SESSION 2008

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES I. FILIERE PSI

Question préliminaire

L'algorithme se finit car la suite des entiers k est strictement décroissante tant que k n'est pas nul et atteint donc 0 en un nombre fini d'étapes.

Si $b = 0$, la procédure affiche immédiatement $i = 1$.

Sinon, à chaque boucle le triplet (i, j, k) est transformé en le triplet $(i, j^2, \frac{k}{2})$ si k est pair et $(ij, j, k-1)$ si k est impair. Mais alors ij^k est inchangé après chaque boucle car transformé en $i(j^2)^{k/2} = ij^k$ si k est pair et en $(ij)j^{k-1} = ij^k$ si k est impair.
A la première étape, ij^k vaut $1 \times a^b = a^b$ et à la dernière $ij^k = i \times j^0 = i$. L'algorithme affiche donc $i = a^b$ ce qui reste vrai quand $b = 0$.

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N},\ f(a, b) = a^b.}$$

On reconnaît en fait l'algorithme d'exponentiation rapide : l'entier $b = c_0 + c_1 \times 2 + c_2 \times 2^2 + \ldots + c_p 2^p$, $c_i \in \{0, 1\}$, étant décomposé en base 2, on a

$$a^b = a^{c_0} \times (a^{c_1})^2 \times \ldots \times \left(\left(\left((a^{c_p})^2\right)^2\right)\ldots\right)^2.$$

Partie I - Récurrence en dimension 1

I.A - Algorithme en MAPLE.

```
u : =proc(a,b,u0,n)
local i ;
u :=u0 ;
if n>0 then
        for i=1 to n do
            u :=a*u+b ;
        od ;
fi ;
u ;
end ;
```

I.B - Soit k tel que $b + k = ak$ c'est-à-dire $k = \dfrac{b}{a-1}$. Pour tout entier naturel n on a

$$u_{n+1} + k = au_n + b + k = au_n + ak = a(u_n + k).$$

$$\boxed{\text{La suite } \left(u_n + \frac{b}{a-1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } a.}$$

I.C - Pour tout entier naturel n, on a $u_n + k = (u_0 + k)a^n$ et donc $u_n = -\dfrac{b}{a-1} + \left(u_0 + \dfrac{b}{a-1}\right) a^n$ (avec la convention usuelle $a^0 = 1$ pour tout réel a y compris $a = 0$).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{b}{a-1} + \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) a^n.}$$

I.D - Si $u_0 = -\dfrac{b}{a-1}$, la suite u est constante et donc $\rho_S = 1$ si $b \neq 0$ (de sorte que $u_0 \neq 0$) et $\rho_S = +\infty$ si $b = 0$.

Supposons maintenant $u_0 \neq -\dfrac{b}{a-1}$.

- Si $|a| < 1$, u_n tend vers $-\dfrac{b}{a-1} \neq 0$ et donc $\rho_S = 1$.
- Si $|a| > 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(u_0 + \dfrac{b}{a-1}\right) a^n$ et donc $\rho_S = \dfrac{1}{|a|}$.
- Si $a = -1$, la suite u est bornée donc $\rho_S \geq 1$ mais la suite u ne tend pas vers 0 et donc $\rho_S \leq 1$. Dans ce cas, $\rho_S = 1$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } |a| \leq 1,\ \rho_S = 1 \text{ si } u_0 \neq -\dfrac{b}{a-1} \text{ ou si } u_0 = -\dfrac{b}{a-1} \text{ et } b \neq 0 \text{ et } \rho_S = +\infty \text{ si } u_0 = -\dfrac{b}{a-1} \text{ et } b = 0.\\ \text{Si } |a| > 1,\ \rho_S = \dfrac{1}{|a|} \text{ si si } u_0 \neq -\dfrac{b}{a-1},\ \rho_S = 1 \text{ si } u_0 = -\dfrac{b}{a-1} \text{ et } b \neq 0 \text{ et } \rho_S = +\infty \text{ si } u_0 = -\dfrac{b}{a-1} \text{ et } b = 0.\end{array}}$$

Si $|a| \leq 1$, ρ_S vaut au moins 1 et si $|a| > 1$, ρ_S vaut au moins $\dfrac{1}{|a|}$. Sans tous les cas, ρ_S vaut au moins $\mathrm{Min}\left\{1, \dfrac{1}{|a|}\right\}$ avec la convention $\dfrac{1}{0} = \infty$. ρ_S est en particulier strictement positif dans tous les cas.

I.E - Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho_s$. On a en particulier $|z| < 1$ et aussi $az \neq 1$ puis

$$z\sum_{n=0}^{+\infty}(au_n + b)z^n = z\left(aS(z) + \frac{b}{1-z}\right),$$

et aussi

$$z\sum_{n=0}^{+\infty}(au_n + b)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}u_{n+1}z^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}u_n z_n = S(z) - u_0.$$

Par suite, $(1-az)S(z) = \dfrac{bz}{1-z} + u_0$ et finalement $S(z) = \dfrac{u_0}{1-az} + \dfrac{bz}{(1-z)(1-az)}$.

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \left(|z| < \rho_s \Rightarrow S(z) = \frac{u_0}{1-az} + \frac{bz}{(1-z)(1-az)}\right).}$$

I.F - Les suites (u_n) et (u_{n+1}) sont dominées par une certaine suite géométrique (q^n). On en déduit que les suites $\left(\dfrac{u_n}{n!}\right)$ et $\left(\dfrac{u_{n+1}}{n!}\right)$ sont dominées par $\dfrac{q^n}{n!}$. Comme le rayon associé à cette dernière suite est infini, on a montré que

$$\boxed{\rho_G = \rho_{G'} = +\infty.}$$

Pour tout réel x, on a

$$\frac{dG}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n!} \times nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_{n+1}}{n!}x^n.$$

I.G - Pour tout réel,

$$G'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_{n+1}}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{au_n + b}{n!}x^n = a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}x^n + b\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = aG(x) + be^x.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = aG(x) + e^x &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-ax}G'(x) - ae^{-ax}G(x) = be^{(1-a)x}\\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{-ax}G)'(x) = be^{(1-a)x} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-ax}G(x) - e^0G(0) = \frac{b}{1-a}(e^{(1-a)}x - 1)\\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right)e^{ax} - \frac{b}{a-1}e^x\\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = u_0e^{ax} + b\frac{e^{ax} - e^x}{a-1}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = u_0 e^{ax} + b\frac{e^{ax} - e^x}{a-1}.}$$

I.H - Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G(x) = u_0 \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{x^n}{n!} + \frac{b}{a-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (a^n - 1)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{b}{a-1} + \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) a^n \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on réobtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{b}{a-1} + \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) a^n.}$$

Algorithme en MAPLE.

```
u : =proc(a,b,u0,n)
u :=-b/(a-1)+(u0+b/(a-1))*a ∧ n ;
u ;
end ;
```

Le nombre d'opérations de cet algorithme est de l'ordre de n de même que le nombre d'opérations de l'algorithme du I.A-. Les deux algorithmes sont donc aussi rapides. Si on utilise de plus l'algorithme d'exponentiation rapide décrit dans la question préliminaire pour calculer a^n, le nombre d'opérations est alors de l'ordre de $\ln n$ et l'algorithme ainsi obtenu est alors bien plus rapide.

Partie II - Récurrence en dimension 2

II.A - On a $a + d = \mathrm{Tr}(M) = \lambda + \mu$. On en déduit que $d = \lambda + \mu - a$. On a aussi $ad - bc = \det(M) = \lambda\mu$ et donc, puisque $b \neq 0$,

$$c = \frac{ad - \lambda\mu}{b} = \frac{a(\lambda + \mu - a) - \lambda\mu}{b} = \frac{-a^2 + a(\lambda + \mu) - \lambda\mu}{b}$$

Le système (7) s'écrit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = \dfrac{-a^2 + a(\lambda + \mu) - \lambda\mu}{b} u_n + (\lambda + \mu - a)v_n \end{array} \right. .$$

Puisque M admet deux valeurs propres simples, M est diagonalisable et ses deux sous-espaces propres sont deux droites. Un vecteur engendrant le noyau de $M - \lambda I_3$ est $e_1 = (-b, a - \lambda)$ car $b \neq 0$ et un vecteur engendrant noyau de $M - \mu I_3$ est $e_2 = (-b, a - \mu)$. Donc

$$M = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} -b & -b \\ a-\lambda & a-\mu \end{pmatrix} \text{ et } D = \mathrm{diag}(\lambda, \mu).$$

De plus, $\det(M) = b(\mu - \lambda)$ et donc $P^{-1} = \dfrac{1}{b(\mu - \lambda)} \begin{pmatrix} a-\mu & b \\ -a+\lambda & -b \end{pmatrix}$. Mais alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = PD^nP^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{b(\mu-\lambda)} \begin{pmatrix} -b & -b \\ a-\lambda & a-\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-\mu & b \\ -a+\lambda & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{b(\mu-\lambda)} \begin{pmatrix} -b\lambda^n & -b\mu^n \\ (a-\lambda)\lambda^n & (a-\mu)\mu^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-\mu & b \\ -a+\lambda & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{b(\mu-\lambda)} \begin{pmatrix} ab(\mu^n - \lambda^n) + b(\mu\lambda^n - \lambda\mu^n) & b^2(\mu^n - \lambda^n) \\ (a-\lambda)(a-\mu)(\lambda^n - \mu^n) & b((a-\lambda)\lambda^n - (a-\mu)\mu^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{b(\mu-\lambda)}\begin{pmatrix} ab(\mu^n-\lambda^n)+b(\mu\lambda^n-\lambda\mu^n) & b^2(\mu^n-\lambda^n) \\ (a-\lambda)(a-\mu)(\lambda^n-\mu^n) & b((a-\lambda)\lambda^n-(a-\mu)\mu^n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.}$$

II.B - Pour $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<\rho$,

$$\left\{\begin{array}{l} z\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(au_n+bv_n)z^n = z(aS(z)+bT(z)) \\ z\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(cu_n+dv_n)z^n = z(cS(z)+dT(z)) \end{array}\right.$$

mais aussi

$$\left\{\begin{array}{l} z\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(au_n+bv_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}u_{n+1}z^{n+1} = S(z)-u_0 \\ z\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(cu_n+dv_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}v_{n+1}z^{n+1} = T(z)-v_0 \end{array}\right. .$$

$S(z)$ et $T(z)$ sont solutions du système $\left\{\begin{array}{l} z(aS(z)+bT(z)) = S(z)-u_0 \\ z(cS(z)+dT(z)) = T(z)-v_0 \end{array}\right.$ qui s'écrit encore $\left\{\begin{array}{l} (1-az)S(z)-bzT(z)=u_0 \\ -czS(z)+(1-dz)T(z)=v_0 \end{array}\right.$.
Le déterminant de ce système vaut

$$(1-az)(1-dz)-bcz^2 = 1-(a+d)z+(ad-bc)z^2 = 1-(\lambda+\mu)z+\lambda\mu z^2 = (1-\lambda z)(1-\mu z).$$

Pour z tel que $|z|<\rho$ et $(1-\lambda z)(1-\mu z)\neq 0$, les formules de Cramer fournissent

$$S(z) = \frac{u_0(1-dz)+v_0bz}{1-(a+d)z+(ad-bc)z^2} \text{ et } T(z) = \frac{v_0(1-az)+u_0cz}{1-(a+d)z+(ad-bc)z^2}.$$

Donc $|z|<\rho$ et $(1-\lambda z)(1-\mu z)\neq 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} S(z) = u_0\dfrac{1-dz}{1-(a+d)z+(ad-bc)z^2}+v_0\dfrac{bz}{1-(a+d)z+(ad-bc)z^2} \\ \text{et} \\ T(z) = u_0\dfrac{cz}{1-(a+d)z+(ad-bc)z^2}+v_0\dfrac{1-az}{1-(a+d)z+(ad-bc)z^2}. \end{array}}$$

Les suites u et v sont de la forme $(\alpha\lambda^n+\beta\mu^n)$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Donc $\rho\geq\dfrac{1}{\mathrm{Max}\{|\lambda|,|\mu|\}} = \mathrm{Min}\left\{\dfrac{1}{|\lambda|},\dfrac{1}{|\mu|}\right\}$ avec la convention $\dfrac{1}{0}=\infty$.

II.C - Les suites u et v sont dominées par des suites géométriques et donc

$$\boxed{\rho_G=\rho_{G'}=+\infty.}$$

II.D - Pour tout réel x,

$$G'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_{n+1}}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{au_n+bv_n}{n!}x^n = aG(x)+bH(x),$$

et de même $H'(x)=cG(x)+dH(x)$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix} G'(x) \\ H'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G(x) \\ H(x) \end{pmatrix}.}$$

Mais alors

$$\begin{pmatrix} G''(x) \\ H''(x) \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} G'(x) \\ H'(x) \end{pmatrix} = M^2\begin{pmatrix} G(x) \\ H(x) \end{pmatrix}.$$

II.E - Maintenant, d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a $M^2-(a+d)M+(ad-bc)I_2=0$ et donc pour tout réel x,

$$\begin{pmatrix} G''(x) \\ H''(x) \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} G'(x) \\ H'(x) \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} G(x) \\ H(x) \end{pmatrix} = (M^2-(a+d)M+(ad-bc)I_2)\begin{pmatrix} G(x) \\ H(x) \end{pmatrix} = 0.$$

$$\boxed{G \text{ et } H \text{ sont solutions sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } y''-(a+d)y'+(ad-bc)y=0.}$$

Le WRONSKIEN en 0 de ces deux solutions est $G(0)H'(0)-H(0)G'(0)=u_0v_1-u_1v_0$ et on sait que

$$\boxed{(G,H) \text{ est une base de l'espace des solutions de } (E) \text{ si et seulement si } u_0v_1-u_1v_0\neq 0.}$$

II.F - L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y''-(a+d)y'+(ad-bc)y=0$ est $r^2-(a+d)r+(ad-bc)=0$. Cette équation admet les deux solutions distinctes λ et μ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto \alpha e^{\lambda x}+\beta e^{\mu x}$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Par suite, il existe $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{C}^4$ tel que pour tout réel x, $G(x)=\alpha e^{\lambda x}+\beta e^{\mu x}$ et $H(x)=\gamma e^{\lambda x}+\delta e^{\mu x}$.

De plus en évaluant G et G' en 0, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta=u_0 \\ \alpha\lambda+\beta\mu=u_1 \end{array}\right.,$$

ce qui fournit $\alpha=\dfrac{\mu u_0-u_1}{\mu-\lambda}$ et $\beta=\dfrac{u_1-\lambda u_0}{\mu-\lambda}$. De même, $\gamma=\dfrac{\mu v_0-v_1}{\mu-\lambda}$ et $\delta=\dfrac{v_1-\lambda v_0}{\mu-\lambda}$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ G(x)=\frac{\mu u_0-u_1}{\mu-\lambda}e^{\lambda x}+\frac{u_1-\lambda u_0}{\mu-\lambda}e^{\mu x} \text{ et } H(x)=\frac{\mu v_0-v_1}{\mu-\lambda}e^{\lambda x}+\frac{v_1-\lambda v_0}{\mu-\lambda}e^{\mu x}.}$$

Partie III - Transformation de Laplace

III.A - Soit $p\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(p)>\alpha$. La fonction $t\mapsto f(t)e^{-pt}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, quand t tend vers $+\infty$, $f(t)e^{-\alpha t}=O(1)$ fournit $|f(t)e^{-pt}|=|f(t)|e^{-\mathrm{Re}(p)t}=O(e^{-(\mathrm{Re}(p)-\alpha)t})$ et en particulier, d'après un théorème de croissances comparées, $f(t)e^{-pt}=O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puisque $\mathrm{Re}(p)-\alpha>0$. La fonction $t\mapsto f(t)e^{-pt}$ est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. $\mathrm{Lap}(f)(p)$ est donc une intégrale convergente.

III.B - Soit A un réel strictement positif. Les deux fonctions f et $t\mapsto e^{-pt}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_0^A f'(t)e^{-pt}\,dt=\left[f(t)e^{-pt}\right]_0^A+p\int_0^A f(t)e^{-pt}\,dt=f(A)e^{-pA}-f(0)+p\int_0^A f(t)e^{-pt}\,dt.$$

Maintenant, quand t tend vers $+\infty$, $f(t)e^{-pt}=O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc $\lim\limits_{A\to+\infty}f(A)e^{-pA}=0$. Comme d'autre part, $\displaystyle\int_0^A f(t)e^{-pt}\,dt$ a une limite dans $\mathbb{C}$ quand A tend vers $+\infty$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^A f'(t)e^{-pt}\,dt$ a une limite dans $\mathbb{C}$ quand A tend vers $+\infty$ ce qui montre que $\mathrm{Lap}(f')(p)$ est une intégrale convergente et de plus quand A tend vers $+\infty$, on obtient $\mathrm{Lap}(f')(p)=-f(0)+p\mathrm{Lap}(f)(p)$.

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{C},\ (\mathrm{Re}(p)>\alpha\Rightarrow \mathrm{Lap}(f')(p)=-f(0)+p\,\mathrm{Lap}(f)(p).}$$

III.C - Soit $p\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(p)>\dfrac{1}{\rho_S}$ où ρ_S a été défini en I.D-.

$$\begin{aligned}\mathrm{Lap}(G)(p)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}\int_0^{+\infty}t^ne^{-pt}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{p}\right)^n e^{-u}\,\frac{du}{p}\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!p^{n+1}}\int_0^{+\infty}u^ne^{-u}\,du=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!p^{n+1}}\Gamma(n+1)\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{p^{n+1}}=\frac{1}{p}S\left(\frac{1}{p}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{C},\ (\mathrm{Re}(p) > 0 \Rightarrow \mathrm{Lap}(G)(p) = \frac{1}{p} S\left(\frac{1}{p}\right).}$$

III.D - D'après I.G-, pour tout réel x on a $G'(x) = aG(x) + be^x$ et donc pour $p \in \mathbb{C}$ de partie réelle suffisament grande, $\mathrm{Lap}(G')(p) - a\mathrm{Lap}(G)(p) = b\mathrm{Lap}(\exp)(p)$.

Maintenant, d'après la question II.B-, $\mathrm{Lap}(G')(p) - a\mathrm{Lap}(G)(p) = -G(0) + (p-a)\mathrm{Lap}(G)(p) = -u_0 + \frac{p-a}{p} S\left(\frac{1}{p}\right)$. Or,

$$\mathrm{Lap}(\exp)(p) = \int_0^{+\infty} e^t e^{-pt}\, dt = \left[-\frac{e^{-(p-1)t}}{p-1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p-1},$$

et donc $-u_0 + \frac{p-a}{p} S\left(\frac{1}{p}\right) = b\frac{1}{p-1}$. En posant $p = \frac{1}{x}$, on obtient $-u_0 + (1-ax)S(x) = \frac{bx}{1-x}$ et on retrouve $S(x) = \frac{u_0}{1-ax} + \frac{bx}{(1-x)(1-ax)}$.

Partie IV - Une récurrence explosive

IV.A -

IV.A.1) Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a $(u+v)^2 \geq 0$ et $(u-v)^2 \geq 0$. On en déduit que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ -u^2 - v^2 \leq 2uv \leq u^2 + v^2$.

IV.A.2) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $M_n = \begin{pmatrix} an & b \\ cn & d \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. La récurrence (11) s'écrit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = M_n X_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, le déterminant de M_n est $adn^2 - bc$. Ce déterminant est nul si et seulement si $\frac{bc}{ad} = n^2$ pour un certain entier naturel n ce qui est exclu par l'énoncé. On en déduit que pour tout entier naturel n, M_n est une matrice inversible. Par hypothèse, X_0 est un vecteur colonne non nul puis, pour $n \geq 1$, $X_n = M_{n-1} \times \ldots \times M_1 \times M_0 \times X_0 \neq 0$ car $X_0 \neq 0$ et $M_{n-1} \times \ldots \times M_1 \times M_0 \in \mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$. Finalement, pour tout entier naturel n, on a $X_n \neq 0$ ou encore

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \omega(n) \neq 0.}$$

Soit $n \geq 1$.

$$\omega(n+1) = (anu_n + bv_n)^2 + (cu_n + ndv_n)^2 = n^2(a^2u_n^2 + d^2v_n^2) + 2(ab+cd)nu_nv_n + (b^2u_n^2 + c^2v_n^2).$$

D'après la question précédente, en posant $A = \mathrm{Max}\{|a|, |d|\}$ et $B = \mathrm{Max}\{|b|, |c|\}$

$$\omega(n+1) \leq A^2n^2\omega(n) + |ab+cd|n\omega(n) + B^2\omega(n)$$

et donc

$$\frac{\omega(n+1)}{n^2\omega(n)} \leq A^2 + \frac{|ab+cd|}{n} + \frac{B^2}{n^2} = \beta(n).$$

De même, en posant $C = \mathrm{Min}\{|a|, |d|\}$ et $D = \mathrm{Min}\{|b|, |c|\}$,

$$\omega(n+1) \leq C^2n^2\omega(n) - |ab+cd|n\omega(n) + D^2\omega(n)$$

et donc

$$\frac{\omega(n+1)}{n^2\omega(n)} \leq C^2 - \frac{|ab+cd|}{n} + \frac{D^2}{n^2} = \alpha(n).$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$, $\alpha(n) \to C^2$ et $\beta(n) \to A^2$ et donc $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ ont des limites finies et strictement positives quand n tend vers $+\infty$.

IV.B -

IV.B.1) Pour tout entier naturel n, on a $v_n = \dfrac{1}{b}(u_{n+1} - anu_n)$. On sait que les rayons associés aux suites (u_{n+1}) et (anu_n) $(a \neq 0)$ sont encore ρ_S. On en déduit donc que $\rho_T \geq \rho_S$. De même, puisque pour tout entier naturel n, on a $u_n = \dfrac{1}{c}(v_{n+1} - dnv_n)$, on a $\rho_S \geq \rho_T$. Finalement,

$$\boxed{\rho_S = \rho_T.}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{\sqrt{u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2}}{\sqrt{u_n^2 + v_n^2}} \geq n\sqrt{\alpha(n)}$ et puisque $\sqrt{\alpha(n)}$ a une limite réelle strictement positive, on en déduit que $\dfrac{\sqrt{u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2}}{\sqrt{u_n^2 + v_n^2}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{u_n^2 + v_n^2} z^n$ est donc nul. Puisque $\sqrt{u_n^2 + v_n^2} \leq |u_n| + |v_n|$, le rayon R de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (|u_n| + |v_n|)z^n$ est également nul. Maintenant, on sait que R est supérieur ou égal au plus petit des rayons associés aux suites $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ respectivement égaux à ρ_S et ρ_T. On en déduit que

$$\rho_S = \rho_T = \text{Min}\{\rho_S, \rho_T\} \leq R = 0,$$

et donc

$$\boxed{\rho_S = \rho_T = 0.}$$

IV.B.2) L'égalité $\dfrac{v_n}{n!} = \dfrac{1}{b}\left((n+1)\dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!} - an\dfrac{u_n}{n!}\right)$ montre que $\rho_H \geq \rho_G$ et de même l'égalité $\dfrac{u_n}{n!} = \dfrac{1}{c}\left((n+1)\dfrac{v_{n+1}}{(n+1)!} - dn\dfrac{v_n}{n!}\right)$ montre que $\rho_G \geq \rho_H$. Finalement

$$\boxed{\rho_G = \rho_H.}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u'_n = \dfrac{u_n}{n!}$ et $v'_n = \dfrac{v_n}{n!}$. L'encadrement de la question IV.A-2) valable pour $n \geq 1$ s'écrit alors

$$\alpha(n) \leq \frac{(n+1)!^2(u'^2_{n+1} + v'^2_{n+1})}{n^2 \times n!^2(u'^2_n + v'^2_n)} \leq \beta(n) \text{ ou encore } \frac{n}{n+1}\sqrt{\alpha(n)} \leq \frac{\sqrt{u'^2_{n+1} + v'^2_{n+1}}}{\sqrt{u'^2_n + v'^2_n}} \leq \frac{n}{n+1}\sqrt{\beta(n)}.$$

Les membres de gauche et de droite de cet encadrement tendent respectivement vers C et A. En particulier, le rayon de convergence ρ de la série entière associée à la suite $(\sqrt{u'^2_n + v'^2_n})$ est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{A} = \dfrac{1}{\text{Max}\{|a|, |b|\}}$. Puisque $|u'_n| \leq \sqrt{u'^2_n + v'^2_n}$ et $|v'_n| \leq \sqrt{u'^2_n + v'^2_n}$, il en est de même de ρ_S et ρ_T.

$$\boxed{\rho_G = \rho_H \geq \frac{1}{\text{Max}\{|a|, |d|\}}.}$$

IV.C - On suppose que la suite v ne s'annule pas. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$q_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{(n+1)v_{n+1}} = \frac{anu_n + bv_n}{(n+1)(cu_n + dnv_n)} = \frac{an^2q_nv_n + bv_n}{(n+1)(cnq_nv_n + dnv_n)} = \frac{an^2q_n + b}{n(n+1)(cq_n + d)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_{n+1} = \Phi_n(q_n) \text{ où } \Phi_n(z) = \frac{an^2z + b}{n(n+1)(cz + d)}.}$$

IV.D - Algorithme en MAPLE.

```
q : =proc(q1,epsilon)
local r, n ;
n :=1 ;
q :=q1 ;
r :=(a*q+b)/(2*(c*q+d)) ;
q ;
while abs(r-q)>epsilon do
        n :=n+1 ;
        q :=r ;
        r := (a*n∧2*q+b)/(n*(n+1)*(c*q+d)) ;
        q ;
        od ;
end ;
```

IV.E - Pour $|x| < \dfrac{1}{\text{Max}\{|a|,|d|\}}$, on a

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - anu_n - bv_n)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}\frac{x^n}{n!} - ax\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - b\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\frac{x^n}{n!} = G'(x) - axG'(x) - bH(x)$$
$$= (1-ax)G'(x) - bH(x),$$

et de même

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty}(v_{n+1} - cu_n - dnv_n)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}\frac{x^n}{n!} - c\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\frac{x^n}{n!} - d\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = H'(x) - cG(x) - dxH'(x)$$
$$= (1-dx)H'(x) - cG(x).$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{\text{Max}\{|a|,|d|\}}, \frac{1}{\text{Max}\{|a|,|d|\}}\right[,\ \left\{\begin{array}{l}(1-ax)G'(x) = bH(x)\\(1-dx)H'(x) = cG(x)\end{array}\right. .}$$

IV.F - En dérivant la relation $(1-dx)H'(x) = cG(x)$, on obtient $(1-dx)H''(x) - aG'(x) = bH'(x) = bc\dfrac{G(x)}{1-dx}$ et donc

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{\text{Max}\{|a|,|d|\}}, \frac{1}{\text{Max}\{|a|,|d|\}}\right[,\ (1-ax)(1-dx)G''(x) - a(1-dx)G'(x) - bcG(x) = 0.}$$

De même, en dérivant la relation $(1-ax)G'(x) = bH(x)$, on obtient $(1-ax)G''(x) - dH'(x) = cG'(x) = bc\dfrac{H(x)}{1-ax}$ et donc

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{\text{Max}\{|a|,|d|\}}, \frac{1}{\text{Max}\{|a|,|d|\}}\right[,\ (1-ax)(1-dx)H''(x) - d(1-ax)H'(x) - bcH(x) = 0.}$$

IV.G - Soit (E) l'équation différentielle $(1-ax)(1-dx)y'' - a(1-dx)y' - bcy = 0$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, $a_n \neq 0$. Le coefficient de X^n dans $(1-aX)(1-dX)P'' - a(1-dX)P' - bcP$ est $(adn(n-1) + adn - bc)a_n$ ou encore $(adn^2 - bc)a_n$. Puisque $a_n \neq 0$, si P est solution de (E), on a nécessairement $adn^2 - bc = 0$ ou encore $\dfrac{bc}{ad} = n^2$.

Si (E) admet une solution polynomiale non nulle de degré $n \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{bc}{ad} = n^2$.

Réciproquement, supposons que $\dfrac{bc}{ad} = n^2$ pour un certain entier naturel n.
L'application $f\ :\ P \mapsto (1-aX)(1-dX)P'' - a(1-dX)P' - bcP$ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Le calcul précédent montre que l'image de tout élément de $\mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ ou encore $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. f n'est donc pas surjectif et par suite, f est non injectif. Il existe donc un polynôme non nul de degré au plus n solution de (E). L'étude du sens direct montre alors que ce polynôme est de degré exactement n.

$$\boxed{(E) \text{ admet une solution polynomiale de degré } n \in \mathbb{N} \text{ si et seulement si } \frac{bc}{ad} = n^2.}$$

