

*Partie I - Étude préliminaire***I.A - Convergence des séries de Riemann**

**I.A.1)** Soit  $k \in [a + 1, +\infty[ \cap \mathbb{Z}$ . Alors  $[k, k + 1] \subset [a, +\infty[$  et  $[k - 1, k] \subset [a, +\infty[$ . Par suite,  $f$  est continue et décroissante sur  $[k - 1, k]$  et  $[k, k + 1]$ . Mais alors

$$\int_k^{k+1} f(x) \, dx \leq \int_k^{k+1} f(k) \, dx = (k + 1 - k)f(k) = f(k),$$

(cette inégalité étant valable pour  $k \in [a, +\infty[$ ) et aussi

$$\int_{k-1}^k f(x) \, dx \geq \int_{k-1}^k f(k) \, dx = (k - (k - 1))f(k) = f(k).$$

$$\forall k \in [a + 1, +\infty[ \cap \mathbb{N}, \int_k^{k+1} f(x) \, dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) \, dx.$$

**I.A.2)** • Supposons  $\alpha > 1$ . Soit  $n \geq 2$ . La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est continue et décroissante sur  $[1, +\infty[$ . D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\alpha} \, dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} \, dx = 1 + \left[ -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right]_1^n = 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$  ce qui reste vrai pour  $n = 1$ . Mais alors, la suite des sommes partielles de la série de terme général positif  $\frac{1}{k^\alpha}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , est majorée et donc la série de terme général  $\frac{1}{k^\alpha}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  converge.

• Supposons  $\alpha \leq 1$ . La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue et décroissante sur  $[1, +\infty[$ . Donc, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \, dx = \ln(n+1).$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$  et donc la série de terme général  $\frac{1}{k^\alpha}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  diverge.

La série de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**I.A.3)** Soit  $\alpha > 1$ . D'après la question précédente, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1},$$

et quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$ .

$$\forall \alpha > 1, 1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

### I.B - Première étude asymptotique du reste

**I.B.1)** Pour  $n \geq 2$ , on a  $\sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\alpha} dx$  ou encore  $\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq R_n(\alpha) \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  ou enfin, pour  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} &\leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx - \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_{n-1}^n \frac{1}{x^\alpha} dx \\ &\leq (n - (n-1)) \times \frac{1}{(n-1)^\alpha} = \frac{1}{(n-1)^\alpha}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\forall n \geq 2, 0 \leq n^\alpha \left( R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \right) \leq \left( \frac{n}{n-1} \right)^\alpha = \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^\alpha \leq 2^\alpha$ .

Ainsi,  $n^\alpha \left( R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(1)$  ou encore

$$R_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

**I.B.2)** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$ . La formule de Taylor-LAPLACE à l'ordre 2 s'écrit

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= (k+1-k)f'(k) + \frac{(k+1-k)^2 f''(k)}{2} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt \\ &= \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{x^{\alpha+2}} dx, \end{aligned}$$

$$\text{avec } 0 \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{x^{\alpha+2}} dx \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_k^{k+1} \frac{1^2}{k^{\alpha+2}} dx = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}.$$

**I.B.3)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question précédente,

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n}^{+\infty} \left( f(k+1) - f(k) + \frac{\alpha k^{\alpha+1}}{2} A_k \right).$$

• Pour  $N \geq n$ ,  $\sum_{k=n}^N (f(k+1) - f(k)) = f(N) - f(n)$  (somme télescopique). Puisque  $\lim_{N \rightarrow +\infty} f(N) = 0$  (car  $\alpha - 1 > 0$ ), la série

de terme général  $f(k+1) - f(k)$ ,  $k \geq n$ , converge et  $\sum_{k=n}^{+\infty} (f(k+1) - f(k)) = -f(n) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ .

$$\bullet \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha k^{\alpha+1}}{2} A_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\alpha}{2} \frac{1}{((\alpha+1)-1)n^{(\alpha+1)-1}} + O\left(\frac{1}{((\alpha+1)-1)n^{\alpha+1}}\right) = \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

$$\bullet \left| -\sum_{k=n}^{+\infty} A_k \right| = \sum_{k=n}^{+\infty} A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} R_n(\alpha+2) \text{ avec } R_n(\alpha+2) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right) \text{ et en particulier } R_n(\alpha+2) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right). \text{ Par suite, } -\sum_{k=n}^{+\infty} A_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

En résumé,  $R_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \left( \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \right) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ .

$$R_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

## Partie II - Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

### II.A - Nombres de Bernoulli

**II.A.1)** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in C^\infty(I, \mathbb{C})$ . On pose  $g = \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i)}$ . Alors  $g \in C^\infty(I, \mathbb{C})$  et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} g^{(j)} &= \sum_{j=1}^p \left( \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i+j)} \right) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq p-1 \\ 1 \leq j \leq p}} \left( \frac{a_i}{j!} f^{(i+j)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{2p-1} \left( \left( \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i \leq p-1 \\ 1 \leq j \leq p}} \frac{a_i}{j!} \right) f^{(k)} \right) \\ &= a_0 f' + \sum_{k=2}^p \left( \sum_{j=1}^k \frac{a_{k-j}}{j!} \right) f^{(k)} + \sum_{k=p+1}^{2p-1} \left( \sum_{j=1}^k \frac{a_{k-j}}{j!} \right) f^{(k)} \end{aligned}$$

(si  $p = 1$  les deux dernières sommes sont conventionnellement nulles)

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $a_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = - \sum_{j=2}^n \frac{a_{n+1-j}}{j!}$ .

Alors,  $(a_0 f)' = f' + 0$  et l'égalité requise est vraie quand  $p = 1$  puis pour  $p \geq 2$  et  $2 \leq k \leq p$ , on a

$$\sum_{j=1}^k \frac{a_{k-j}}{j!} = a_{k-1} + \sum_{j=2}^{(k-1)+1} \frac{a_{(k-1)-j}}{j!} = 0,$$

et donc  $g' = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+1)}$  où les  $b_{l,p}$  sont indépendants de  $f$ . Donc, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convient. On a ainsi montré l'existence de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**II.A.2)** Montrons l'unicité de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Soit  $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite solution.

On applique l'égalité de 1) à la fonction  $f : x \mapsto x$  et à  $p = 1$ . On obtient  $a'_0 \times 1 = 1$  et donc  $a'_0 = 1$ .

Soit  $p \geq 2$ . On applique l'égalité de 1) à la fonction  $f : x \mapsto x^p$ .

Dans ce cas,  $\sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+1)} = 0$  de sorte que  $f' = \sum_{k=1}^p \frac{g^{(k)}}{k!}$  (\*). Mais  $g = a'_0 x^p + p a'_1 x^{p-1} + \dots + p! a'_{p-1} x = \sum_{j=1}^p \frac{p!}{j!} a'_{p-j} x^j$ .

En identifiant les coefficients constants dans l'égalité (\*), on obtient

$$0 = \sum_{i=1}^p \frac{1}{i!} \left( \frac{p!}{i!} a'_{p-i} i! \right) = p! \sum_{i=1}^p \frac{a'_{p-i}}{i!},$$

et donc  $a'_{p-1} = - \sum_{i=2}^p \frac{a'_{p-i}}{i!}$ . En résumé,  $\forall p \geq 2$ ,  $a'_{p-1} = \sum_{i=2}^p \frac{a'_{p-i}}{i!}$  ou encore  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a'_n = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{a'_{n+1-i}}{i!}$ .

Ainsi, si  $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite solution, on a nécessairement  $a'_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a'_n = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{a'_{n+1-i}}{i!}$ . Mais alors, par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a'_n = a_n$  ce qui montre l'unicité de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall p \geq 1, a_p = - \sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}.$$

Montrons par récurrence que  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $|a_p| \leq 1$ .

• Puisque  $a_0 = 1$ , l'inégalité est vraie quand  $p = 0$ .

• Soit  $p \geq 0$ . Supposons que  $\forall k \in [0, p]$ ,  $|a_k| \leq 1$ . Alors

$$|a_{p+1}| \leq \sum_{i=2}^{p+2} \frac{|a_{p+2-i}|}{i!} \leq \sum_{i=2}^{p+2} \frac{1}{i!} \leq \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i!} = e - 2 \leq 1.$$

On a montré par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}, |a_p| \leq 1.$$

$$a_1 = -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{2} \text{ et } a_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

$$a_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } a_2 = \frac{1}{12}.$$

**II.A.3) a)** Pour  $p \in \mathbb{N}$ , posons  $u_p = 1$ . Puisque  $\forall p \in \mathbb{N}, |a_p| \leq u_p$ , on a  $R_a \geq R_u = 1$  et en particulier, pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| < 1$ , la série  $\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p z^p$  converge.

**b)** On effectue le produit de CAUCHY des deux séries entières considérées et pour  $|z| < 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} (e^z - 1)\varphi(z) &= \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{j=0}^{+\infty} a_j z^j \right) \\ &= z + \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_{n-i}}{i!} \right) z^n = z + z + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_{n+1-i}}{i!} \right) z^{n+1} \\ &= z. \end{aligned}$$

Par suite, pour tout nombre complexe  $z$  non nul tel que  $|z| < 1$ ,  $\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ . D'autre part,  $\varphi(0) = a_0 = 1$ .

**c)** Notons  $D$  le disque unité ouvert. Pour tout  $z$  de  $D \setminus \{0\}$ , posons  $\psi(z) = \varphi(z) - a_1 z = a_0 + \sum_{p=2}^{+\infty} a_p z^p$ . Pour  $z \in D \setminus \{0\}$ , on a

$$\psi(z) = \varphi(z) - a_1 z = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{2z + z(e^z - 1)}{2(e^z - 1)} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)}.$$

Pour  $z \in D \setminus \{0\}$ , on a  $\psi(-z) = \frac{-z \left( \frac{1}{e^z} + 1 \right)}{2 \left( \frac{1}{e^z} - 1 \right)} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)} = \psi(z)$  ce qui reste vrai pour  $z = 0$ . Donc, la fonction  $\psi$  est paire et on sait que  $\forall k \geq 1, a_{2k+1} = 0$ .

$$\forall k \geq 1, a_{2k+1} = 0.$$

$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}, a_3 = 0$  puis

$$a_4 = -\frac{a_3}{2} - \frac{a_2}{6} - \frac{a_1}{24} - \frac{a_0}{120} = -\frac{1}{72} + \frac{1}{48} - \frac{1}{120} = \frac{-10 + 15 - 6}{720} = -\frac{1}{720}.$$

$$a_4 = -\frac{1}{720}.$$

## II.B - Formule de Taylor

**II.B.1)** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  et il en est de même de la fonction  $g$ . En particulier,  $g$  est de classe  $C^{2p}$  sur  $[k, k+1]$ . La formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre  $2p$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} g(k+1) - g(k) &= \sum_{i=0}^{2p} \frac{(k+1-k)^i}{i!} g^{(i)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} g^{(2p+1)}(t) dt \\ &= f'(k) + \sum_{i=1}^{2p-1} b_{i,2p} f^{(2p+1)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} \left( \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(2p+1+i)}(t) \right) dt. \end{aligned}$$

On peut poser  $R(k) = \sum_{i=0}^{2p-1} b_{i,2p} f^{(2p+1)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} \left( \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(2p+1+i)}(t) \right) dt.$

• Pour  $1 \leq l \leq 2p-1$ ,  $f^{(2p+l)}(k) = \frac{1}{1-\alpha} (1-\alpha)(-\alpha) \dots (-\alpha-2p-l+2) k^{1-\alpha-2p-l} = \frac{(-\alpha) \dots (-\alpha-2p-l+2)}{k^{2p+l-1+\alpha}}$  et donc, pour  $1 \leq l \leq 2p-1$ ,  $|f^{(2p+l)}(k)| \leq \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+2p+2p-1+2)}{k^{2p+l-1+\alpha}} = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+4p+1)}{k^{2p+\alpha}}$  puis

$$\left| \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,p} f^{(2p+l)}(k) \right| \leq \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+4p+1) \left( \sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}| \right) \frac{1}{k^{2p+\alpha}} = A_1 k^{-(2p+\alpha)}.$$

• Ensuite, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} \left| \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} \left( \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(2p+1+i)}(t) \right) dt \right| &\leq \int_k^{k+1} \left( \sum_{i=0}^{p-1} |a_i| |f^{(2p+1+i)}(t)| \right) dt \\ &\leq \sum_{i=0}^{p-1} |a_i| |f^{(2p+1+i)}(k)| \\ &\quad (\text{par décroissance de chaque fonction } |f^{(2p+1+i)}| \text{ sur } [k, k+1]) \\ &\leq \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+3p+2) \left( \sum_{i=0}^{p-1} |a_i| \right) \frac{1}{k^{2p+\alpha}} = A_2 k^{-(2p+\alpha)}. \end{aligned}$$

Finalement,  $|R(k)| \leq (A_1 + A_2) k^{-(2p+\alpha)}$  où  $A$  ne dépend pas de  $k$ .

**II.B.2)** Le développement proposé a déjà été établi à la question I.B.3) quand  $p=1$ . On suppose dorénavant  $p \geq 2$ .

D'après la question II.B.1),  $R(k) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^{2p+\alpha}}\right)$ . De plus, puisque  $2p+\alpha > 2+1=3$ , la série de terme général  $\frac{1}{k^{2p+\alpha}}$  converge. D'après un théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} R(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p+\alpha}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(R_n(2p+\alpha)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right) \text{ (d'après I.B.1)).}$$

D'autre part, puisque  $g$  est une combinaison linéaire des fonctions  $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha-1+k}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , avec  $\alpha-1+k > 0$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . On en déduit que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=n}^{+\infty} -g(n) = -\sum_{k=0}^{2p-1} a_k f^{(k)}(n) = -\sum_{k=0}^{2p-2} a_k f^{(k)}(n)$  (car  $2p-1 \geq 3$  et donc  $a_{2p-1} = 0$ ). Ainsi,

$$\begin{aligned} R_n(\alpha) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = \sum_{k=n}^{+\infty} ((g(k+1) - g(k)) - R(k)) = -\sum_{k=0}^{2p-1} a_k f^{(k)}(n) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\sum_{k=0}^{2p-2} a_k f^{(k)}(n) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right). \end{aligned}$$

**II.B.3)** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} R_n(3) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \frac{1}{12}f''(n) + \frac{1}{720}f^{(4)}(n) + O\left(\frac{1}{n^8}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right).}$$

### *Partie III - Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin*

#### *III.A - Polynômes de Bernoulli*

##### **III.A.1) Propriétés élémentaires**

- C'est vrai pour  $n = 0$ .
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $A_n$  existe et soit unique.

$$A'_{n+1} = A_n \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, A_{n+1}(x) = \lambda + \int_0^x A_n(t) dt \text{ puis}$$

$$\int_0^1 A_{n+1}(t) dt = 0 \Leftrightarrow \lambda = - \int_0^1 \left( \int_0^x A_n(t) dt \right) dx,$$

ce qui montre l'existence et l'unicité de  $A_{n+1}$ .

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $A_n$  existe et est unique.

Les égalités  $A_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, A'_{n+1} = A_n$  fournissent  $\deg A_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(A_{n+1}) = 1 + \deg(A_n)$  puis

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \deg(A_n) = n.}$$

•  $A'_1 = A_0 = 1$  et donc il existe  $a$  tel que  $A_1 = X + a$  puis  $0 = \int_0^1 (t + a) dt = \frac{1}{2} + a$  et donc  $a = -\frac{1}{2}$ . Ainsi,  $A_1 = X - \frac{1}{2}$ .

•  $A'_2 = A_1 = X - \frac{1}{2}$  et donc il existe  $a$  tel que  $A_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + a$  puis  $0 = \int_0^1 \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + a \right) dt = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + a$  et donc  $a = \frac{1}{12}$ . Ainsi,  $A_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}$ .

•  $A'_3 = A_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}$  et donc il existe  $a$  tel que  $A_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12} + a$  puis  $0 = \int_0^1 \left( \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12} + a \right) dt = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + a$  et donc  $a = 0$ . Ainsi,  $A_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12}$ .

$$\boxed{A_1 = X - \frac{1}{2}, A_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12} \text{ et } A_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12}.}$$

b) Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{R}$ , posons  $B_n(t) = (-1)^n A_n(1-t)$ .

$B_0 = 1$  puis, pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,  $B_{n+1}(t) = (-1)^{n+1} (-A'_{n+1}(1-t)) = (-1)^n A_n(1-t) = B_n(t)$ . Enfin, en posant  $u = 1-t$ , on obtient

$$\int_0^1 B_{n+1}(t) dt = (-1)^{n+1} \int_0^1 A_{n+1}(1-t) dt = (-1)^n \int_0^1 A_{n+1}(u) du = 0$$

En résumé,  $B_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, B'_{n+1} = B_n$  et  $\int_0^1 B_{n+1}(t) dt = 0$ . Par unicité de la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = A_n$  ou encore

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, A_n(t) = (-1)^n A_n(1-t).}$$

c) Soit  $n \geq 2$ .  $A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A'_n(t) dt = \int_0^1 A_{n-1}(t) dt = 0$  (car  $n-1 \geq 1$ ). En particulier, puisque  $2n-1 \geq 2$ ,  $A_{2n-1}(0) = A_{2n-1}(1)$ . Mais d'après la question précédente,  $A_{2n-1}(0) = (-1)^{2n-1} A_{2n-1}(0) = -A_{2n-1}(0)$  et finalement  $A_{2n-1}(0) = A_{2n-1}(1) = 0$ .

$$\boxed{\forall n \geq 2, A_n(0) = A_n(1) \text{ et } A_{2n-1}(0) = 0.}$$

d) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On sait que  $\deg(A_n) = n$ . La formule de TAYLOR pour les polynômes fournit

$$A_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{A_n^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n \frac{A_{n-k}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n c_{n-k} \frac{X^k}{k!}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A_n(X) = \sum_{k=0}^n c_{n-k} \frac{X^k}{k!}.}$$

Soit  $n \geq 1$ .

$$0 = \int_0^1 A_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{c_{n-k}}{k!} \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^n \frac{c_{n-k}}{(k+1)!}.$$

e)  $c_0 = A_0(0) = 1$  et pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$c_n = - \sum_{k=1}^n \frac{c_{n-k}}{(k+1)!} = - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{c_{n+1-i}}{i!}.$$

Ainsi, la suite  $(c_n)$  vérifie les égalités définissant la suite  $(a_n)$  de manière unique et donc  $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = a_n$ .

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A_n(0) = a_n.}$$

### III.A.2) Fonction génératrice

a) Soit  $t \in [-1, 1]$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} |A_n(t)| &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k!} t^k \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|a_{n-k}|}{k!} |t|^k \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad (\text{d'après la question II.A.2}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e. \end{aligned}$$

Mais alors, si  $z$  est un nombre complexe tel que  $|z| < 1$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|A_n(t)z^n| \leq e \times |z|^n$  qui est le terme général d'une série géométrique convergente. On a montré que pour tout nombre  $z$  tel que  $|z| < 1$  et tout réel  $t \in [-1, 1]$ , la série de terme général  $A_n(t)z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est absolument convergente et donc convergente.

b) Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $|z| < 1$ . Pour  $t \in [-1, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $f_n(t) = A_n(t)z^n$ .

- La série de fonctions de terme général  $f_n$  converge simplement sur  $[-1, 1]$  vers la fonction  $t \mapsto f(t, z)$ .
- Chaque  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est une fonction dérivable sur  $[-1, 1]$ .
- $f'_0 = 0$  puis, pour  $n \geq 1$ ,

$$|f'_n(t)| = |A'_n(t)z^n| = |A_{n-1}(t)||z|^n \leq e|z|^n.$$

Comme la série numérique de terme général  $e|z|^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est convergente, on en déduit que la série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est normalement et donc uniformément convergente sur  $[-1, 1]$ .

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction  $t \mapsto f(t, z)$  est dérivable sur  $[-1, 1]$  et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ainsi, pour tout réel  $t \in [-1, 1]$ ,

$$\frac{d}{dt} f(t, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A'_n(t)z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} A_{n-1}(t)z^n = z \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t)z^n = z f(t, z).$$

Par suite,  $\exists K \in \mathbb{C} / \forall t \in [-1, 1], f(t, z) = Ke^{zt}$ . Pour  $t = 0$ , on obtient si  $z \neq 0$

$$K = f(0, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

$$\boxed{\forall t \in [-1, 1], \forall z \in D \setminus \{0\}, f(t, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t)z^n = \frac{ze^{zt}}{e^z - 1}.}$$

Une égalité également vraie quand  $z = 0$  est  $\forall t \in [-1, 1]$  et  $\forall z \in D$ ,  $f(t, z) = \varphi(z)e^{zt}$ .

c) Soit  $z \in \mathbb{C}$ .  $e^z = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / z = 2ik\pi$ . Donc si  $z \neq 0$  et  $|z| < 2\pi$ , on a  $e^z \neq 1$ .

Soit  $z$  un nombre complexe non nul tel que  $|z| < 2\pi$ .

$$\frac{ze^{z/2}}{e^z - 1} + \frac{z}{e^z - 1} = \frac{z(e^{z/2} + 1)}{(e^{z/2} - 1)(e^{z/2} + 1)} = \frac{z}{e^{z/2} - 1} = 2 \frac{z/2}{e^{z/2} - 1}.$$

Cette égalité s'écrit encore  $f\left(\frac{1}{2}, z\right) + f(0, z) = 2f\left(0, \frac{z}{2}\right)$  et reste vraie sous cette forme pour  $z = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En identifiant les coefficients de  $z^n$  dans l'égalité de séries entières précédente, on obtient

$$A_n\left(\frac{1}{2}\right) + a_n = 2 \times \frac{a_n}{2}$$

et donc  $A_n \left( \frac{1}{2} \right) = \left( \frac{1}{2^{n-1}} - 1 \right) a_n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \left( \frac{1}{2} \right) = \left( \frac{1}{2^{n-1}} - 1 \right) a_n.$$

### III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli

a) Montrons le résultat par récurrence.

•  $A_2 = \frac{X(X-1)}{2} + \frac{1}{12}$  est strictement décroissante sur  $\left[ 0, \frac{1}{2} \right]$  et strictement croissante sur  $\left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$ . De plus,  $A_2(0) = A_2(1) = \frac{1}{12} > 0$  et  $A_2 \left( \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{6} < 0$ . Donc les variations de  $A_2$  sont bien du type de l'énoncé.

$A_2$  est continue et strictement décroissante sur  $\left[ 0, \frac{1}{2} \right]$  et  $A_2(0)A_2 \left( \frac{1}{2} \right) < 0$ . Donc  $A_2$  s'annule une et une seule fois en un certain  $\alpha$  de  $\left] 0, \frac{1}{2} \right[$ . De même,  $A_2$  s'annule une et une seule fois en un certain  $\beta$  de  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$ .  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels tels que  $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta < 1$

$A_3' = A_2$  est strictement positive sur  $[0, \alpha \cup ]\beta, 1]$  et strictement négative sur  $]\alpha, \beta[$ . Donc  $A_3$  est strictement croissante sur  $[0, \alpha]$ , strictement décroissante sur  $[\alpha, \beta]$  et strictement croissante sur  $[\beta, 1]$ .

De plus,  $A_3(0) = A_3 \left( \frac{1}{2} \right) = A_3(1) = 0$  et les variations de  $A_3$  sont bien du type de l'énoncé.

$A_4' = A_3$  est strictement positive sur  $\left] 0, \frac{1}{2} \right[$  et strictement négative sur  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$ . Donc  $A_4$  est strictement croissante sur  $\left[ 0, \frac{1}{2} \right]$  et strictement décroissante sur  $\left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$ .

D'autre part, d'après la question précédente,  $A_4(0)A_4 \left( \frac{1}{2} \right) = \left( \frac{1}{8} - 1 \right) a_4^2 \leq 0$ . Mais on ne peut avoir  $A_4(0)A_4 \left( \frac{1}{2} \right) = 0$  car alors  $A_4(0) = A_4 \left( \frac{1}{2} \right) = 0$  ce qui contredit la stricte croissance de  $A_4$  sur  $\left[ 0, \frac{1}{2} \right]$ . Donc  $A_4(0)A_4 \left( \frac{1}{2} \right) < 0$  et de même  $A_4(1)A_4 \left( \frac{1}{2} \right) < 0$  puisque  $A_4(0) = A_4(1)$  d'après la question III.A.1)c).

Les variations de  $A_4$  sont bien du type de l'énoncé.

Comme pour  $A_2$ , il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta < 1$  et  $A_5$  est strictement décroissante sur  $[0, \alpha]$ , strictement croissante sur  $[\alpha, \beta]$  et strictement décroissante sur  $[\beta, 1]$  avec de plus,  $A_5(0) = A_5 \left( \frac{1}{2} \right) = A_5(1) = 0$  (d'après les questions II.A.1)c) et III.A.2)c)).

Les variations de  $A_5$  sont bien du type de l'énoncé.

• Soit  $n \geq 0$ . Supposons que les variations de  $A_{4n+2}$ ,  $A_{4n+3}$ ,  $A_{4n+4}$  et  $A_{4n+5}$  soient du type de l'énoncé.

Alors  $A_{4n+6}$  est strictement décroissante sur  $\left[ 0, \frac{1}{2} \right]$  et strictement croissante sur  $\left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$ . De plus,  $A_{4n+6}(0)A_{4n+6} \left( \frac{1}{2} \right) = \left( \frac{1}{2^{4n+5}} - 1 \right) A_{4n+6}(0)^2$  avec  $\frac{1}{2^{4n+5}} - 1 < 0$  et  $A_{4n+6}(0) = A_{4n+6}(1)$ . Comme pour  $A_4$ , on ne peut avoir  $A_{4n+6}(0) = 0$  ou  $A_{4n+6} \left( \frac{1}{2} \right) = 0$  et donc  $A_{4n+6}(0) = A_{4n+6}(1) < 0$  et  $A_{4n+6} \left( \frac{1}{2} \right) < 0$ . Les variations de  $A_{4n+6}$  sont du même type que celle de  $A_{4n+2}$ . Mais alors, on peut appliquer à  $A_{4n+7}$ ,  $A_{4n+8}$  et  $A_{4n+9}$  les raisonnements tenus sur  $A_3$ ,  $A_4$  et  $A_5$  pour aboutir aux mêmes résultats.

Le résultat est démontré par récurrence.

b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $[0, 1]$  tels que  $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta < 1$  tels que la fonction  $|A_{2n}|$  est décroissante sur  $[0, \alpha]$ , croissante sur  $\left[ \alpha, \frac{1}{2} \right]$ , décroissante sur  $\left[ \frac{1}{2}, \beta \right]$  et croissante sur  $[\beta, 1]$ . Donc

$$\text{Max}_{x \in [0, 1]} |A_{2n}(x)| = \text{Max} \left\{ |A_{2n}(0)|, \left| A_{2n} \left( \frac{1}{2} \right) \right|, |A_{2n}(1)| \right\} = \text{Max} \left\{ |a_{2n}|, \left( 1 - \frac{1}{2^{2n-1}} \right) |a_{2n}| \right\} = |a_{2n}|.$$

Ainsi,  $\forall x \in [0, 1], |A_{2n}(x)| \leq |a_{2n}|$ .

Ensuite, d'après la question III.A.1)b),  $\text{Max}_{x \in [0, 1]} |A_{2n+1}(x)| = \text{Max}_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |A_{2n+1}(x)|$ . Soit alors  $x \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right]$ . D'après l'inégalité des

$$|A_{2n+1}(x)| = |A_{2n+1}(x) - A_{2n+1}(0)| \leq |x - 0| \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |A'_{2n+1}(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |A_{2n}(x)| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}.$$

Ainsi,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $|A_{2n+1}(x)| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |A_{2n}(x)| \leq |a_{2n}| \text{ et } |A_{2n+1}(x)| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}.$$

### III.B - Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.B.1) a) Montrons le résultat par récurrence.

• Une intégration par parties fournit :

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 A'_1(t) f'(t) dt = [A_1(t) f'(t)]_0^1 - \int_0^1 A_1(t) f''(t) dt = \sum_{j=1}^1 (-1)^{j+1} [A_j(t) f^{(j)}(t)]_0^1 + (-1)^1 \int_0^1 A_1(t) f^{(1+1)}(t) dt.$$

La formule est donc vraie quand  $q = 1$ .

• Soit  $q \geq 1$ . Supposons que  $f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^q (-1)^{j+1} [A_j(t) f^{(j)}(t)]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt$ . Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt &= \int_0^1 A'_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t) dt \\ &= [A_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t)]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t) dt, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= \sum_{j=1}^q (-1)^{j+1} [A_j(t) f^{(j)}(t)]_0^1 + (-1)^q \left( [A_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t)]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t) dt \right) \\ &= \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{j+1} [A_j(t) f^{(j)}(t)]_0^1 + (-1)^{q+1} \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

L'égalité est démontrée par récurrence.

b) Soient  $p \geq 1$  puis  $q = 2p + 1$ . Puisque  $\forall k \geq 2$ ,  $A_k(1) = A_k(0) = a_k$  et  $\forall k \geq 1$ ,  $A_{2k+1}(1) = A_{2k+1}(0) = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= \sum_{j=1}^{2p+1} (-1)^{j+1} [A_j(t) f^{(j)}(t)]_0^1 - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt \\ &= A_1(1) f'(1) - A_1(0) f'(0) + \sum_{j=2}^{2p+1} (-1)^{j+1} (A_j(1) f^{(j)}(1) - A_j(0) f^{(j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} (f'(0) + f'(1)) + \sum_{j=1}^p (-1)^{2j+1} a_{2j} (f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} (f'(0) + f'(1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} (f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

III.B.2) Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \geq n$ .

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= f_k(1) - f_k(0) = \frac{1}{2} (f'_k(0) + f'_k(1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} (f_k^{(2j)}(1) - f_k^{(2j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f_k^{(2p+2)}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} (f'(k) + f'(k+1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} (f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t+k) dt \\ &= \frac{1}{2} (f'(k) + f'(k+1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} (f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) - \int_k^{k+1} A_{2p+1}(u-k) f^{(2p+2)}(u) du \\ &= \frac{1}{2} (f'(k) + f'(k+1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} (f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) - \int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \quad (I) \end{aligned}$$

Puisque  $f$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , la série télescopique de terme général  $f(k+1) - f(k)$ ,  $k \geq n$ , converge et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (f(k+1) - f(k)) = -f(n).$$

De même, pour tout  $j \geq 1$ , la série télescopique de terme général  $f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)$ ,  $k \geq n$ , converge et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) = -f^{(2j)}(n).$$

Ensuite, d'après la question III.A.3)b), en notant  $\varepsilon_{2p+2}$  le signe de la fonction  $f^{(2p+2)}$  sur  $[n, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t-k) f^{(2p+2)}(t) dt \right| &\leq \int_k^{k+1} |A_{2p+1}^*(t-k)| |f^{(2p+2)}(t)| dt \leq \varepsilon_{2p+2} \frac{|a_{2p}|}{2} \int_k^{k+1} f^{(2p+2)}(t) dt \\ &= \varepsilon_{2p+2} \frac{|a_{2p}|}{2} (f^{(2p+1)}(k+1) - f^{(2p+1)}(k)). \end{aligned}$$

Puisque la série télescopique de terme général  $f^{(2p+1)}(k+1) - f^{(2p+1)}(k)$ ,  $k \geq n$ , converge, la série de terme général

$$\int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t-k) f^{(2p+2)}(t) dt \text{ est absolument convergente et donc convergente.}$$

Enfin, la série de terme général  $f'(k)$ ,  $k \geq n$ , converge en tant que combinaison linéaire de séries convergentes.

En sommant les égalités (I) pour  $k$  variant de  $n$  à  $+\infty$ , on obtient

$$\begin{aligned} -f(n) &= \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} (f'(k) + f'(k+1)) + \sum_{j=1}^p a_{2j} f^{(2j)}(n) - \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} f'(k) + \sum_{j=1}^p a_{2j} f^{(2j)}(n) - \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} f'(n) + \sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) + \sum_{j=1}^p a_{2j} f^{(2j)}(n) - \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt, \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^p a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt.}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \right| &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \left| \int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon_{2p+2} \frac{|a_{2p}|}{2} (f^{(2p+1)}(k+1) - f^{(2p+1)}(k)) \\ &= \frac{|a_{2p}|}{2} \varepsilon_{2p+2} (-f^{(2p+1)}(n)) \\ &= \frac{|a_{2p}|}{2} |f^{(2p+1)}(n)| \text{ (car } \varepsilon_{2p+2} (-f^{(2p+1)}(n)) \text{ est nécessairement positif).} \end{aligned}$$

$$\boxed{\left| \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \right| \leq \frac{|a_{2p}|}{2} |f^{(2p+1)}(n)|.}$$

**III.B.3)** Soit  $p \geq 2$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f$  de la question I.B.2) vérifie les hypothèses de la question III.B.2). On peut donc lui appliquer la formule précédente et on obtient

$$\begin{aligned} R_n(\alpha) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} - \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t) f^{(2p)}(t) dt \\ &= -(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j} f^{(2j)}(n)) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t) f^{(2p)}(t) dt \end{aligned}$$

avec, par identification à la formule de I.B.2),  $\int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t)f^{(2p)}(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ .

### Partie III - Complément sur l'erreur

#### IV.A - Encadrement de l'erreur

IV.A.1) Soit  $n$  un entier naturel impair. D'après la question III.A.1)b),

$$\begin{aligned} \int_0^1 A_n(t)g(t) dt &= \int_0^{1/2} A_n(t)g(t) dt + \int_{1/2}^1 A_n(t)g(t) dt = \int_0^{1/2} A_n(t)g(t) dt - \int_{1/2}^0 A_n(1-u)g(1-u) du \\ &= \int_0^{1/2} A_n(t)g(t) dt + \int_0^{1/2} (-1)^n A_n(t)g(1-t) dt = \int_0^{1/2} A_n(t)(g(t) - g(1-t)) dt. \end{aligned}$$

Pour tout réel  $t$  de  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ , on a  $t \leq \frac{1}{2} \leq g(1-t)$  (car  $g$  est croissante sur  $[0, 1]$ ) et donc  $g(t) - g(1-t) \leq 0$ .

• Si  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , d'après la question III.A.3)a), la fonction  $A_n$  est négative sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  et donc pour tout réel  $t$  de  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ,  $A_n(t)(g(t) - g(1-t)) \geq 0$  puis  $\int_0^1 A_n(t)(g(t) - g(1-t)) dt \geq 0$ .

• Si  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , la fonction  $A_n$  est positive sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  et donc pour tout réel  $t$  de  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ,  $A_n(t)(g(t) - g(1-t)) \leq 0$  puis  $\int_0^1 A_n(t)(g(t) - g(1-t)) dt \leq 0$ .

IV.A.2) Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - (a_0 f(n) + a_1 f'(n) + \dots + a_{4p} f^{(4p)}(n)) \\ &= S(\alpha) - R_n(\alpha) - (a_0 f(n) + a_1 f'(n) + \dots + a_{4p} f^{(4p)}(n)) = S - \int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t)f^{(4p+2)}(t) dt \end{aligned}$$

et donc

$$S(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) = \int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t)f^{(4p+2)}(t) dt.$$

Maintenant, les dérivées d'ordre pair de  $f$  sont négatives et croissantes sur  $]0, +\infty[$ . D'après la question précédente,  $S(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \geq 0$  et donc  $\tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha)$ .

De même,  $S(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p+2}(\alpha) = \int_n^{+\infty} A_{4p+3}^*(t)f^{(4p+4)}(t) dt \leq 0$  et donc  $S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)$  ou aussi en remplaçant  $p$  par  $p-1$ ,  $S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)$ .

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p+2}(\alpha) \text{ et } \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p-2}(\alpha).$$

•  $0 \leq S(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p+2}(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) = -(a_{4p+1} f^{(4p+1)}(n) + a_{4p+2} f^{(4p+2)}(n)) = -a_{4p+2} f^{(4p+2)}(n) = |a_{4p+2}| f^{(4p+2)}(n)$ .

•  $0 \leq \tilde{S}_{n,4p-2}(\alpha) - S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p-2}(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) = (a_{4p-1} f^{(4p-1)}(n) + a_{4p} f^{(4p)}(n)) = a_{4p} f^{(4p)}(n) = |a_{4p}| f^{(4p)}(n)$ .

Mais alors, dans tous les cas,  $|S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha)| \leq |a_{2p+2}| f^{(2p+2)}(n)$ .

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, |S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha)| \leq |a_{2p+2}| f^{(2p+2)}(n).$$

IV.A.3)  $|S(3) - \tilde{S}_{100,4}(3)| \leq |a_6| f^{(6)}(100) = \frac{1}{42 \times 6!} \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{2 \times 100^8} = \frac{1}{12} 10^{-16} \leq 10^{-17}$ .

#### IV.B - Séries de Fourier

IV.B.1) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

• Soit  $x \in \mathbb{R}$   $\frac{x+2\pi}{2} - \left[\frac{x+2\pi}{2}\right] = \frac{x}{2} + 1 - \left[\frac{x}{2} + 1\right] = \frac{x}{2} + 1 - \left[\frac{x}{2}\right] - 1 = \frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right]$  et donc  $\tilde{A}_-(x+2\pi) = \tilde{A}_-(x)$

Donc la fonction  $\tilde{A}_p$  est  $2\pi$ -périodique.

• La fonction  $\tilde{A}_p$  est continue sur  $[0, 2\pi[$  et de plus,  $\tilde{A}_p(2\pi^-) = A_p(1^-) = A_p(1) \in \mathbb{R}$ . Donc la fonction  $\tilde{A}_p$  est continue par morceaux sur  $[0, 2\pi]$  puis sur  $\mathbb{R}$  par  $2\pi$ -périodicité.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \tilde{A}_p \text{ est } 2\pi\text{-périodique et continue par morceaux sur } \mathbb{R}.$$

**IV.B.2)** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \hat{A}_p(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{A}_p(x) e^{-inx} dx = \int_0^{2\pi} A_p\left(\frac{x}{2\pi}\right) e^{-inx} \frac{dx}{2\pi} \\ &= \int_0^1 A_p(t) e^{-2in\pi t} dt \end{aligned}$$

Donc,  $\hat{A}_p(0) = \int_0^1 A_p(t) dt = 0$  (car  $p \geq 1$  et si  $n \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$\begin{aligned} \hat{A}_p(n) &= \frac{1}{(-2in\pi)^{p+1}} \int_0^1 A_p(t) (e^{-2in\pi t})^{(p+1)} dt \\ &= \frac{1}{(2in\pi)^{p+1}} \times (-1)^p \int_0^1 A_p(t) (e^{-2in\pi t})^{(p+1)} dt \\ &= \frac{1}{(2in\pi)^{p+1}} \left( e^{-2in\pi} - e^0 + \sum_{j=1}^p (-1)^j \left[ A_j(t) (e^{-2in\pi t})^{(j)} \right]_0^1 \right) \text{ (d'après la question III.B.1)a)} \\ &= \frac{1}{(2in\pi)^{p+1}} (-1)^1 \left[ A_1(t) (e^{-2in\pi t})^{(1)} \right]_0^1 = -\frac{1}{(2in\pi)^{p+1}} \times \frac{-2ni\pi}{2} (e^{-2in\pi} + e^0) = -\frac{1}{(2in\pi)^p}. \end{aligned}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \hat{A}_p(0) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}^*, \hat{A}_p(n) = -\frac{1}{(2in\pi)^p}.$$

**IV.B.3)** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $\tilde{A}_p$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 2\pi[$  et pour  $x \in [0, 2\pi[$ ,  $\tilde{A}'_p(x) = \frac{1}{2\pi} A'_p\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} A_{p-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ . Mais alors,  $\tilde{A}_p$  est de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[0, 2\pi]$  puis sur  $\mathbb{R}$  par  $2\pi$ -périodicité.

D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de  $\tilde{A}_p$  converge en tout  $x$  réel vers  $\frac{1}{2}(\tilde{A}_p(x^-) + \tilde{A}_p(x^+))$ .

**IV.B.4)** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Alors,  $2p \geq 2$  puis  $\tilde{A}_{2p}(0^-) = \tilde{A}_{2p}(2\pi^-) = A_{2p}(1^-) = A_{2p}(1) = A_{2p}(0)$  (d'après III.A.1)c) et car  $2p \geq 2$ ). Donc  $\frac{1}{2}(\tilde{A}_{2p}(0^-) + \tilde{A}_{2p}(0^+)) = A_{2p}(0) = a_{2p}$ .

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} a_{2p} = A_{2p}(0) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{A}_{2p}(n) e^{in \times 0} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( -\frac{1}{(2in\pi)^{2p}} - \frac{1}{(-2in\pi)^{2p}} \right) = -\frac{2}{(2i\pi)^{2p}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} \\ &= (-1)^{p+1} \frac{1}{2^{2p-1} \pi^{2p}} S(2p). \end{aligned}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, a_{2p} = A_{2p}(0) = (-1)^{p+1} \frac{1}{2^{2p-1} \pi^{2p}} S(2p).$$

#### IV.C - Comportement de l'erreur

**IV.C.1)** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls.

$$\left| \frac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)} \right| = \left| \frac{S(2p+2) 2^{2p-1} \pi^{2p} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\dots(-\alpha-(2p))}{n^{\alpha+2p+1}}}{S(2p) 2^{2p+1} \pi^{2p+2} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\dots(-\alpha-(2p-2))}{n^{\alpha+2p-1}}} \right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2 \pi^2 S(2p)}.$$

**IV.C.2)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question I.4.3), pour  $\alpha > 1$ ,  $1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$  et donc  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S(\alpha) = 1$ . Par suite,

$$\left| \frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)} \right| = \frac{(\alpha + 2p)(\alpha + 2p - 1)S(2p + 2)}{4n^2\pi^2S(2p)} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p^2}{n^2\pi^2},$$

puis  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)} \right| = +\infty$ . En particulier, la série numérique de terme général  $a_{2j}f^{(2j)}(n)$ ,  $j \geq 1$ , diverge grossièrement. Ainsi, à  $n$  fixé  $\tilde{S}_{n,2p}(\alpha)$ , la suite  $\tilde{S}_{n,2p}(\alpha)$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , diverge. Si on prend  $p$  grand, pour obtenir une bonne approximation de  $S(\alpha)$ , on doit prendre  $n$  grand.