarrow \text{la fonction } x \mapsto \sin(x\sqrt{\lambda-a}) \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x\sqrt{\lambda-a} + 2\pi\sqrt{\lambda-a}) = \sin(x\sqrt{\lambda-a}) \\
&\Leftrightarrow 2\pi\sqrt{\lambda-a} \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda-a} \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \sqrt{\lambda-a} = k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*/\ \lambda = a + k^2 \ (\text{car } \lambda > a).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont les $a + k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$ et de même les valeurs propres de B sont les $b + k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \{a + k^2,\ k \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } \operatorname{Sp}(B) = \{b + k^2,\ k \in \mathbb{N}^*\}.}$$

Maintenant, pour $k \in \mathbb{N}^*$ le sous-espace propre de A (ou B) associé à la valeur propre $a + k^2$ est la droite engendré par la fonction $x \mapsto \sin(x\sqrt{(a+k^2)-a})$ ou encore la fonction $x \mapsto \sin(kx)$ c'est-à-dire la fonction s_k. L'énoncé a rappelé que s_k est un vecteur unitaire pour le produit scalaire considéré.

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A \text{ (resp. } B\text{) associé à la valeur propre } a + k^2 \text{ (resp. } b + k^2\text{), } k \in \mathbb{N}^*, \text{ est } \operatorname{Vect}(s_k).}$$

I.B.2) Soit $f \in E_2$.

$$(f|Q(f)) - (f|A(f)) = (f|(Q-A)(f)) = (f|(q-a)f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (q(x)-a)f^2(x)\,dx \geq 0.$$

De même, $(f|Q(f)) - (f|B(f)) \leq 0$.

$$\boxed{\forall f \in E_2,\ (f|A(f)) \leq (f|Q(f)) \leq (f|B(f)).}$$

Partie II - Problème approché de dimension finie

II.A - Question de cours. Π_n est bien définie sur E car V_n est de dimension finie (théorème de la projection orthogonale). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E$. Puisque la famille $(s_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale,

$$\Pi_n(f) = \sum_{k=1}^{n} (f|s_k)s_k = \sum_{k=1}^{n} b_k(f)s_k.$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire, $\Pi_n(f)$ est le n-ème polynôme de Fourier de f ou encore la n-ème somme partielle de la série de Fourier de f. La formule de Parseval valable pour tout élément de E affirme alors que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|\Pi_n(f)\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt,}$$

et le théorème de Pythagore permet quant à lui d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|f - \Pi_n(f)\|^2 = 0.}$$

II.A.2) Soit $(f,g) \in E^2$. $(f|\Pi_n(g)) = (f - \Pi_n(f)|\Pi_n(g)) + (\Pi_n(f)|\Pi_n(g)) = (\Pi_n(f)|\Pi_n(g))$ puisque $\Pi_n(g) \in V_n$ et $f - \Pi_n(f) \in V_n^{\perp}$. Par symétrie des rôles de f et g, $(\Pi_n(f)|g) = (\Pi_n(f)|\Pi_n(g)) = (f|\Pi_n(g))$.

$$\boxed{\forall (f,g) \in E^2,\ (f|\Pi_n(g)) = (\Pi_n(f)|g).}$$

II.A.3) Soit $(f,g) \in E_2^2$. Une intégration par parties fournit

$$\int_0^{2\pi} f''(x)g(x)\,dx = [f'(x)g(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)g'(x)\,dx \text{ (car } f' \text{ et } g \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques).}$$

Mais alors,

$$(Q(f)|g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (-f''(x) + q(x)f(x))g(x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f''(x)g(x)\ + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q(x)f(x))g(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f'(x)g'(x) + q(x)f(x)g(x))\,dx.$$

Par symétrie des rôles de f et g, on a aussi $(f|Q(g)) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (f'(x)g'(x) + q(x)f(x)g(x))\,dx = (Q(f)|g)$.

$$\boxed{\forall (f,g) \in E_2^2,\ (f|Q(g)) = (Q(f)|g).}$$

La restriction Q_n de $\Pi_n \circ Q$ à V_n est linéaire et est à valeurs dans V_n. Donc, Q_n est un endomorphisme de V_n. De plus, pour $(f,g) \in V_n^2$, d'après II.A.2) on a

$$(f|Q_n(g)) = (f|\Pi_n(Q(g))) = (\Pi_n(f)|Q(g)) = (f|Q(g)) = (Q(f)|g) = (Q(f)|\Pi_n(g)) = (\Pi_n(Q(f))|g) = (Q_n(f)|g).$$

$$\boxed{Q_n \in \mathscr{S}(V_n).}$$

II.B -

II.B.1) Soit $f \in V_n$. D'après II.A.2) on a

$$(f|A_n(f)) = (f|\Pi_n(A(f))) = (\Pi_n(f)|A(f)) = (f|A(f)),$$

et de même $(f|Q_n(f)) = (f|Q(f))$ et $(f|B_n(f)) = (f|B(f))$. La question I.B.2) permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\forall f \in V_n,\ (f|A_n(f)) \leq (f|Q_n(f)) \leq (f|B_n(f)).}$$

II.B.2) a) D'après la question I.B.1), les valeurs propres de A_n et B_n sont les valeurs propres de A et B associées aux s_k, $k \in [\![1,n]\!]$. Ce sont les nombres $a + k^2$ (resp. $b + k^2$), $k \in [\![1,n]\!]$.

b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}\dim(V_k \cap \text{Vect}(e_{k,n},\dots,e_{n,n})) &= \dim(V_k) + \dim(\text{Vect}(e_{k,n},\dots,e_{n,n})) - \dim(V_k + \text{Vect}(e_{k,n},\dots,e_{n,n}))\\ &= k + (n-k+1) - \dim(V_k + \text{Vect}(e_{k,n},e_{k+1,n},\dots,e_{n,n}))\\ &= n + 1 - \dim(V_k + \text{Vect}(e_{k,n},e_{k+1,n},\dots,e_{n,n}))\\ &\geq 1.\end{aligned}$$

Ainsi, $V_k \cap \text{Vect}(e_{k,n},e_{k+1,n},\dots,e_{n,n})$ contient un vecteur non nul g. Mais alors $f = \dfrac{g}{\|g\|}$ est un vecteur unitaire élément de $V_k \cap \text{Vect}(e_{k,n},e_{k+1,n},\dots,e_{n,n})$.

On peut alors poser $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} b_i(f)s_i$ et aussi $f = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \alpha_i e_{i,n}$, $(\alpha_k,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1-k}$. Puisque les familles $(s_i)_{1\leq i\leq k}$ et $(e_{i,n})_{k\leq i\leq n}$ sont orthonormales et que f est unitaire, on a

$$(f|Q(f)) = \left(\sum_{i=k}^{n} \alpha_i e_{i,n} \middle| \sum_{i=k}^{n} \alpha_i \lambda_{i,n} e_{i,n}\right) = \sum_{i=k}^{n} \lambda_{i,n}\alpha_i^2 \geq \lambda_{k,n}\sum_{i=k}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_{k,n}\|f\|^2 = \lambda_{k,n}.$$

et aussi

$$(f|B(f)) = \left(\sum_{i=1}^{k} b_i(f)s_i \middle| \sum_{i=1}^{k} b_i(f)(i^2+b)s_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (i^2+b)(b_i(f))^2 \geq (k^2+b)\sum_{i=1}^{k} (b_i(f))^2 = (k^2+b)\|f\|^2 = k^2 + b.$$

D'après I.B.2), on a alors

$$\lambda_{k,n} \leq (f|Q(f)) \leq (f|B(f)) \leq k^2 + b.$$

De même, $\text{Vect}(s_k, \ldots, s_n) \cap \text{Vect}(e_{1,n}, \ldots, e_{k,n}) \neq \{0\}$ et en choisissant un vecteur unitaire f de cet espace, on a d'une part $(f|A(f)) \geq k^2 + a$ et d'autre part $(f|Q(f)) \leq \lambda_{k,n}$.

On a montré que

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ k^2 + a \leq \lambda_{k,n} \leq k^2 + b.}$$

c) Soit $f \in V_{n-1}$.

$$(f|Q_n(f)) = (f|\Pi_n(Q(f))) = (\Pi_n(f)|Q(f)) = (f|Q(f)) = (\Pi_{n-1}(f)|Q(f)) = (f|\Pi_{n-1}(Q(f))) = (f|Q_{n-1}(f)).$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comme à la question précédente, $\text{Vect}(e_{1,n-1}, \ldots, e_{k,n-1})$ et $\text{Vect}(e_{k,n}, \ldots, e_{n,n})$ sont des sous-espaces vectoriels de V_n tels que $\text{Vect}(e_{1,n-1}, \ldots, e_{k,n-1}) \cap \text{Vect}(e_{k,n}, \ldots, e_{n,n})$ contienne un vecteur unitaire f. On pose $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i,n-1} e_{i,n-1} = \sum_{i=k}^{n} \beta_{i,n} e_{i,n}$ et on a

$$\lambda_{k,n} = \lambda_{k,n} \sum_{i=k}^{n} \beta_{i,n}^2 \leq \sum_{i=k}^{n} \lambda_{i,n} \beta_{i,n}^2 = (f|Q_n(f)) = (f|Q_{n-1}(f)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i,n-1} \alpha_{i,n-1}^2 \leq \lambda_{k,n-1} \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i,n-1}^2 = \lambda_{k,n-1}.$$

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \lambda_{k,n-1} \geq \lambda_{k,n}.}$$

II.C - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La question II.B.2)c) montre que la suite $(\lambda_{k,n})_{n \geq k}$ est croissante et la question II.B.2)b) montre que cette suite est majorée par $k^2 + b$. On en déduit que cette suite converge vers un réel noté λ_k. Toujours d'après II.B.2)b), on a $\forall n \geq k,\ k^2 + a \leq \lambda_{k,n} \leq k^2 + b$ et par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda_k \in I_k$.

Soit de nouveau $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geq k+1$, on a $\lambda_{k,n} \leq \lambda_{k+1,n}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$. La suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

Partie III - Une suite de valeurs propres de Q

III.A -

III.A.1) La fonction $y_\lambda^2 + \dfrac{y_\lambda'^2}{\lambda}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En effet, dans le cas contraire, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y_\lambda(x_0) = y_\lambda'(x_0) = 0$ et le théorème de Cauchy montre que $y_\lambda = 0$ ce qui n'est pas car $y'(0) = \sqrt{\lambda} \neq 0$.

Posons alors $r_\lambda = \sqrt{y_\lambda^2 + \dfrac{y_\lambda'^2}{\lambda}}$. r_λ est une fonction strictement positive, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ensuite, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{r_\lambda}(\dfrac{y_\lambda'}{\sqrt{\lambda}} + iy_\lambda)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $U = \{z \in \mathbb{C} /\ |z| = 1\}$. D'après le théorème de relèvement, il existe une fonction θ de classe C_1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{r_\lambda(x)}(\dfrac{y_\lambda'(x)}{\sqrt{\lambda}} + iy_\lambda(x)) = e^{i\theta(x)}$.

Pour $x = 0$, on obtient en particulier $1 = e^{i\theta(0)}$ ce qui montre que $\theta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Mais alors, la fonction $\theta_\lambda = \theta - \theta(0)$ s'annule en 0, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie encore $\dfrac{1}{r_\lambda}(\dfrac{y_\lambda'}{\sqrt{\lambda}} + iy_\lambda) = e^{i\theta_\lambda}$ ou ce qui revient au même, $\dfrac{y_\lambda'}{\sqrt{\lambda}} = r_\lambda \cos\theta_\lambda$ et $y_\lambda = r_\lambda \sin\theta_\lambda$.

III.A.2) La fonction $(x, \theta) \mapsto \sqrt{\lambda} - \dfrac{q}{\sqrt{\lambda}} \sin^2\theta$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet alors d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution maximale de (T_λ).

On a déjà $\theta_\lambda(0) = 0$. Ensuite, $r_\lambda = \sqrt{\dfrac{y'^2}{\lambda} + y_\lambda^2}$ et donc

$$r_\lambda' = \frac{2\left(\dfrac{y_\lambda' y_\lambda''}{\lambda} + y_\lambda y_\lambda'\right)}{2r_\lambda} = \frac{y_\lambda'(y_\lambda'' + \lambda y_\lambda)}{\lambda r_\lambda} = \frac{q y_\lambda y_\lambda'}{\lambda r_\lambda} = \frac{q r_\lambda \cos\theta_\lambda \sqrt{\lambda} r_\lambda \sin\theta_\lambda}{\lambda r_\lambda} = \frac{q r_\lambda}{\sqrt{\lambda}} \cos\theta_\lambda \sin\theta_\lambda.$$

On dérive alors y_λ et on obtient

$$\sqrt{\lambda} r_\lambda \cos\theta_\lambda = y'_\lambda = r'_\lambda \sin\theta_\lambda + r_\lambda \theta'_\lambda \cos\theta_\lambda = \frac{q r_\lambda}{\sqrt{\lambda}} \cos\theta_\lambda \sin^2\theta_\lambda + r_\lambda \theta'_\lambda \cos\theta_\lambda.$$

Maintenant, la fonction r_λ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et donc après simplification par $r\cos\theta_\lambda$ pour les x réels tels que $\cos\theta_\lambda(x) \neq 0$, on obtient

$$\sqrt{\lambda} = \frac{q}{\sqrt{\lambda}} \sin^2\theta_\lambda + \theta'_\lambda,$$

ou encore

$$\theta'_\lambda = \sqrt{\lambda} - \frac{q}{\sqrt{\lambda}} \sin^2\theta_\lambda.$$

Maintenant, cette dernière égalité reste en fait valable pour les x tels que $\cos\theta_\lambda(x) = 0$ par continuité de θ_λ et θ'_λ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\theta'_\lambda = \sqrt{\lambda} - \frac{q}{\sqrt{\lambda}} \sin^2\theta_\lambda \text{ et } \theta_\lambda(0) = 0.}$$

III.A.3) On a vu plus haut que

$$\boxed{r'_\lambda = \frac{q\sin(2\theta_\lambda)}{2\sqrt{\lambda}} r_\lambda.}$$

III.B -

III.B.1) Soit $\lambda > 0$ et $t \geq 0$.

$$|\theta(\lambda, t) - \sqrt{\lambda}t| = \left|\int_0^t (\theta'_\lambda(x) - \sqrt{\lambda})\ dx\right| \leq \int_0^t |\theta'_\lambda(x) - \sqrt{\lambda}|\ dx = \int_0^t \left|\frac{q(x)}{\sqrt{\lambda}}\right| \sin^2\theta_\lambda(x)\ dx \leq \int_0^t \frac{\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}\ dx = \frac{\|q\|_\infty t}{\sqrt{\lambda}},$$

puis classiquement pour tout réel α, $|\sin\alpha| \leq |\alpha|$ et donc

$$\left|\cos(2\theta(\lambda, t)) - \cos\left(2\sqrt{\lambda}t\right)\right| = 2\left|\sin\left(\theta(\lambda, t) + \sqrt{\lambda}t\right) \times \sin\left(\theta(\lambda, t) - \sqrt{\lambda}t\right)\right| \leq 2 \times 1 \times \left|\theta(\lambda, t) - \sqrt{\lambda}t\right| \leq \frac{2\|q\|_\infty t}{\sqrt{\lambda}}.$$

$$\boxed{\forall \lambda > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ |\theta(\lambda, t) - \sqrt{\lambda}t| \leq \frac{\|q\|_\infty t}{\sqrt{\lambda}} \text{ et } \left|\cos(2\theta(\lambda, t)) - \cos\left(2\sqrt{\lambda}t\right)\right| \leq \frac{2\|q\|_\infty t}{\sqrt{\lambda}}.}$$

III.B.2) Intégrons sur $[0, 2\pi]$ l'égalité $\theta'_\lambda = \sqrt{\lambda} - \dfrac{q}{2\sqrt{\lambda}}(1 - \cos(2\theta_\lambda))$. En tenant compte de $\theta_\lambda(0) = 0$, on obtient

$$\theta_\lambda(2\pi) = 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t)(\cos(2\theta_\lambda(t)) - 1)\ dt,$$

et donc

$$\begin{aligned}\left|\theta(\lambda, t) - 2\pi\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t)\ dt - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) \cos\left(2\sqrt{\lambda}t\right)\ dt\right| &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left|\int_0^{2\pi} q(t)(\cos(2\theta_\lambda(t)) - \cos(2\sqrt{\lambda}t))\ dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} \left|q(t)(\cos(2\theta_\lambda(t)) - \cos(2\sqrt{\lambda}t)\right|\ dt \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} \|q\|_\infty \frac{2\|q\|_\infty t}{\sqrt{\lambda}}\ dt = \frac{2\pi^2\|q\|_\infty^2}{\lambda}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R} /\ \forall \lambda > 0,\ \left|\theta(\lambda, t) - 2\pi\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t)\ dt - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t) \cos\left(2\sqrt{\lambda}t\right)\ dt\right| \leq \frac{K}{\lambda}.}$$

III.B.3) Ainsi, quand λ tend vers $+\infty$, on a

$$\theta(\lambda,2\pi)=2\pi\sqrt{\lambda}\left[1-\frac{1}{4\pi\lambda}\int_0^{2\pi}q(t)\ dt+\frac{1}{4\pi\lambda}\int_0^{2\pi}q(t)\cos\left(2\sqrt{\lambda}t\right)\ dt+O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)\right].$$

Maintenant, la fonction q est continue sur $\mathbb{R}$ et le lemme de LEBESGUE permet d'affirmer que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^{2\pi}q(t)\cos\left(2\sqrt{\lambda}t\right)\ dt=0$ et donc que $\frac{1}{4\pi\lambda}\int_0^{2\pi}q(t)\cos\left(2\sqrt{\lambda}t\right)\ dt+O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)\underset{\lambda\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

$$\boxed{\theta(\lambda,2\pi)\underset{\lambda\to+\infty}{=}2\pi\sqrt{\lambda}\left[1-\frac{1}{4\pi\lambda}\int_0^{2\pi}q(t)\ dt+\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right].}$$

III.B.4) a) Il est admis que la fonction $\lambda\mapsto\theta(\lambda,2\pi)$ est continue sur $]0,+\infty[$. D'autre part, la question III.B.3) montre que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\theta(\lambda,2\pi)=+\infty$. Construisons alors la suite $(\mu_k)_{k\geq k_0}$.

• Soit k_0 un entier naturel non nul supérieur ou égal à $\frac{\theta(1,2\pi)}{2\pi}$. Alors, $2k_0\pi\in[\theta(1,2\pi),+\infty[$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\mu_{k_0}>0$ tel que $\theta(\mu_{k_0},2\pi)=2k_0\pi$.

• Soit $k\geq k_0$. Supposons avoir construit $\mu_{k_0},\ldots,\ \mu_k$ tels que $0<\mu_{k_0}\leq\ldots\leq\mu_k$ et $\forall p\in[\![k_0,k]\!],\ \theta(\mu_p,2\pi)=2p\pi$. La fonction $\lambda\mapsto\theta(\lambda,2\pi)$ est continue sur $[\mu_k,+\infty[$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette fonction prend toutes les valeurs de l'intervalle $[\theta(\mu_k,2\pi),\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\theta(\lambda,2\pi)[=[2k\pi,+\infty[$. En particulier, comme $2(k+1)\pi\in]2k\pi,+\infty[$, $\exists\mu_{k+1}\in]\mu_k,+\infty[$ tel que $\theta(\mu_{k+1},2\pi)=2(k+1)\pi$.

On a ainsi construit un entier $k_0>0$ puis, par récurrence, une suite $(\mu_k)_{k\geq k_0}$ strictement croissante de réels strictement positifs telle que $\forall k\geq k_0,\ \theta(\mu_k,2\pi)=2k\pi$.

b) La suite (μ_k) est strictement croissante. Si elle converge vers un réel μ, par continuité de la fonction $\lambda\mapsto\theta(\lambda,2\pi)$ sur $]0,+\infty[$, la suite $(\theta(\mu_k,2\pi))$ converge vers le réel $\theta(\mu,2\pi)$. Ceci contredit $\lim\limits_{k\to+\infty}\theta(\mu_k,2\pi)=\lim\limits_{k\to+\infty}2k\pi=+\infty$. Donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\mu_k=+\infty$. D'après II.B.3)

$$\begin{aligned}4\pi^2(k^2-\mu_k)=\theta(\mu_k,2\pi)^2-(2\pi\sqrt{\mu_k})^2&\underset{k\to+\infty}{=}(2\pi\sqrt{\mu_k})^2\left(\left[1-\frac{1}{4\pi\mu_k}\int_0^{2\pi}q(t)\ dt+o\left(\frac{1}{\mu_k}\right)\right]^2-1\right)\\&\underset{k\to+\infty}{=}(2\pi\sqrt{\mu_k})^2\left(1-\frac{2}{4\pi\mu_k}\int_0^{2\pi}q(t)\ dt+o\left(\frac{1}{\mu_k}\right)-1\right)\\&=-2\pi\int_0^{2\pi}q(t)\ dt+o(1),\end{aligned}$$

et donc

$$\mu_k-k^2\underset{k\to+\infty}{=}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}q(t)\ dt+o(1).$$

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty}(\mu_k-k^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}q(t)\ dt.}$$

III.C -

III.C.1) • Pour $x\in\mathbb{R}$, posons $\varphi_\lambda(x)=-\theta_\lambda(-x)$. φ_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\varphi_\lambda'(x)=\theta_\lambda'(-x)=\sqrt{\lambda}-\frac{q(-x)}{\sqrt{\lambda}}\sin^2(\theta_\lambda(-x))=\sqrt{\lambda}-\frac{q(x)}{\sqrt{\lambda}}\sin^2(-\varphi_\lambda(x))=\sqrt{\lambda}-\frac{q(x)}{\sqrt{\lambda}}\sin^2(\varphi_\lambda(x)),$$

et de plus, $\varphi_\lambda(0)=-\theta_\lambda(0)=0$. Ainsi, φ_λ est solution de (T_λ) et le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ permet d'affirmer que $\varphi_\lambda=\theta_\lambda$ et donc que $\forall x\in\mathbb{R},\ \theta_\lambda(-x)=-\theta_\lambda(x)$.

• Pour $x\in\mathbb{R}$, posons $\varphi_\lambda(x)=\theta_\lambda(x+2\pi)-2k\pi$. φ_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\varphi_\lambda'(x)=\theta_\lambda'(x+2\pi)=\sqrt{\lambda}-\frac{q(x+2\pi)}{\sqrt{\lambda}}\sin^2(\theta_\lambda(x+2\pi))=\sqrt{\lambda}-\frac{q(x)}{\sqrt{\lambda}}\sin^2(\varphi_\lambda(x)+2k\pi)=\sqrt{\lambda}-\frac{q(x)}{\sqrt{\lambda}}\sin^2(\varphi_\lambda(x)),$$

et de plus, $\varphi_\lambda(0)=\theta_\lambda(2\pi)-2k\pi=0$. De même que précédemment, le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ permet d'affirmer que $\varphi_\lambda=\theta_\lambda$ et donc que $\forall x\in\mathbb{R},\ \theta_\lambda(x+2\pi)-2k\pi=\theta_\lambda(x)$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda\in]0,+\infty[\cap\mathrm{Sp}(Q),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \theta(\lambda,-x)=-\theta(\lambda,x) \text{ et } \theta(\lambda,x+2\pi)-2k\pi=\theta(\lambda,x).}$$

III.C.2) Puisque u est impaire et 2π-périodique, pour tout réel x, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi}u(t)\ dt=\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\ dt=0$ et donc $\displaystyle\int_0^{x+2\pi}u(t)\ dt=\int_0^x u(t)\ dt+\int_x^{x+2\pi}u(t)\ dt=\int_0^x u(t)\ dt$. La fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x u(t)\ dt$ est donc 2π-périodique.

On a vu à la question II.A.3) que $r'_\lambda=ur_\lambda$ où $u=\dfrac{q\sin(2\theta)}{2\sqrt{\lambda}}$. En tenant compte de $r_\lambda(0)=\sqrt{\dfrac{\lambda}{\lambda}+0}=1$, on a donc $\forall x\in\mathbb{R},\ r_\lambda(x)=e^{\int_0^x u(t)\ dt}$.

Maintenant, la fonction q est paire et 2π-périodique et d'après II.C.1), la fonction $\sin(2\theta_\lambda)$ est impaire et 2π-périodique. On en déduit que la fonction u est impaire et 2π-périodique et donc que r_λ est 2π-périodique. D'autre part, u est impaire et donc la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x u(t)\ dt$ est paire. Il en est de même de r_λ.

$$\boxed{r_\lambda \text{ est } 2\pi\text{-périodique et paire.}}$$

III.C.3) Ainsi, la fonction $\sin\theta_\lambda$ est impaire et 2π-périodique d'après II.C.1) et la fonction r_λ est paire et 2π-périodique d'après II.C.2). On en déduit que $y_\lambda=r_\lambda\sin\theta_\lambda$ est impaire et 2π-périodique.

y_λ est donc un élément non nul de E_2 (car $y'_\lambda(0)=\sqrt{\lambda}\neq0$) tel que $y''+(\lambda-q)y=0$ ou encore tel que $Q(y_\lambda)=\lambda y_\lambda$. On en déduit que

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } Q.}$$

III.C.4) Les réels μ_k forment donc une suite de valeurs propres de Q.

Partie IV - Valeurs propres de Q

IV.A -

IV.A.1) a) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ puis z_n un vecteur propre associé à α_n. Les deux vecteurs $\pm\dfrac{z_n}{\|z_n\|}$ sont unitaires, encore vecteurs propres de Q_n associés à α_n et l'un des deux a une dérivée positive en 0. On peut donc trouver y_n vecteur propre unitaire de Q_n associé à α_n tel que $y'_n(0)\geq0$.

b) y_n est dans $V_n=\mathrm{Vect}(s_k)_{1\leq k\leq n}$ et donc y''_n est dans $\mathrm{Vect}(-k^2s_k)_{1\leq k\leq n}=\mathrm{Vect}(s_k)_{1\leq k\leq n}=V_n$. Par suite, $\Pi_n(y''_n)=y''_n$ puis

$$Q_n(y_n)=\Pi_n(Q(y_n))=\Pi_n(-y''_n+qy_n)=-y''_n+\Pi_n(qy_n),$$

puis

$$\|Q(y_n)-\alpha_ny_n\|_2=\|Q(y_n)-Q_n(y_n)\|_2=\|(-y''_n+qy_n)-(-y''_n+\Pi_n(qy_n))\|_2=\|qy_n-\Pi_n(qy_n)\|_2.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \|Q(y_n)-\alpha_ny_n\|_2=\|qy_n-\Pi_n(qy_n)\|_2.}$$

IV.A.2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. y_n est dans V_n et la famille $(s_m)_{1\leq m\leq n}$ est une base orthonormale de V_n. Donc, $y_n=\displaystyle\sum_{m=1}^{n}(y_n|s_m)\,s_m=\sum_{m=1}^{n}b_m(y_n)s_m$ puis par linéarité de Π_n,

$$qy_n-\Pi_n(qy_n)=\sum_{m=1}^{n}b_m(y_n)qs_m-\sum_{m=1}^{n}b_m(y_n)\Pi_n(qs_m)=\sum_{m=1}^{n}b_m(y_n)\,[qs_m-\Pi_n(qs_m)].$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ qy_n-\Pi_n(qy_n)=\sum_{m=1}^{n}b_m(y_n)\,[qs_m-\Pi_n(qs_m)].}$$

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $m \in [\![1, n]\!]$.

$$\|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = \|qy_n - \Pi_n(qy_n)\|_2 = \left\| \sum_{m=1}^{n} b_m(y_n)\,[qs_m - \Pi_n(qs_m)] \right\|_2$$
$$\leq \sum_{m=1}^{n} |b_m(y_n)|\, \|qs_m - \Pi_n(qs_m)\|_2 = \sum_{m=1}^{n} |b_m(y_n)| r_{m,n}.$$

Ensuite, d'après le théorème de PYTHAGORE,

$$\begin{aligned} r_{m,n} &= \sqrt{\|qs_m - \Pi_n(qs_m)\|_2^2} = \sqrt{\|qs_m\|_2^2 - \|\Pi_n(qs_m)\|_2^2} \\ &\leq \|qs_m\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q^2(t)\sin^2(mt)\,dt} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q^2(t)\,dt} = \|q\|_2. \end{aligned}$$

e) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $m \in [\![1, n]\!]$. Par définition, on a $-y_n'' + qy_n - \alpha_n y_n = 0$. On sait que $b_m(y_n'') = -m^2 b_n(y_n)$ et donc, par linéarité des coefficients de FOURIER,

$$-m^2 b_m(y_n) + b_m(qy_n) - \alpha_n b_m(y_n) = 0.$$

f) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $m \in [\![1, n]\!]$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$|b_m(y_n)| = |(y_n|s_m)| \leq \|y_n\|_2 \times \|s_m\|_2 = 1 \times 1 = 1.$$

Puis,

$$|b_m(qy_n)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |q(x)| \times |y_n(x)\,dx = (|q| \mid |y_n|) \leq \||q|\|_2 \times \||y_n|\|_2 = \|q\|_2\|y_n\|_2 = \|q\|_2.$$

et donc d'après e),

$$|m^2 b_m(y_n)| = |-b_m(qy_n) + \alpha_n b_m(y_n)| \leq |b_m(qy_n)| + \alpha_n |b_m(y_n)| \leq \|q\|_2 + 1 \times \sup\{\alpha_n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = C.$$

g) Pour $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $m \leq n$, posons $x_{m,n} = |b_m(y_n)| r_{m,n}$.

• D'après f), on a $|x_{m,n}| \leq r_{m,n} = \|qs_m - \Pi_n(qs_m)\|_2$. D'après le rappel de cours II.A.1), on a $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_{m,n} = 0$ et donc $\forall m \in \mathbb{N}^*$, la suite $(x_{m,n})_{n\geq m}$ converge et d $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{m,n} = 0 = x_m$.

• D'après f) et d), $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n$, $|x_{m,n}| \leq \dfrac{C}{m^2} \times \|q\|_2 = \xi_m$. De plus, la série de terme général $\xi_m > 0$ converge.

D'après le résultat admis dans le préliminaire, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} x_{m,n} = \sum\limits_{m=1}^{+\infty} x_m = 0$. Mais alors, d'après d)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = 0.}$$

IV.A.2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\|z_n\|_2 = \|Q(y_n) - \alpha y_n\|_2 \leq \|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 + |\alpha_n - \alpha|\|y_n\|_2 = \|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 + |\alpha_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|z_n\|_2 = 0.}$$

b) Notons x le wronskien de la famille (u, v). On a donc $w = uv' - u'v$. Mais alors, w est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$w' = uv'' + u'v' - u'v' - u''v = u((q-\alpha)v) - v((q-\alpha)u) = 0.$$

Ainsi, la fonction w est constante sur $\mathbb{R}$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ w(x) = w(0) = 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ u(x)v'(x) - vu'(x)v(x) = 1.}$$

c) y_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + (\alpha - q)y = -z_n$ (E). Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $\lambda u + \mu v$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminons alors une solution particulière de (E) par la méthode de variations des constantes : on sait que (E) une solution sous la forme $y = \lambda u + \mu v$ où λ et μ sont des fonctions vérifiant $\left\{\begin{array}{l} \lambda' u + \mu' v = 0 \\ \lambda' u' + \mu' v' = -z_n \end{array}\right.$. Le déterminant de ce système vaut $uv' - u'v$ c'est-à-dire 1 d'après b). Les formules de Cramer fournissent alors

$$\lambda' = \begin{vmatrix} 0 & v \\ -z_n & v' \end{vmatrix} = vz_n \text{ et } \mu' = \begin{vmatrix} u & 0 \\ u' & -z_n \end{vmatrix} = -uz_n,$$

et on peut prendre pour tout réel x : $\lambda(x) = \displaystyle\int_0^x v(t)z_n(t)\ dt$, $\mu(x) = -\displaystyle\int_0^x u(t)z_n(t)\ dt$ puis

$$y(x) = u(x)\int_0^x v(t)z_n(t)\ dt - v(x)\int_0^x u(t)z_n(t)\ dt = \int_0^x (u(x)v(t) - v(x)u(t))z_n(t)\ dt.$$

Ainsi, il existe deux réels λ et μ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ y_n(x) = \lambda u(x) + \mu v(x) + \displaystyle\int_0^x (u(x)v(t) - v(x)u(t))z_n(t)\ dt\ (*)$.

$x = 0$ fournit $0 = \lambda + 0$ (car y_n est impaire) et donc $\lambda = 0$.

Pour obtenir la valeur de μ, on dérive puis on évalue en 0 :

$$\begin{aligned} \left(\int_0^x (u(x)v(t) - v(x)u(t))z_n(t)\ dt\right)' &= \left(u(x)\int_0^x v(t)z_n(t)\ dt - v(x)\int_0^x u(t)z_n(t)\ dt\right)' \\ &= u'(x)\int_0^x v(t)z_n(t)\ dt - v'(x)\int_0^x u(t)z_n(t)\ dt. \end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule en 0 et donc en dérivant $(*)$ puis en évaluant en 0, on obtient $y_n'(0) = \mu v'(0) = \mu$.

On a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ y_n(x) = y_n'(0)v(x) + \int_0^x K(x,t)z_n(t)\ dt \text{ où } K(x,t) = u(x)v(t) - v(x)u(t).}$$

d) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ puis k et l des entiers relatifs tels que $2k\pi \leq a < b \leq 2l\pi$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, b]$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|f_n(x)| \leq \int_{2k\pi}^{2l\pi} |K(x,t)||z_n(t)|\ dt \leq \sqrt{\int_{2k\pi}^{2l\pi} K^2(x,t)\ dt}\sqrt{\int_{2k\pi}^{2l\pi} z_n^2(t)\ dt}.$$

Maintenant, pour $(x, t) \in [2k\pi, 2l\pi]^2$, $|K(x,t)| \leq |u(x)||v(t)| + |u(t)||v(x)| \leq 2\|u\|_{\infty,[2k\pi,2l\pi]}\|v\|_{\infty,[2k\pi,2l\pi]}$ et donc, puisque $z_n = -y_n'' + qy_n - \alpha y_n$ est 2π-périodique,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq 2\sqrt{2(l-k)\pi}\|u\|_{\infty,[2k\pi,2l\pi]}\|v\|_{\infty,[2k\pi,2l\pi]}\sqrt{(l-k)\int_0^{2\pi} z_n^2(t)\ dt} \\ &= 2\pi\sqrt{2}(l-k)\|u\|_{\infty,[2k\pi,2l\pi]}\|v\|_{\infty,[2k\pi,2l\pi]}\|z_n\|_2, \end{aligned}$$

et donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq 2\pi\sqrt{2}(l-k)\|u\|_{\infty,[2k\pi,2l\pi]}\|v\|_{\infty,[2k\pi,2l\pi]}\|z_n\|_2 \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \text{ d'après a).}$$

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur tout segment de } \mathbb{R}.}$$

e) $\sqrt{\int_0^{2\pi}(y_n(x)-y_n'(0)v(x))^2\,dx}=\sqrt{\int_0^{2\pi}f_n^2(x)\,dx}\leq\sqrt{2\pi}\|f_n\|_{\infty,[0,2\pi]}\underset{n\to+\infty}{\to}0$.

Mais alors $|1-|y_n'(0)|\|v\|_2|=|\|y_n\|_2-\|y_n'(0)v\|_2|\leq\|y_n-y_n'(0)v\|_2\underset{n\to+\infty}{\to}0$. Par suite, puisque $y_n'(0)\geq 0$ et que $v\neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n'(0)=\lim\limits_{n\to+\infty}|y_n'(0)|=\dfrac{1}{\|v\|_2}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}y_n'(0)=\frac{1}{\|v\|_2}.}$$

f) Soit $I=[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. $\|y_n-\dfrac{v}{\|v\|_2}\|_{\infty,I}\leq\|y_n-y_n'(0)v\|_{\infty,I}+|y_n'(0)-\dfrac{1}{\|v\|_2}|\|v\|_{\infty,I}\underset{\to+\infty}{\to}0$. La suite de fonctions $(y_n)_{n\geq1}$ converge donc donc uniformément sur tout segment vers la fonction $\dfrac{v}{\|v\|_2}$ qui est de norme 1.

En particulier, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\dfrac{v}{\|v\|_2}$. Puisque chaque fonction y_n est 2π-périodique, il en est de même de $\dfrac{v}{\|v\|_2}$ puis de v. D'autre part, v est impaire et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

En résumé, v est un élément de E_2 non nul tel que $Q(v)=\alpha v$ ce qui montre que

$$\boxed{\alpha\text{ est une valeur propre de }Q.}$$

IV.B -

IV.B.1) Soit $(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k\leq l$. La suite $(e_{k,n}e_{l,n})_{n\geq l}$ converge uniformément vers e_ke_l sur $[0,2\pi]$. En effet,

$$\begin{aligned}\|e_ke_l-e_{k,n}e_{l,n}\|_\infty&\leq\|e_k\|_\infty\|e_l-e_{l,n}\|_\infty+\|e_k-e_{k,n}\|_\infty\|e_{l,n}\|_\infty\\&\leq\|e_k\|_\infty\|e_l-e_{l,n}\|_\infty+\|e_k-e_{k,n}\|_\infty(\|e_l\|_\infty+\|e_{l,n}-e_l\|_\infty)\underset{n\to+\infty}{\to}0.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}(e_k|e_l)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e_k(x)e_l(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{n\to+\infty}e_{k,n}(x)\lim_{n\to+\infty}e_{l,n}(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e_{k,n}(x)e_{l,n}(x)\,dx\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}(e_{k,n}|e_{l,n})=\lim_{n\to+\infty}\delta_{k,l}=\delta_{k,l}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La famille }(e_k)_{k\geq1}\text{ est orthonormale.}}$$

On sait déjà que la suite $(\lambda_k)_{k\geq1}$ est croissante. Il reste à vérifier que les λ_k sont deux à deux distincts. Mais si pour $k\neq l$, on a $\lambda_k=\lambda_l$, alors le sous-espace propre de Q associé à λ_k contient $\mathrm{Vect}(e_k,e_l)$ qui est de dimension 2 puisque la famille $(e_i)_{i\geq1}$ est libre d'après ce qui précède. Ceci contredit le fait que les sous-espaces propres de Q sont des droites d'après I.A.2).

$$\boxed{\text{La suite }(\lambda_k)_{k\geq1}\text{ est strictement croissante.}}$$

IV.B.2) a) En adaptant la relation (1), on obtient $m^2b_m(e_{k,n})+b_m(qe_{k,n})-\lambda_{k,n}b_m(e_{k,n})=0$ et donc

$$|\lambda_{k,n}-m^2|\times|(e_{k,n}|s_m)|=|b_m(qe_{k,m})|.$$

Maintenant, d'après II.B.2), $\lambda_{k,n}\geq a+k^2>m^2$ et donc $|\lambda_{k,n}-m^2|=\lambda_{k,n}-m^2\geq a+k^2-m^2>0$. D'autre part, on a vu en IV.A.1)f) que $|b_m(qe_{k,m})|\leq\|q\|_2$. Ainsi, $(a+k^2-m^2)|(e_{k,n}|s_m)|\leq\|q\|_2$ avec $a+k^2-m^2>0$ et donc

$$\boxed{|(e_{k,n}|s_m)|\leq\frac{\|q\|_2}{a+k^2-m^2}.}$$

b) Soit $m\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\geq m$, $s_m\in V_n$ et la famille $(e_{1,n},\dots,e_{n,n})$ est une base orthonormée de V_n. Donc,

$$\forall n\geq m,\ 1=\|s_m\|_2^2=\sum_{k=1}^n(e_{k,n}|s_m)^2.$$

Pour $n \geq m$ et $k \in [\![1, n]\!]$, posons $x_{k,n} = (e_{k,n}|s_m)^2$. On définit ainsi une suite $(x_{k,n})_{n \geq m, 1 \leq k \leq n}$.

• Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(e_{k,n}s_m)_{n \geq k}$ converge uniformément vers $e_k s_m$ sur le segment $[0, 2\pi]$. par suite, comme plus haut, $\lim\limits_{n \to +\infty} (e_{k,n}|s_m)^2 = (e_k|sm)^2 = x_k$.

• Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ et chaque $n \geq \text{Max}(k, m)$, si $k^2 + a \leq m^2$, on a $|x_{k,n}| = (e_{k,n}|s_m)^2 \leq \|e_{k,n}\|_2^2 \|s_m\|_2^2 = 1$ et si $k^2 + a > m^2$, on a $|x_{k,n}| \leq \dfrac{\|q\|_2}{k^2 + a - m^2}$. En résumé,

$$\forall n \geq m,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ |x_{k,n}| \leq \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } k^2 + a \leq m^2 \\ \dfrac{\|q\|_2}{k^2 + a - m^2} \text{ si } k^2 + a > m^2 \end{array}\right. = \xi_k.$$

La série de terme général ξ_k converge et d'après le résultat admis dans le préliminaire, la série de terme général $x_k = (e_k|sm)^2$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (e_k|s_m)^2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{k,n} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (e_{k,n}|s_m)^2 = \|s_m\|_2 = 1.$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ 1 = \|s_m\|_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (e_k|s_m)^2.}$$

Ensuite, pour $n \geq m$,

$$\|s_m - \sum_{k=1}^{n} (e_k|s_m)e_k\|_2^2 = \|s_m\|_2^2 - 2\sum_{k=1}^{n} (e_k|s_m)^2 + \sum_{k=1}^{n} (e_k|s_m)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (e_k|s_m)^2 - \sum_{k=1}^{n} (e_k|s_m)^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (e_k|s_m)^2.$$

$\|s_m - \sum\limits_{k=1}^{n} (e_k|s_m)e_k\|_2^2$ est donc le reste à l'ordre n de la série convergente de terme général $(e_k|s_m)^2$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|s_m - \sum\limits_{k=1}^{n} (e_k|s_m)e_k\|_2^2 = 0$ et finalement que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \|s_m - \sum_{k=1}^{n} (e_k|s_m)e_k\|_2 = 0.}$$

IV.B.3) Soit $f \in E$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(f|e_k) = 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|(f|s_m)| = \left|\left(f|s_m - \sum_{k=1}^{n} (e_k|s_m)e_k + \sum_{k=1}^{n} (e_k|s_m)e_k\right)\right| = \left|\left(f|s_m - \sum_{k=1}^{n} (e_k|s_m)e_k\right)\right| \leq \|f\|_2 \|s_m - \sum_{k=1}^{n} (e_k|s_m)e_k\|_2.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $|(f|s_m)| \leq 0$ et donc $(f|s_m)$.

Ainsi, f est orthogonal à chaque s_m et puisque la famille $(s_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est totale dans E (par la formule de Parseval), f est nulle. On a montré que

$$\boxed{\text{la famille } (e_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est totale.}}$$

IV.B.4) Supposons par l'absurde qu'il existe une valeur propre λ différente des λ_k. Soit e un vecteur propre associé à λ. D'après II.A.3), pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\lambda(e|e_k) = (Q(e)|e_k) = (e|Q(e_k)) = \lambda_k(e|e_k).$$

Mais alors, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda - \lambda_k)(e|e_k) = 0$ et donc $(e|e_k) = 0$. Puis la famille $(e_k)_{k \geq 1}$ est totale, on en déduit $e = 0$ ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } Q \text{ sont exactement les éléments de la suite } (\lambda_k)_{k \geq 1}.}$$

Partie V - Comportement asymptotique

V.A -

V.A.1) Puisque q n'est pas constante, la fonction $q-a$ est continue positive et non nulle sur $[0, 2\pi]$ et donc $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(q(t)-a)\ dt > 0$ ou encore $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\ dt > a$. De même, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\ dt < b$.

$$\boxed{a < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)\ dt < b.}$$

V.A.2) a) Soit $k \geq k_0$. $I_k \cap I_{k+1} = \varnothing \Leftrightarrow b + k^2 < a + (k+1)^2 \Leftrightarrow k \geq \dfrac{b-a-1}{2}$. Soit $k_1 = \text{Max}\left\{k_0, \left(\dfrac{b-a-1}{2}\right)\right\}$. Pour $k \geq k_1$, on a $b + k^2 < a + (k+1)^2$ et donc $I_k \cap I_{k+1} = \varnothing$.

$$\boxed{\exists k_1 \geq k_0 /\ \forall k \geq k_1,\ I_k \cap I_{k+1} = \varnothing.}$$

b) D'après III.C.4), chaque μ_k est une valeur propre de Q et donc d'après IV.B.4), chaque μ_k est l'un des λ_l.

Maintenant, d'après II.B.4)b), $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}(\mu_k - k^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)\ dt \in]a, b[$ d'après V.A.1). Donc pour k grand, $a + k^2 \leq \mu_k \leq b + k^2$ ou encore $\mu_k \in I_k$. Mais les I_k sont deux à deux disjoints pour k grand et donc pour k grand, I_k ne contient que λ_k et μ_k. On en déduit que pour k grand, $\lambda_k = \mu_k$.

Mais alors, quand k tend vers $+\infty$, $\lambda_k = \mu_k = k^2 + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\ dt + o(1)$.

$$\boxed{\lambda_k \underset{k\to+\infty}{=} k^2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)\ dt + o(1).}$$

