SESSION 2005

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 1. FILIERE PC

Partie I - Préliminaires

I.A -

I.A.1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de la série de terme général $u(n,p)$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \text{la série de terme général } u(n,p),\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ est convergente.}}$$

I.A.2)

$$\sigma(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$

$$\boxed{\sigma(1) = 1.}$$

I.A.3) Soit $p \geqslant 2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u(n,p-1) - u(n+1,p-1) = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)} = \frac{(n+p)-n}{n(n+1)\dots(n+p)} = pu(n,p).$$

I.A.4) En sommant ces égalités, on obtient $\sigma(p-1)-(\sigma(p-1)-u(1,p-1)) = p\sigma(p)$ et donc $\sigma(p) = \dfrac{u(1,p-1)}{p} = \dfrac{1}{p\times p!}$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sigma(p) = \frac{1}{p\times p!}.}$$

I.B - Soit $q \geqslant 2$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$R(N,q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^q}\,dt = \int_{n}^{+\infty}\frac{1}{t^q}\,dt = \frac{1}{(q-1)n^{q-1}}.$$

$$\boxed{\forall (N,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ 0 \leqslant R(N,q) \leqslant \frac{1}{(q-1)N^{q-1}}.}$$

Partie II - Un exemple d'accélération de la convergence

II.A -

II.A.1) Montrons par récurrence que $\forall p \geqslant 2$, il existe des entiers naturels $a_2,\dots,a_p$, $b_2,\dots,b_p$, $c_2,\dots,c_p$, tels que

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^{p}\frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)}.$$

- Pour $p = 2$ et $x > 0$

$$\frac{1}{x^3} = \frac{(x+1)(x+2)}{x^3(x+1)(x+2)} = \frac{x^2}{x^3(x+1)(x+2)} + \frac{3x+2}{x^3(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{3x+2}{x^3(x+1)(x+2)}$$

et on peut prendre $a_2 = 1$, $b_2 = 3$ et $c_2 = 2$.
• Soit $p \geqslant 2$. Supposons qu'il existe des entiers naturels $a_2, \dots, a_p$, $b_2, \dots, b_p$, $c_2, \dots, c_p$, tels que

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)}.$$

Alors, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)} &= \frac{(b_p x + c_p)(x+p+1)}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)(x+p+1)} \\
&= \frac{b_p x^2}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)(x+p+1)} + \frac{((p+1)b_p + c_p)x + (p+1)c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)(x+p+1)} \\
&= \frac{b_p}{x(x+1)(x+2)\dots(x+p)(x+p+1)} + \frac{((p+1)b_p + c_p)x + (p+1)c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)(x+p+1)}
\end{aligned}$$

et on peut prendre $a_{p+1} = b_p$, $b_{p+1} = (p+1)b_p + c_p$ et $c_{p+1} = (p+1)c_p$ (par hypothèse de récurrence, a_{p+1}, b_{p+1} et c_{p+1} sont effectivement des entiers).

Le résultat est démontré par récurrence.

II.A.2)

$$\boxed{a_2 = 1,\ b_2 = 3 \text{ et } c_2 = 2 \text{ et } \forall p \geqslant 2,\ a_{p+1} = b_p,\ b_{p+1} = (p+1)b_p + c_p \text{ et } c_{p+1} = (p+1)c_p.}$$

II.A.3) Montrons par récurrence que $\forall p \geqslant 2$, $b_p \geqslant c_p \geqslant 0$.
• Puisque $b_2 = 3$ et $c_2 = 2$, c'est vrai pour $p = 2$.
• Soit $p \geqslant 2$. Supposons que $b_p \geqslant c_p \geqslant 0$. Alors, $c_{p+1} = (p+1)c_p \geqslant 0$ puis $b_{p+1} = (p+1)b_p + c_p \geqslant (p+1)c_p + 0 = c_{p+1}$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall p \geqslant 2,\ b_p \geqslant c_p \geqslant 0.}$$

II.A.4) $c_2 = 2$, $c_3 = 3c_2 = 6$ et $c_4 = 4c_3 = 24$. $b_2 = 3$, $b_3 = 3b_2 + c_2 = 11$, $b_4 = 4b_3 + c_3 = 50$. $a_2 = 1$, $a_3 = b_2 = 3$ et $a_4 = b_3 = 11$.

$$\boxed{a_2 = 1,\ a_3 = 3,\ a_4 = 11,\ b_2 = 3,\ b_3 = 11,\ b_4 = 50,\ c_2 = 2,\ c_3 = 6 \text{ et } c_4 = 24.}$$

II.B -
II.B.1) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question I.B,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \leqslant \varepsilon \Leftarrow \frac{1}{2N^2} \leqslant \varepsilon \Leftarrow 2N^2 \geqslant \frac{1}{5 \times 10^{-5}} \Leftarrow N \geqslant 100.$$

$$\boxed{0 \leqslant \zeta(3) - \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3} \leqslant 5 \times 10^{-5}.}$$

II.B.2) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Toujours d'après la question I.B,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{50n + 50n}{n^7} = 100 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leqslant \frac{100}{5N^5},$$

puis, d'après les questions II.A.1) et II.A.4)

$$\begin{aligned}
\zeta(3) &= \sum_{k=2}^{4} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_k}{n(n+1)\dots(n+k)} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)} \\
&= (1 \times \sigma(2) + 3\sigma(3) + 11\sigma(4)) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)} \\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{11}{96} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)} \text{ (d'après la question I.A.4))} \\
&= \frac{17}{32} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)},
\end{aligned}$$

puis, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta(3) - \left(\frac{17}{32} + \sum_{n=1}^{N} \frac{50n+24}{n^3(n+1)\dots(n+4)}\right) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{50n+24}{n^3(n+1)\dots(n+4)} \leqslant 1005N^5.$$

Or

$$\frac{100}{5N^5} \leqslant 5 \times 10^{-5} \Leftarrow N^5 \geqslant \frac{10^2}{5 \times 5 \times 10^{-5}} \Leftarrow N^5 \geqslant 4 \times 10^5 \Leftarrow N \geqslant 14,$$

et donc

$$\boxed{\zeta(3) - \left(\frac{17}{32} + \sum_{n=1}^{14} \frac{50n+24}{n^3(n+1)\dots(n+4)}\right) \leqslant 5 \times 10^{-5}.}$$

II.B.3) $\displaystyle\frac{17}{32} + \sum_{n=1}^{14} \frac{50n+24}{n^3(n+1)\dots(n+4)} = 1,202047\dots$. Donc

$$1,202047\dots \leqslant \zeta(3) \leqslant 1,202097\dots,$$

et on en déduit que $|\zeta(3) - 1,20205| \leqslant 5 \times 10^{-5}$.

$$\boxed{\zeta(3) = 1,20205 \text{ à } 5 \times 10^{-5} \text{ près.}}$$

Partie III - Séries factorielles

III.A -

III.A.1) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) &= \ln\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right) - \ln\left(\frac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)}\right) = \ln\left(\frac{n}{x+n}\right) - \ln\left(\frac{n^x}{(n+1)^x}\right) \\ &= -\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) + x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall x > 0, \text{ la série numérique de terme général } \ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) \text{ converge.}}$$

III.A.2) Soit $x > 0$. La série de terme général $\ln(w_n(x)) - \ln(w_{n-1}(x))$ converge. On sait qu'il en est de même de la suite de terme général $\ln(w_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$, (séries télescopiques). Si on note $a(x)$ la limite de cette suite, alors $w_n(x) = e^{\ln(w_n(x))}$ tend vers $l(x) = e^{a(x)} > 0$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \exists l(x) \in]0,+\infty[/ \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = l(x).}$$

III.B - Soit $x > 0$. D'après ce qui précède (et puisque $l(x) \neq 0$), $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} l(x)v_n(x)$. Par suite, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ \frac{l(x)}{2}|a_n|v_n(x)l(x) \leqslant |a_n|u_n(x) \leqslant 2l(x)\ |a_n|v_n(x).$$

Puisque $l(x) \neq 0$, ceci montre que la série numérique de terme $|a_n|u_n(x)$ converge si et seulement si la série numérique de terme général $|a_n|v_n(x)$ converge.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \sum a_n u_n(x) \text{ est AC si et seulement si } \sum a_n u_n(x) \text{ est AC.}}$$

III.C -

III.C.1) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier naturel n et tout $x \in [\varepsilon, +\infty[$,

$$|a_n u_n(x)| = \frac{|a_n| n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \leqslant \frac{|a_n| n!}{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)},$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{x \in [\varepsilon,+\infty[} |a_n| u_n(x) \leqslant \dfrac{|a_n| n!}{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}$.

Par hypothèse, la série numérique de terme général $\dfrac{|a_n| n!}{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}$ converge et on en déduit que la série de fonctions de terme général $a_n u_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$. Comme d'autre part, chacune de ces fonctions est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[\varepsilon, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[\varepsilon, +\infty[$, la somme f_a est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$ en tant que limite uniforme sur $[\varepsilon, +\infty[$ d'une suite de fonctions continues sur $[\varepsilon, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a montré que

$$\boxed{\forall a \in \mathscr{A}, \text{ la fonction } f_a \text{ est continue sur }]0, +\infty[.}$$

III.C.2) La série de fonctions de terme général $a_n u_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers la fonction f_a sur $[1, +\infty[$. De plus, chaque fonction $a_n u_n$, $n \in \mathbb{N}$, a une limite réelle ℓ_n quand x tend vers $+\infty$ à savoir

$$\ell_n = \lim_{x \to +\infty} a_n u_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = 0.$$

D'après le théorème d'interversion des limites,
- la fonction f_a a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$,
- la série numérique de terme général ℓ_n, $n \in \mathbb{N}$, converge,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$.

$$\boxed{\forall a \in \mathscr{A}, \lim_{x \to +\infty} f_a(x) = 0.}$$

III.D -

III.D.1 Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{1}{n+1}$. Soit $x > 0$.
D'après la question III.B -, la série numérique de terme général $|a_n| u_n(x)$ est de même nature que la série numérique de terme général $|a_n| v_n(x) = \dfrac{1}{(n+1)^{x+1}}$. Puisque $x + 1 > 1$, $\dfrac{1}{(n+1)^{x+1}}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente. On en déduit que la série numérique de terme général $a_n u_n(x)$ converge absolument.

$$\boxed{\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{A}.}$$

III.D.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = 1$. La série de terme général $|a_n| v_n(x) = \dfrac{1}{(n+1)^x}$ diverge quand $x = 1$ et donc

$$\boxed{(1)_{n \in \mathbb{N}} \notin \mathscr{A}.}$$

III.E -

III.E.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction u_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus, la fonction u_n est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$

$$\ln(u_n(x)) = \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k).$$

En dérivant cette dernière égalité (dérivée logarithmique), on obtient pour $x > 0$ $\dfrac{u_n'(x)}{u_n(x)} = -\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x+k}$. Par suite,

$$\begin{aligned}|u_n'(x)| &= u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}\right) \leqslant u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x+t}\,dt\right) \\ &= u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \int_0^n \frac{1}{x+t}\,dt\right) = u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ |u_n'(x)| \leqslant u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \ln\left(1+\frac{n}{x}\right)\right).}$$

III.E.2 Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\varepsilon, +\infty[$,

$$|u_n'(x)| \leqslant u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \ln\left(1+\frac{n}{x}\right)\right) \leqslant u_n(\varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(1+\frac{n}{\varepsilon}\right)\right),$$

et donc $\sup\limits_{x\in[\varepsilon,+\infty[} |a_n u_n'(x)| \leqslant |a_n| u_n(\varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(1+\frac{n}{\varepsilon}\right)\right)$.

D'après la question III.B -, la série numérique de terme général $|a_n|u_n(\varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(1+\frac{n}{\varepsilon}\right)\right)$ est de même nature que la série numérique de terme général $|a_n|\dfrac{\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(1+\frac{n}{\varepsilon}\right)}{(n+1)^{\varepsilon}}$.

Mais d'après un théorème de croissances comparées, $(n+1)^{\varepsilon/2} \times \dfrac{\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(1+\frac{n}{\varepsilon}\right)}{(n+1)^{\varepsilon}} = \dfrac{\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(1+\frac{n}{\varepsilon}\right)}{(n+1)^{\varepsilon/2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $a_n \dfrac{\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(1+\frac{n}{\varepsilon}\right)}{(n+1)^{\varepsilon}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{a_n}{n^{\varepsilon/2}}\right)$.

Toujours d'après III.B-, la série de terme général $\dfrac{|a_n|}{n^{\varepsilon/2}}$ est de même nature que la série de terme général $|a_n|u_n\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ et est donc convergente par définition d'un élément de $\mathscr{A}$. On en déduit que la série numérique de terme général $|a_n|u_n(\varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(1+\frac{n}{\varepsilon}\right)\right)$ puis que la série de fonctions de terme général $a_n u_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

En résumé,

- la série de fonctions de terme général $a_n u_n$ converge simplement vers la fonction f_a sur $[\varepsilon, +\infty[$,
- chaque fonction $a_n u_n$ est de classe C^1 sur sur $[\varepsilon, +\infty[$,
- la série de fonctions de terme général $(a_n u_n)'$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, la fonction f_a est de classe C^1 sur $[\varepsilon, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a montré que

$$\boxed{\forall a \in \mathscr{A}, \text{ la fonction } f_a \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

Partie IV - Représentation intégrale

IV.A -

IV.A.1) Chaque P_k, $k \in [\![0, n]\!]$, est de degré n et donc dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, $\text{card}(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n} = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) < +\infty$ et pour montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de vérifier que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(-k) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k P_k(-k) = 0$$
$$\Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k = 0 \text{ (car } \forall k \in [\![0, n]\!],\ P_k(-k) \neq 0).$$

$$\boxed{\text{La famille } (P_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

IV.A.2) Le polynôme $P = n!$ est de degré 0 et donc est dans $\mathbb{R}_n[X]$. Par suite, il existe $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$. On divise les deux membres de cette égalité par $X(X+1)\ldots(X+n)$ et on obtient

$$\frac{n!}{X(X+1)\ldots(X+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{X+k}.$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On sait que

$$\alpha_k = \lim_{x\to -k}(x+k)\times \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{n!}{(-k)(-k+1)\dots(-k+(k-1))(-k+(k+1))\dots(-k+n)}$$
$$= \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} = (-1)^k\binom{n}{k} \in \mathbb{Q}.$$

$$\boxed{\forall x>0,\ \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{X+k}.}$$

IV.B - Soient $x>0$ et $k\in\mathbb{N}$. Puisque $x-1+k>-1$, l'intégrale $\int_0^1 (1-y)^{x-1+k}$ existe (intégrale de référence). De plus,

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1+k}\,dy = \left[-\frac{(1-y)^{x+k}}{x+k}\right]_0^1 = \frac{1}{x+k}.$$

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ \forall k\in\mathbb{N},\ \int_0^1 (1-y)^{x-1+k}\,dy = \frac{1}{x+k}.}$$

IV.C - Soient $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $A\in]0,1[$.Les deux fonctions $x\mapsto -\frac{(1-y)^x}{x}$ et $y\mapsto y^n$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A (1-y)^{x-1}y^n\,dy = \left[-\frac{(1-y)^x}{x}y^n\right]_0^A + \frac{n}{x}\int_0^A (1-y)^x y^{n-1}\,dy = -\frac{(1-A)^x}{x}A^n + \frac{n}{x}\int_0^A (1-y)^x y^{n-1}\,dy.$$

Quand A tend vers 1, on obtient

$$\forall x>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^1 (1-y)^{x-1}y^n\,dy = \frac{n}{x}\int_0^1 (1-y)^x y^{n-1}\,dy.$$

En appliquant plusieurs fois la formule précédente, on obtient pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1}y^n\,dy = \frac{n}{x}\times\frac{n-1}{x+1}\times\dots\frac{1}{x+n-1}\int_0^1 (1-y)^{x+n-1}y^0\,dy = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

cette dernière expression restant valable quand $n=0$.

$$\boxed{\forall x>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^1 (1-y)^{x-1}y^n\,dy = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.}$$

Par suite, pour $a\in\mathscr{A}$ et $x>0$, $f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\int_0^1 (1-y)^{x-1}y^n\,dy$.

IV.D -

IV.D.1) Soit $a\in\mathscr{A}$. Par définition de $\mathscr{A}$ et d'après III.B-, pour tout $x>0$, la série de terme général $\frac{|a_n|}{(n+1)^x}$ converge. En particulier, la suite $\frac{a_n}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ou encore $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$. Puisque le rayon de la série entière associée à la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 1, le rayon de la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supérieur ou égal à 1.

IV.D.2) Soit $x>0$. Pour $y\in[0,1[$, on a $(1-y)^{x-1}\phi_a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(1-y)^{x-1}y^n$.

Pour $y\in[0,1[$, on pose $\Phi(y) = (1-y)^{x-1}\phi_a(y)$ et pour $n\in\mathbb{N}$ et $y\in[0,1[$, on pose $\varphi_n(y) = a_n(1-y)^{x-1}y^n$.

On sait que la somme d'une série entière est continue sur son intervalle ouvert de convergence. Donc la fonction ϕ_a est continue sur $[0,1[$ et il en est de même de la fonction Φ. D'autre part, chaque fonction φ_n est continue par morceaux sur $[0,1[$ et la série de fonctions de terme général φ_n converge simplement vers la fonction Φ sur $[0,1[$. Enfin, par définition de $\mathscr{A}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |\varphi_n(y)|\,dy = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|\int_0^1 (1-y)^{x-1}y^n\,dy = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|u_n(x) < +\infty.$$

En résumé,

• chaque fonction φ_n est continue par morceaux sur $[0,1[$ et la série de fonctions de terme général φ_n converge simplement vers la fonction Φ sur $[0,1[$.

• la fonction Φ est continue par morceaux sur $[0,1[$,

• $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |\varphi_n(y)|\,dy < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme,

- chaque fonction φ_n est intégrable sur $[0,1[$ et la fonction Φ est intégrable sur $[0,1[$,
- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^1 f_n(y)\,dy$ converge et

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1}\phi_a(x)\,dx = \int_0^1 \Phi(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x) = f_a(x).$$

$$\boxed{\forall a\in\mathscr{A},\ \forall x>0,\ f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \int_0^1 (1-y)^{x-1}\phi_a(y)\,dy.}$$

En particulier, la fonction $x\mapsto \displaystyle\int_0^1 (1-y)^{x-1}\phi_a(y)\,dy$ est DSFA.

Partie V - Dérivabilité d'une série factorielle

V.A -

V.A.1) D'après la question III.E.2), la fonction f_a est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et d'après la question IV.D.2), $\forall x>0$, $f_a(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-y)^{x-1}\phi_a(y)\,dy$.

Soit $\varepsilon>0$. Soit $F\ :\ \begin{array}{ccc} [\varepsilon,+\infty[\times[0,1[& \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (1-y)^{x-1}\phi_a(y) \end{array}$.

• Pour chaque x de $[\varepsilon,+\infty[$, la fonction $y\mapsto F(x,y)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1[$ (d'après IV.D.2)).

• La fonction F admet sur $[\varepsilon,+\infty[$ admet sur $[\varepsilon,+\infty[\times[0,1[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall(x,t)\in[\varepsilon,+\infty[\times[0,1[,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \ln(1-y)(1-y)^{\varepsilon-1}\phi_a(y).$$

De plus,

- pour chaque $x\in[\varepsilon,+\infty[$, la fonction $y\mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ est continue par morceaux sur $[0,1[$,
- pour chaque $y\in[0,1[$ la fonction $x\mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$,
- pour chaque $(x,y)\in[\varepsilon,+\infty[\times[0,1[$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant |\ln(1-y)|(1-y)^{\varepsilon-1}\phi_a(y) = \varphi_1(y)$.

Vérifions alors que la fonction φ_1 qui est continue par morceaux et positive sur $[0,1[$ est intégrable sur $[0,1[$.

Quand y tend vers 1, $\left|y^{1-\frac{\varepsilon}{2}}\times\ln(1-y)(1-y)^{\varepsilon-1}\right| = (1-y)^{\varepsilon/2}\ln(1-y)\underset{y\to 0}{\to} 0$ et donc $\ln(1-y)(1-y)^{\varepsilon-1}\phi_a(y) = o\left((1-y)^{-1+\frac{\varepsilon}{2}}\phi_a(y)\right)$. Puisque $\dfrac{\varepsilon}{2}>0$, la fonction $y\mapsto(1-y)^{-1+\frac{\varepsilon}{2}}\phi_a(y)$ est intégrable sur $[0,1[$ d'après IV.D.2) et il en est de même de la fonction φ_1.

D'après un corollaire du théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction f_a est de classe C^1 sur $[\varepsilon,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, on a montré que f_a est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x>0,\ f_a'(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1}\phi_a(y)\,dy.}$$

V.A.2) La fonction ψ_a est développable en série entière sur $]-1,1[$ en tant que produit de fonctions développables en série entière sur $]-1,1[$.

V.A.3) Pour tout $y\in]-1,1[$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n y^n = \phi_a(y) = \phi_a(y)\ln(1-y) &= -\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y^n}{n}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\sum_{p=0}^{n-1}\frac{a_p}{n-p}\right)y^n \text{ (produit de CAUCHY de deux séries entières).}\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on en déduit que

$$\boxed{b_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = -\sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p}{n-p}.}$$

V.B - Soient $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{(n+1)^x} &= \sum_{n=1}^{N} \left|\sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p}{n-p}\right| \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{|a_p|}{n-p}\frac{1}{(n+1)^x} = \sum_{p=0}^{N-1}\left(\sum_{n=p+1}^{N} \frac{1}{(n-p)(n+1)^x}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{N-1}\left(\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x}\right) \text{ (en posant } k = n-p).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{(n+1)^x} \leqslant \sum_{p=0}^{N-1}\left(\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x}\right).}$$

V.C - Soient $x > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, N-1]\!]$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(t+p+1)^x}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, intégrable sur $[1, +\infty[$ car équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{1}{t^{x+1}}$ avec $x+1 > 1$. De plus la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(t+p+1)^x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ et on en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} &= \frac{1}{(p+2)^x} + \sum_{k=2}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \\ &\leqslant \frac{1}{(p+1)^x} + \sum_{k=2}^{N-p}\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t(t+p+1)^x}\,dt = \frac{1}{(p+1)^x} + \int_{1}^{N-p} \frac{1}{t(t+p+1)^x}\,dt \\ &\leqslant \frac{1}{(p+1)^x} + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t(t+p+1)^x}\,dt.\end{aligned}$$

V.D - Soient $x > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, N-1]\!]$.

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+p+1)^x}\,dt &\leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+p)^x}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{t+p}{t(t+p)^{x+1}}\,dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+p)^{x+1}}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{p}{t(t+p)^{x+1}}\,dt = \frac{1}{x(p+1)^x} + \int_1^{+\infty} \frac{p}{t(t+p)(t+p)^x}\,dt \\ &\leqslant \frac{1}{x(p+1)^x} + \frac{1}{(p+1)^x}\int_1^{+\infty} \frac{p}{t(t+p)}\,dt = \frac{1}{x(p+1)^x} + \frac{1}{(p+1)^x}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+p}\right)dt \\ &= \frac{1}{x(p+1)^x} + \frac{1}{(p+1)^x}\left[-\ln\left(1+\frac{p}{t}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x(p+1)^x} + \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x}\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \leqslant \frac{1}{(p+1)^x} + \frac{1}{x(p+1)^x} + \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} = \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{(p+1)^x}.$$

V.E - Soit $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions V.B- et V.D-,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{(n+1)^x} &\leqslant \sum_{p=0}^{N-1} |a_p|\left(\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x}\right) \leqslant \sum_{p=0}^{N-1} |a_p|\left(\frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{(p+1)^x}\right) \\ &\leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|\frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|\frac{1}{(p+1)^x}\end{aligned}$$

Par définition d'un élément de $\mathscr{A}$, on a déjà $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|\frac{1}{(p+1)^x} < +\infty$. D'autre part, $|a_p|\dfrac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} \underset{p\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{|a_p|}{(p+1)^{x/2}}\right)$

et donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}|a_p|\frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x}<+\infty$. Finalement

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N}\frac{|b_n|}{(n+1)^x}\leqslant\sum_{p=0}^{+\infty}|a_p|\frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)\sum_{p=0}^{+\infty}|a_p|\frac{1}{(p+1)^x}<+\infty.$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général $\dfrac{|b_n|}{(n+1)^x}\geqslant 0$ est majorée et donc

$$\boxed{\forall x>0,\ \text{la série numérique de terme général } \frac{|b_n|}{(n+1)^x},\ n\in\mathbb{N}^*,\ \text{converge.}}$$

V.F - D'après les questions V.E- et III.B-, pour tout $x>0$, la série de terme général $b_nu_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, converge absolument ou encore $b\in\mathscr{A}$. On peut donc appliquer à la suite b le travail de la question IV.D- et on obtient pour $x>0$ (en remplaçant a par b et ϕ_a par ψ_a)

$$f_a'(x)=\int_0^1(1-y)^{x-1}\psi_a(y)\,dy=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nu_n(x).$$

Ceci montre que f_a' est DFSA sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x>0,\ f_a'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nu_n(x).}$$

V.G - Pour tout $x>0$

$$\frac{1}{x}=1\times u_0(x)+0\times u_1(x)+0\times u_2(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nu_n(x)\ \text{avec}\ \forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\delta_{n,0}=\left\{\begin{array}{l}1\text{ si }n=0\\0\text{ si }n\geqslant 1\end{array}\right..$$

Ainsi, la fonction $f\ ::x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est DFSA et $f=f_a$ où $a=(\delta_{n,0})_{n\in\mathbb{N}}$. La question précédente montre que les fonctions $f'\ :\ x\mapsto-\dfrac{1}{x^2}$ puis en réitérant $f''\ :\ x\mapsto\dfrac{2}{x^3}$ sont DFSA. On note a' et a'' les suites associées.

D'après la question V.A.3), $a_0'=0$ puis $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n'=-\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\frac{a_p}{n-p}=-\sum_{p=0}^{n-1}\frac{\delta_{p,0}}{n-p}=-\frac{1}{n}$. En particulier,

$$\boxed{a_0'=0,\ a_1'=-1,\ a_2'=-\frac{1}{2},\ a_3'=-\frac{1}{3}\ \text{et}\ a_4'=-\frac{1}{4}.}$$

Ensuite, $a_0''=0$ puis $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n''=-\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\frac{a_p'}{n-p}$. Donc $a_1''=0$ puis pour $n\geqslant 2$, $a_n''=\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p(n-p)}$. En particulier,

$$\boxed{a_0''=a_1''=0,\ a_2''=1,\ a_3''=1\ \text{et}\ a_4''=\frac{11}{12}.}$$

Donc, $\forall x>0$, $\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{2!}{2x(x+1)(x+2)}+\dfrac{3!}{2x(x+1)(x+2)(x+3)}+\dfrac{4!\times 11}{24x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}+\ldots=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}+\dfrac{3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}+\dfrac{11}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}+\ldots$ et on retrouve les résultats de la partie II.

