

Epreuve de Mathématiques 3 MP

Partie I : Étude de $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Soit (u_n) une suite réelle, de signe alterné, dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Alors, la série de terme général u_n converge (critère spécial aux séries alternées). De plus, si R_n désigne le reste à l'ordre n (c'est-à-dire

$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$) alors, R_n est du signe de son premier terme u_{n+1} et la valeur absolue de R_n est majorée par la valeur absolue de son premier terme u_{n+1} .

La suite $\left(\frac{(-1)^p}{p}\right)$ vérifie les conditions précédentes ce qui montre que la série de terme général $\frac{(-1)^p}{p}$ est convergente.

b) Soient n et N deux entiers naturels tels que $1 \leq n < N$.

$$\begin{aligned} \sum_{p=n+1}^N \frac{(-1)^p}{p} &= \sum_{p=n+1}^N (-1)^p \int_0^1 x^{p-1} dx = - \int_0^1 \left(\sum_{p=n+1}^N (-x)^{p-1} \right) dx = - \int_0^1 (-x)^n \frac{1 - (-x)^{N-n}}{1 - (-x)} dx \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + (-1)^N \int_0^1 \frac{x^N}{1+x} dx (*) \end{aligned}$$

Or,

$$\left| (-1)^N \int_0^1 \frac{x^N}{1+x} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^N}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^N dx = \frac{1}{N+1},$$

et comme $\frac{1}{N+1}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, on en déduit que $(-1)^N \int_0^1 \frac{x^N}{1+x} dx$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Quand N tend vers $+\infty$ à n fixé, (*) fournit $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.}$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une intégration par parties fournit :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx.$$

Or,

$$0 \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+0)^2} dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Par suite, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Maintenant, $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n})^{-1} = \frac{1}{n}(1 + O(\frac{1}{n})) = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Finalement,

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) La série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. La série de terme général $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument et donc converge. On en déduit que la série de terme général R_n converge.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n R_p &= \sum_{p=0}^n (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{x^p}{1+x} dx = - \int_0^1 \left(\sum_{p=0}^n (-x)^p \right) \frac{1}{1+x} dx = - \int_0^1 \frac{1 - (-x)^{n+1}}{(1+x)^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx. \end{aligned}$$

Or,

$$\left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc $\sum_{p=0}^n R_p$ tend vers $-\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = -\frac{1}{2}.$$

Partie II : Étude de $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$, $n \in \mathbb{N}$

1) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $V_n = U_n - \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}}$. On sait que la suite (V_n) est de même nature que la série de terme général $V_{n+1} - V_n$. Or,

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = -\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n}(2\sqrt{n})^2} = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

La série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge (série de RIEMANN d'exposant $\frac{3}{2} > 1$) et donc la série de terme général $V_{n+1} - V_n$ converge. On en déduit que la suite (V_n) converge. On note $L + 2$ sa limite (ainsi $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n - 2$).

b) Puisque $\theta > 1$, pour tout entier naturel non nul, $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ existe.

Soient n et N deux entiers naturels tels que $1 \leq n < N$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\theta}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Par suite, pour $n+1 \leq p \leq N$, on a

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x^\theta} \leq \frac{1}{p^\theta} \leq \int_{p-1}^p \frac{dx}{x^\theta}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dx}{x^\theta} = \sum_{p=n+1}^N \int_p^{p+1} \frac{dx}{x^\theta} \leq \sum_{p=n+1}^N \frac{1}{p^\theta} \leq \sum_{p=n+1}^N \int_{p-1}^p \frac{dx}{x^\theta} = \int_n^N \frac{dx}{x^\theta},$$

et donc,

$$\frac{1}{\theta-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{\theta-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\theta-1}} \right) \leq \sum_{p=n+1}^N \frac{1}{p^\theta} \leq \frac{1}{\theta-1} \left(\frac{1}{n^{\theta-1}} - \frac{1}{N^{\theta-1}} \right).$$

Quand N tend vers $+\infty$ à n fixé, on obtient (puisque $\theta - 1 > 0$),

$$\frac{1}{(\theta-1)(n+1)^{\theta-1}} \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta} \leq \frac{1}{(\theta-1)n^{\theta-1}}.$$

Mais alors, $(\theta-1)n^{\theta-1} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, ou encore

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\theta-1)n^{\theta-1}}.$$

2) a) Notons tout d'abord que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = U_n - 2(\sqrt{n} - \sqrt{1}) - L - 2 = U_n - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} - (L+2) = V_n - (L+2).$$

Mais alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et de plus

$$v_n - v_{n+1} = V_n - V_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n^{3/2}} > 0.$$

Ainsi, la série de terme général $v_n - v_{n+1}$ converge et de plus, d'après la règle de l'équivalence des restes à l'ordre n de séries à termes positifs convergentes, on a

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} (v_p - v_{p+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4n^{3/2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4} \frac{1}{(\frac{3}{2}-1)n^{\frac{3}{2}-1}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ (d'après 1)b)}.$$

Maintenant, $\sum_{p=n+1}^N (v_p - v_{p+1}) = v_{n+1} - v_{N+1} \rightarrow v_{n+1}$ quand N tend vers $+\infty$ à n fixé. Donc, $\sum_{p=n+1}^{+\infty} (v_p - v_{p+1}) = v_{n+1}$.

Ainsi, $v_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$, puis, $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

b) De même, posons $w_n = v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned} w_n - w_{n+1} &= (v_n - v_{n+1}) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} - \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \\ &= \frac{2\sqrt{n} - (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^3} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{16n^{5/2}}, \end{aligned}$$

et donc, comme à la question précédente,

$$w_{n+1} = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (w_p - w_{p+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{16} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^{5/2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{16} \frac{1}{\frac{3}{2}n^{3/2}} = -\frac{1}{24n\sqrt{n}}.$$

et donc $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{24n\sqrt{n}}$. Ainsi, $v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, ce qui s'écrit encore :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2\sqrt{n} + L + \frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

3) a) La suite $\left(\frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}\right)$ est de signe alterné, et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Par suite, la série de terme général $\frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. D'où l'existence de S.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$r_{2n} = S - \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S - \left(-\sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{p}} + 2 \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{2p}} \right) = S + u_{2n} - \frac{2}{\sqrt{2}} u_n = S + u_{2n} - \sqrt{2} u_n.$$

$$r_{2n} = S + u_{2n} - \sqrt{2} u_n.$$

c) D'après 2)a), quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} r_{2n} &= S + \left(2\sqrt{2n} + L + \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right) - \sqrt{2} \left(2\sqrt{n} + L + \frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right) \\ &= S + (1 - \sqrt{2})L - \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Puisque la série de terme général $\frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ converge, on sait que r_n existe et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et en particulier, r_{2n} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci impose $S + (1 - \sqrt{2})L = 0$, ou encore

$$S = (\sqrt{2} - 1)L.$$

Mais alors, $r_{2n} = -\frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Ensuite,

$$r_{2n+1} = r_{2n} - \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} = r_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = -\frac{1}{2\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

En résumé, quand n tend vers $+\infty$,

$$r_{2n} = -\frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = -\frac{(-1)^{2n}}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{2n\sqrt{2n}}\right)$$

et

$$r_{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = -\frac{(-1)^{2n+1}}{2\sqrt{2n+1}} + O\left(\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n+1}}\right).$$

Finalement,

$$r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

La série de terme général $-\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et la série de terme général $O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge absolument et donc converge. On en déduit que la série de terme général r_n converge.

Partie III : Étude de $q_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x}$, $x \in]0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Soient $x \in]0, +\infty[$ et $p \in \mathbb{N}^*$. En posant $u = pt$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{p}\right)^{x-1} e^{-u} \frac{du}{p} = \frac{1}{p^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(x)}{p^x}.$$

Maintenant, la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue, positive et non nulle sur $]0, +\infty[$. On en déduit que $\Gamma(x) > 0$ et donc que $\frac{1}{p^x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-pt} dt$.

$$\forall x > 0, \forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{p^x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-pt} dt.$$

2) Soit $x \in]0, +\infty[$. Soient n et N deux entiers naturels tels que $n < N$.

$$\begin{aligned} \sum_{p=n+1}^N \frac{(-1)^p}{p^x} &= \sum_{p=n+1}^N (-1)^p \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-pt} dt = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} \left(\sum_{p=n+1}^N (-e^{-t})^p \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} (-e^{-t})^{n+1} \frac{1 - (-e^{-t})^{N-n}}{1 - (-e^{-t})} dt \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-(n+1)t}}{1 + e^{-t}} dt + \frac{(-1)^N}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-(N+1)t}}{1 + e^{-t}} dt. \end{aligned}$$

Maintenant

$$\left| \frac{(-1)^N}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-(N+1)t}}{1 + e^{-t}} dt \right| = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-(N+1)t}}{1 + e^{-t}} dt \leq \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(N+1)t} dt = \frac{1}{(N+1)^x}.$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(N+1)^x} = 0$, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^N}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-(N+1)t}}{1 + e^{-t}} dt = 0$. Quand N tend vers $+\infty$, on obtient alors

$$\forall x \in]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, q_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x} = \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-(n+1)t}}{1 + e^{-t}} dt.$$

3) Soient $x \in]0, +\infty[$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=0}^N q_n(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + e^{-t}} \sum_{n=0}^N (-e^{-t})^{n+1} dt = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} (-e^{-t})}{1 + e^{-t}} \times \frac{1 - (-e^{-t})^{N+1}}{1 + e^{-t}} dt.$$

Maintenant, la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{(1 + e^{-t})^2} (-e^{-t})^{N+1}$ est continue sur $]0, +\infty[$, dominée en 0 par t^{x-1} qui est intégrable au voisinage de 0 car $x - 1 > -1$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{(1 + e^{-t})^2} (-e^{-t})^{N+1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc que

$$\sum_{n=0}^N q_n(x) = -\frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt - \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+e^{-t})^2} (-e^{-t})^{N+2} dt.$$

Maintenant,

$$\left| \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+e^{-t})^2} (-e^{-t})^{N+2} dt \right| = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-(N+2)t}}{(1+e^{-t})^2} dt \leq \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(N+2)t} dt = \frac{1}{(N+2)^x}.$$

Comme $\frac{1}{(N+2)^x}$, tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, il en est de même de $\frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+e^{-t})^2} (-e^{-t})^{N+2} dt$. Ceci montre la convergence de la série de terme général $q_n(x)$. De plus, quand N tend vers $+\infty$, on obtient

$$\forall x \in]0, +\infty[, \sum_{n=0}^{+\infty} q_n(x) = -\frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt.$$

4) On applique ce qui précède à $x = 1$. Avec les notations de I.3), en posant $u = e^{-t}$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n(1) = -\frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \int_1^0 \frac{1}{(1+u)^2} du = -\frac{1}{2}.$$

Partie IV : Étude de $x_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1))$, $n \in \mathbb{N}$

1) a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ convient et plus généralement les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^\theta}$, $\theta > 0$, conviennent.

b) La suite $((-1)^p f(p))$ est de signe alterné et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc, pour tout entier naturel n , x_n existe en vertu du critère spécial aux séries alternées.

2) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1)) &= \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) - \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p+1) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) - \sum_{p=n+2}^{+\infty} (-1)^{p-1} f(p) \\ &= \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) + \sum_{p=n+2}^{n+1} (-1)^p f(p) = 2 \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) - (-1)^{n+1} f(n+1) \\ &= 2x_n - (-1)^{n+1} f(n+1). \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2x_n - (-1)^{n+1} f(n+1) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1)).$$

Ainsi, $x_n = \frac{1}{2}((-1)^{n+1} f(n+1) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1)))$. Déjà, la série de terme général $(-1)^{n+1} f(n+1)$ converge en

vertu du critère spécial aux séries alternées. Montrons alors que la série de terme général $y_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1))$ converge.

La fonction f est convexe sur $]0, +\infty[$. Donc, pour tout entier naturel non nul p ,

$$\frac{1}{2}(f(p) + f(p+2)) \geq f\left(\frac{1}{2}(p+p+2)\right) = f(p+1).$$

Ceci s'écrit encore $\forall p \in \mathbb{N}$, $f(p) + f(p+2) \geq 2f(p+1)$ ou enfin $\forall p \in \mathbb{N}$, $f(p) - f(p+1) \geq f(p+1) - f(p+2)$. Ainsi, la suite $(f(p) - f(p+1))$ est décroissante. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, on a alors

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1)) \right| \leq |(-1)^{n+1} (f(n+1) - f(n+2))| = f(n+1) - f(n+2).$$

Maintenant, la série de terme général $f(n+1) - f(n+2)$ est de même nature que la suite de terme général $f(n+1)$ et est donc convergente (série télescopique). On en déduit que la série de terme général $y_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1))$ est absolument convergente et donc convergente. Finalement,

La série de terme général x_n converge.

3) Quand n tend vers $+\infty$, $f(n+1)$ est équivalent à $f(n+2)$ et donc $f(n+1) - f(n+2) = o(f(n+1))$. Or, d'après la question précédente, $\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1)) \right| \leq f(n+1) - f(n+2)$. Par suite,

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(f(n+1)),$$

et donc

$$x_n = \frac{1}{2} \left((-1)^{n+1} f(n+1) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1)) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1} f(n+1)}{2} + o(f(n+1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1} f(n)}{2} + o(f(n))$$

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1} f(n)}{2}.$$

Partie V : Étude de $q_0(x)$

1) Soit a un réel strictement positif. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, +\infty[$, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$|q_n(x)| = \left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^x} \right| = \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup \left\{ \left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x} \right|, x \in [a, +\infty[\right\} \leq \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Comme $\frac{1}{(n+1)^a}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{|q_n(x)|, x \in [a, +\infty[\} = 0$ et donc la série de fonction de terme général $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^p}{p^x}$ converge uniformément vers q_0 sur $[a, +\infty[$. Comme chaque f_n est continue sur $[a, +\infty[$, la fonction q_0 est continue sur $[a, +\infty[$ et ceci pour tout réel $a > 0$. Finalement

la fonction q_0 est continue sur $]0, +\infty[$.

2) Soit a un réel strictement positif. Chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et pour $x \in [a, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n^x}.$$

Pour $x \geq a$ et $t \geq 1$, posons alors $g(t) = \frac{\ln t}{t^x}$. g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour $t \geq 1$,

$$g'(t) = \frac{t^{x-1} - x t^{x-1} \ln t}{t^{2x}} = \frac{1 - x \ln t}{t^{x+1}}.$$

g' est négative sur $[\frac{1}{x} + \infty[$ et en particulier sur $[\frac{1}{a}, +\infty[$. La fonction g est donc décroissante sur $[\frac{1}{a}, +\infty[$. On en déduit qu'à partir du rang $E(\frac{1}{a}) + 1$, la suite $(\frac{\ln n}{n^x})$ est décroissante. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^x} = 0$, la série de terme général $(-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. Ensuite, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour $n \geq E(\frac{1}{a}) + 1$,

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p \ln p}{p^x} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1} \ln(n+1)}{(n+1)^x} \right| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a},$$

et donc, pour $n \geq E(\frac{1}{a}) + 1$,

$$\sup \left\{ \left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} \ln p}{p^x} \right|, x \in [a, +\infty[\right\} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Comme $\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

En résumé,

- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers q_0 sur $[a, +\infty[$;
- chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$;
- la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, q_0 est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et la dérivée de q_0 s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$,

$$q_0 \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et pour } x > 0, q'_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n^x}.$$

3) D'après la question V.1), la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers q_0 sur $[1, +\infty[$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$. D'après le théorème d'inversion des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} q_0(x)$ existe dans \mathbb{R} et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q_0(x) = -1.$$

4) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est convexe, décroissante sur $]0, +\infty[$, de limite nulle en $+\infty$. D'après IV.2), on a

$$q_0(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{p^x} - \frac{1}{(p+1)^x} \right) \right).$$

D'après une majoration classique de toute somme de série alternée, pour $x > 0$ on a

$$\left| \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{p^x} - \frac{1}{(p+1)^x} \right) \right| \leq \left| (-1)^1 \left(\frac{1}{1^x} - \frac{1}{2^x} \right) \right| = 1 - \frac{1}{2^x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{2^x} = 1 - 1 = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{p^x} - \frac{1}{(p+1)^x} \right) = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0} q_0(x) = -\frac{1}{2}$.

On peut prolonger q_0 par continuité en 0 en posant $q_0(0) = -\frac{1}{2}$.

5) a) Soit x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned} q_0(x) &= \frac{1}{2} \left(-1 + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{p^x} - \frac{1}{(p+1)^x} \right) \right) = q_0(0) + \frac{x}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{1}{x} \left(\frac{1}{p^x} - \frac{1}{(p+1)^x} \right) \\ &= q_0(0) + \frac{x}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \left[-\frac{1}{xt^x} \right]_p^{p+1} = q_0(0) + \frac{x}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^{x+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $q_0(x) = q_0(0) + \frac{x}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^{x+1}}$ ce qui reste vrai pour $x = 0$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, q_0(x) = q_0(0) + \frac{x}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^{x+1}}.$$

b) Soit x un réel strictement positif. D'après ce qui précède, on a

$$\frac{q_0(x) - q_0(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^{x+1}}.$$

$\int_p^{p+1} \frac{dt}{t^{x+1}}$ tend vers 0 en décroissant. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^{x+1}} \right| \leq \int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t^{x+1}} \leq \int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t} = \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right).$$

Comme $\ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$ est une expression indépendante de x et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la série de fonctions de terme général $x \mapsto (-1)^p \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^{x+1}}$ est uniformément convergente sur $]0, +\infty[$. D'après le théorème d'interversion des limites, on a alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^{x+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \lim_{x \rightarrow 0} \frac{dt}{t^{x+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{dt}{t} = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right).$$

Finalement

$$q_0 \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } q_0'(0) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right).$$

6) La série de terme général $(-1)^p \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right)$ converge. Donc la suite $\left(\sum_{p=1}^{2n} (-1)^p \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ extraite de la suite des sommes partielles converge et de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^{2n} (-1)^p \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right)$. Or pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{2n} (-1)^p \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) &= \sum_{p=1}^{2n} (-1)^p \ln \left(\frac{p+1}{p} \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{2k+1}{2k} \right) - \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{2k}{2k-1} \right) \\
&= \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{(2k+1)(2k-1)}{(2k)^2} \right) = \ln \left(\frac{(2n+1) \times (2n-1) \times \dots \times 3 \times (2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 1}{((2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2)^2} \right) \\
&= \ln \left(\frac{(2n+1) \times (2n) \times (2n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times (2n) \times (2n-1) \times \dots \times 2 \times 1}{((2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2)^4} \right) \\
&= \ln \left(\frac{(2n+1)!(2n)!}{2^{4n} n!^4} \right),
\end{aligned}$$

Maintenant, d'après la formule de STIRLING,

$$\begin{aligned}
\frac{(2n+1)!(2n)!}{2^{4n} n!^4} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n+1}{e} \right)^{2n+1} \sqrt{2\pi(2n+1)} \times \left(\frac{2n}{e} \right)^{2n} \sqrt{2\pi(2n)}}{2^{4n} \left(\frac{n}{e} \right)^{4n} (2\pi n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n}{e} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n+1} \frac{1}{\pi n} \\
&= \frac{2}{\pi e} e^{(2n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) = \ln \left(\frac{2}{\pi} \right) \text{ et } q'_0(0) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{\pi} \right).}$$