

Epreuve de Mathématiques 2 MP

Exercice 1

1° (a) Soit $x \in E$.

$$x \in \text{Kerf} \Leftrightarrow p_F(g(x)) = 0 \Leftrightarrow g(x) \in F^\perp \Leftrightarrow x \in g^{-1}(F^\perp).$$

D'autre part, g est un automorphisme et donc $g(E) = E$. Puis

$$\text{Imf} = p_F(g(E)) = p_F(E) = F.$$

$$\text{Kerf} = g^{-1}(F^\perp) \text{ et } \text{Imf} = F.$$

(b) D'une part,

$$(g^{-1} \circ p_F \circ g) \circ (g^{-1} \circ p_F \circ g) = g^{-1} \circ p_F^2 \circ g = g^{-1} \circ p_F \circ g.$$

D'autre part, $g \in \mathcal{O}(E)$ et donc $g^* = g^{-1}$ et p_F est une projection orthogonale et donc $p_F^* = p_F$. On en déduit que

$$(g^{-1} \circ p_F \circ g)^* = g^* \circ p_F^* \circ (g^{-1})^* = g^{-1} \circ p_F \circ g.$$

Ainsi, $g^{-1} \circ p_F \circ g$ est un endomorphisme idempotent et auto-adjoint et on sait que $g^{-1} \circ p_F \circ g$ est une projection orthogonale que l'on note $p_{F'}$. Ainsi, il existe un et un seul sous-espace vectoriel F' tel que $g^{-1} \circ p_F \circ g = p_{F'}$ ou encore tel que $p_F \circ g = g \circ p_{F'}$. Enfin, pour $x \in E$,

$$g^{-1} \circ p_F \circ g(x) = x \Leftrightarrow p_F(g(x)) = g(x) \Leftrightarrow g(x) \in F \Leftrightarrow x \in g^{-1}(F).$$

$$F' = g^{-1}(F).$$

(c) $f \circ f^* \circ f = p_F \circ g \circ g^{-1} \circ p_F \circ p_F \circ g = p_F \circ g = f$.

$$f \circ f^* \circ f = f.$$

2° (a) Puisque g est un automorphisme de E ,

$$p_F \circ g = g \circ p_F \Leftrightarrow g \circ p_{F'} = g \circ p_F \Leftrightarrow p_{F'} = p_F \Leftrightarrow F' = F \Leftrightarrow g^{-1}(F) = F \Leftrightarrow F = g(F).$$

$$p_F \circ g = g \circ p_F \Leftrightarrow g(F) = F.$$

(b) Soient g et g' deux automorphismes orthogonaux de E commutant avec p_F . On a

$$(g \circ p_F) \circ (g' \circ p_F) = (g \circ g') \circ (p_F \circ p_F) = (g \circ g') \circ p_F.$$

Maintenant $g \circ g'$ est un automorphisme orthogonal de E vérifiant de plus $g \circ g'(F) = g(F) = F$ et donc commutant avec p_F . Par suite, $(g \circ p_F) \circ (g' \circ p_F)$ est un élément de \mathcal{G} . La restriction de la loi \circ à \mathcal{G} est donc une loi de composition interne dans \mathcal{G} .

Posons $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}(F)$.

$$g \circ p_F \mapsto g_{/F}$$

• Tout d'abord si g est un élément de $\mathcal{O}(E)$ tel que $g \circ p_F = p_F \circ g$, alors $g(F) = F$ et donc $g_{/F} \in \mathcal{O}(F)$.

De plus, si $(g, g') \in (\mathcal{O}(E))^2$

$$g \circ p_F = g' \circ p_F \Leftrightarrow \forall x \in E, g(p_F(x)) = g'(p_F(x)) \Leftrightarrow \forall y \in F, g(y) = g'(y) \Leftrightarrow g_{/F} = g'_{/F}.$$

Les deux vérifications ci-dessus permettent d'affirmer que φ est une application.

- φ est injective car si g et g' sont deux automorphismes orthogonaux de E commutant avec p_F et tels que $g_F = g'_F$ alors $g \circ p_F = g' \circ p_F$.
- Soit $h \in \mathcal{O}(F)$. Soit g l'automorphisme orthogonal tel que $g_F = h$ et $g_{F^\perp} = \text{Id}_{F^\perp}$. g est un automorphisme orthogonal de E tel que $g(F) = F$ et donc $g \circ p_F$ est un élément de \mathcal{G} . De plus, par construction, $\varphi(g \circ p_F) = h$. Ceci montre que φ est surjective et donc une bijection.
- Soit alors g et g' deux automorphismes orthogonaux de E commutant avec p_F .

$$\begin{aligned} \varphi((g \circ p_F) \circ (g' \circ p_F)) &= \varphi((g \circ g') \circ p_F) \text{ (puisque } g \text{ et } g' \text{ commutent avec } p_F) \\ &= (g \circ g')_F = g_F \circ g'_F \text{ (puisque } g'(F) = F) \\ &= \varphi(g \circ p_F) \circ \varphi(g' \circ p_F). \end{aligned}$$

Ainsi, φ est donc un isomorphisme du magma (\mathcal{G}, \circ) sur le groupe $(\mathcal{O}(F), \circ)$ et donc

(\mathcal{G}, \circ) est un groupe isomorphe au groupe $(\mathcal{O}(F), \circ)$.

L'image de tout élément de \mathcal{G} est $F \subsetneq E$ et donc \mathcal{G} ne contient pas Id_E . En particulier,

\mathcal{G} n'est pas un sous-groupe du groupe $(\mathcal{O}(E), \circ)$.

(c) Soit g un automorphisme orthogonal.

$$p_F(g(p_F(g(E)))) = p_F(g(p_F(E))) = p_F(g(F)).$$

Montrons que l'on peut choisir g de sorte que $p_F(g(F)) \neq F$. Ceci empêchera $(p_F \circ g) \circ (p_F \circ g)$ d'être de la forme $p_F \circ g'$ avec $g' \in \mathcal{O}(E)$, puisque tous les $p_F \circ g'$ ont pour image F .

On complète une base orthonormée (e_1, \dots, e_p) de F ($1 \leq p \leq n-1$ car $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$) en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ de E . Soit g défini par $g(e_1) = e_{p+1}$, $g(e_{p+1}) = e_1$ et $g(e_i) = e_i$ sinon. g est un automorphisme orthogonal de E puisque l'image par g de la base orthonormée $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est la base orthonormée $(e_{p+1}, \dots, e_p, e_1, \dots, e_n)$. De plus,

$$p_F(g(F)) = p_F(\text{Vect}(g(e_1), \dots, g(e_p))) = p_F(\text{Vect}(e_{p+1}, e_2, \dots, e_p)) = \text{Vect}(e_2, \dots, e_p) \neq F,$$

ce qu'il fallait démontrer. Donc,

l'ensemble des $p_F \circ g$ obtenu lorsque g décrit $\mathcal{O}(E)$ n'est pas stable par l'opération de composition.

3° (a) $(f \circ f^*) \circ (f \circ f^*) = (f \circ f^* \circ f) \circ f^* = f \circ f^*$ et $(f \circ f^*)^* = f \circ f^*$. Donc

$f \circ f^*$ est une projection orthogonale.

(b) Soit $x \in (\text{Kerf})^\perp$.

$$\|f(x)\|^2 - \|x\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle - \langle x, x \rangle = \langle f^* \circ f(x), x \rangle - \langle x, x \rangle = \langle f^* \circ f(x) - x, x \rangle.$$

Mais $f(f^* \circ f(x) - x) = f \circ f^* \circ f(x) - f(x) = 0$. Par suite, $f^* \circ f(x) - x \in \text{Kerf}$. Comme $x \in (\text{Kerf})^\perp$, on a donc

$$\|f(x)\|^2 - \|x\|^2 = \langle f^* \circ f(x) - x, x \rangle = 0.$$

$\forall x \in (\text{Kerf})^\perp, \|f(x)\| = \|x\|.$

(c) D'après (a), $f \circ f^*$ est une projection orthogonale par rapport à un certain sous-espace F , que l'on note p_F . On a déjà $F = \text{Im}(f \circ f^*) \subset \text{Im}f$

Vérifions que $f \circ f^*$ et f^* ont même noyau. Il est clair que $\text{Kerf}^* \subset \text{Ker}(f \circ f^*)$. Réciproquement, pour $x \in E$,

$$x \in \text{Ker}(f \circ f^*) \Rightarrow f \circ f^*(x) = 0 \Rightarrow \langle f \circ f^*(x), x \rangle = 0 \Rightarrow \langle f^*(x), f^*(x) \rangle = 0 \Rightarrow x \in \text{Kerf}^*.$$

Ainsi, $\text{Ker}(f \circ f^*) = \text{Ker}f^*$. On en déduit que $\text{rg}(f \circ f^*) = \text{rg}f^* = \text{rg}f$ et puisque $\text{Im}(f \circ f^*) \subset \text{Im}f$, on a finalement $\text{Im}(f \circ f^*) = \text{Im}f$. Ceci montre que

$f \circ f^*$ est la projection orthogonale sur $F = \text{Im}f$.

$(\text{Ker}f)^\perp$ est un supplémentaire de $\text{Ker}f$ dans E et on sait que la restriction de f à $(\text{Ker}f)^\perp$ induit un isomorphisme de $(\text{Ker}f)^\perp$ sur $\text{Im}f$. La question (b) montre que cette restriction est une isométrie que l'on note g' . Il existe d'autre part une isométrie g'' de $\text{Ker}f$ sur $(\text{Im}f)^\perp$ (puisque ces sous-espaces ont même dimension). Soit g l'endomorphisme de E dont les restrictions à $(\text{Ker}f)^\perp$ et $\text{Ker}f$ sont respectivement g' et g'' . g est une automorphisme orthogonal de E car l'image d'une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = (\text{Ker}f)^\perp \oplus \text{Ker}f$ est une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = \text{Im}f \oplus (\text{Im}f)^\perp$.

Maintenant, si x est dans $\text{Ker}f$, $p_F(g(x)) = 0 = f(x)$ car $g(x) \in (\text{Im}f)^\perp = F^\perp$ et si x est dans $(\text{Ker}f)^\perp$, $p_F(g(x)) = (f \circ f^*)(f(x)) = f(x)$ par définition de g_1 et puisque $f \circ f^* \circ f = f$. Les endomorphismes f et $p_F \circ g$ coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires de E et donc $f = p_F \circ g$.

Exercice 2

1° (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{t^x}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$.

• **Etude au voisinage de 0.** $\frac{t^x}{1+t^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} t^x > 0$. Or, la fonction $t \mapsto t^x$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $x > -1$. Donc, la fonction $t \mapsto \frac{t^x}{1+t^2}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $x > -1$.

• **Etude au voisinage de $+\infty$.** $\frac{t^x}{1+t^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} t^{x-2} > 0$. Or, la fonction $t \mapsto t^{x-2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $x-2 < -1$ ce qui équivaut à $x < 1$. Donc, la fonction $t \mapsto \frac{t^x}{1+t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $x < 1$.

Finalement, la fonction $t \mapsto \frac{t^x}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $-1 < x < 1$.

Le domaine de définition de f est $] -1, 1[$.

(b) Soient t un réel strictement positif donné et $x \in] -1, 1[$. $\frac{t^x}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2} e^{x \ln t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} \frac{x^n}{n!}$.

$$\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times] -1, 1[, \frac{t^x}{(1+t)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} \frac{x^n}{n!}.$$

2° (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $I_n = \int_0^1 (\ln t)^n dt$.

• **Existence de I_n .** La fonction $t \mapsto (\ln t)^n$ est continue sur $]0, 1[$. De plus, quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $(\ln t)^n = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0 à droite, la fonction $t \mapsto (\ln t)^n$ est intégrable sur $]0, 1[$. Finalement, pour tout naturel n , I_n existe.

• **Calcul de I_n .** Tout d'abord $I_0 = \int_0^1 dt = 1$.

Soient alors $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto (\ln t)^{n+1}$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_\varepsilon^1 (\ln t)^{n+1} dt = [t(\ln t)^{n+1}]_\varepsilon^1 - (n+1) \int_\varepsilon^1 (\ln t)^n dt = -\varepsilon(\ln \varepsilon)^{n+1} - (n+1) \int_\varepsilon^1 (\ln t)^n dt.$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $I_{n+1} = -(n+1)I_n$. En résumé, $I_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = -(n+1)I_n$. Mais alors par récurrence on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 (\ln t)^n dt = (-1)^n n!.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $t \in]0, 1]$, on a $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{(1+t)^2} \leq 1$ et donc $\frac{|\ln t|^n}{4} \leq \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2} \leq |\ln t|^n$. Mais alors, par croissance de l'intégrale et d'après (a)

$$\frac{n!}{4} = \int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{4} dt \leq \int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^1 |\ln t|^n dt = n!.$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n!}{4} \leq \int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2} dt \leq n!.$$

3° (a) La fonction $t \mapsto \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{t^{3/2}}$ au voisinage de $+\infty$. La fonction $t \mapsto \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}$ est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t} = u$ est une bijection de classe C^1 de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$. On peut donc poser $u = \frac{1}{t}$ et on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} dt = \int_1^0 \frac{(\ln(1/u))^n}{(1+\frac{1}{u})^2} - \frac{du}{u^2} = (-1)^n \int_0^1 \frac{(\ln u)^n}{(1+u)^2} du.$$

On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} dt.$$

(b) On rappelle que $\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times]-1, 1[$, $\frac{t^x}{(1+t)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} \frac{x^n}{n!}$. Il s'agit de vérifier que l'on peut intégrer cette égalité terme à terme sur $]0, +\infty[$.

Soit $x \in]-1, 1[$ fixé. Pour $t \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n(t) = \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} \frac{x^n}{n!}$. Pour $t \in]0, +\infty[$, on pose encore $g(t) = \frac{t^x}{(1+t)^2}$.

- Chaque fonction g_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ et la série de fonctions de terme général g_n converge simplement vers g sur $]0, +\infty[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt &= \frac{|x|^n}{n!} \left(\int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2} dt \right) = \frac{|x|^n}{n!} \left((-1)^n \int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} dt \right) \\ &= \frac{2|x|^n}{n!} (-1)^n \int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} dt \text{ (d'après 3°(a))} \\ &= \frac{2|x|^n}{n!} \int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2} dt \\ &\leq \frac{2|x|^n}{n!} \times n! = 2|x|^n \text{ (d'après 2°(b)).} \end{aligned}$$

Comme $x \in]-1, 1[$, la série numérique de terme général $2|x|^n$ converge et il en est de même de la série de terme général $\int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, on sait que

$$\forall x \in]-1, 1[, \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} dt \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Le rayon de convergence R de la série précédente est au moins égal à 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} dt = \frac{1+(-1)^n}{n!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a d'après 2°(b)

$$a_{2n} = \frac{2}{(2n)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{2n}}{(1+t)^2} dt \geq \frac{2}{(2n)!} \times \frac{(2n)!}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la suite (a_n) ne tend pas vers 0. On en déduit que $R \leq 1$ et finalement

f est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et le rayon de la série obtenue est 1.

4° (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto t^{1/2p} = u$ est une bijection de classe C^1 de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. On peut donc poser $u = t^{1/2p}$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u}{(1+u^{2p})^2} (2p)u^{2p-1} du = \int_0^{+\infty} u \frac{(2p)u^{2p-1}}{(1+u^{2p})^2} du.$$

Soient alors ε et A deux réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Une intégration par parties fournit

$$\int_\varepsilon^A u \frac{(2p)u^{2p-1}}{(1+u^{2p})^2} du = \left[-u \frac{1}{1+u^{2p}} \right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1}{1+u^{2p}} du = -\varepsilon \frac{1}{1+\varepsilon^{2p}} + A \frac{1}{1+A^{2p}} + \int_\varepsilon^A \frac{1}{1+u^{2p}} du.$$

Quand ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{2p}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{2p}} du.$$

(b) Les racines du polynôme $P = X^{2p} + 1$ sont toutes simples car P n'a aucune racine en commun avec $P' = 2pX^{2p-1}$. Ces racines sont les racines $2p$ -èmes de -1 à savoir les $\omega_k = e^{i(\frac{\pi}{2p} + \frac{k\pi}{p})}$, $-p \leq k \leq p-1$. La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ sur \mathbb{C} s'écrit

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=-p}^{p-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega_k},$$

avec

$$\lambda_k = \frac{1}{P'(\omega_k)} = \frac{1}{2p\omega_k^{2p-1}} = \frac{\omega_k}{2p\omega_k^{2p}} = -\frac{\omega_k}{2p}.$$

$$\frac{1}{1+u^{2p}} = -\frac{1}{2p} \sum_{k=-p}^{p-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k} \text{ où } \omega_k = e^{i(\frac{\pi}{2p} + \frac{k\pi}{p})}, k \in \llbracket -p, p-1 \rrbracket.$$

(c) Par suite

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{2p}} du = \left[-\frac{1}{2p} \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k (\ln|u - \omega_k| + i \arg(u - \omega_k)) \right]_0^{+\infty}.$$

Pour $u \in [0, +\infty[$, posons $F(u) = \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \ln|u - \omega_k|$. Déjà, puisque les ω_k sont de module 1, on a $F(0) = 0$. Ensuite, on

sait que $\sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k = 0$. Par suite, pour $u > 0$,

$$F(u) = \left(\sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \right) \ln u + \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \ln \left| 1 - \frac{\omega_k}{u} \right| = \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \ln \left| 1 - \frac{\omega_k}{u} \right|,$$

et donc $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = 0$. Il reste

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{2p}} du = \left[-\frac{i}{2p} \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \arg(u - \omega_k) \right]_0^{+\infty}.$$

(d) Pour $u > 1$, on a $\forall k \in \llbracket -p, p-1 \rrbracket$, $\operatorname{Re}(u - \omega_k) > 0$ et donc

$$\arg(u - \omega_k) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{\operatorname{Im}(u - \omega_k)}{\operatorname{Re}(u - \omega_k)} \right) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{\operatorname{Im}(-\omega_k)}{\operatorname{Re}(u - \omega_k)} \right).$$

Par suite,

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \arg(u - \omega_k) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \operatorname{Arctan} \left(\frac{\operatorname{Im}(-\omega_k)}{\operatorname{Re}(u - \omega_k)} \right) = 0.$$

Il reste

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{2p}} du &= \frac{i}{2p} \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \arg(-\omega_k) = \frac{i}{2p} \sum_{k=-p}^{p-1} (-\omega_k) \arg(\omega_k) \text{ (les } \omega_k \text{ étant deux à deux opposés)} \\ &= -\frac{i}{2p} \sum_{k=-p}^{p-1} e^{i\pi/2p} \alpha^k \left(\frac{\pi}{2p} + \frac{k\pi}{p} \right) = -\frac{i\pi e^{i\pi/2p}}{(2p)^2} \sum_{k=-p}^{p-1} \alpha^k - \frac{i\pi e^{i\pi/2p}}{2p^2} \sum_{k=-p}^{p-1} k\alpha^k. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\sum_{k=-p}^{p-1} \alpha^k = \alpha^{-p} \frac{1 - \alpha^{2p}}{1 - \alpha} = \alpha^{-p} \frac{1 - 1}{1 - \alpha} = 0.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) \sum_{k=-p}^{p-1} k\alpha^k &= \sum_{k=-p}^{p-1} k\alpha^k - \sum_{k=-p}^{p-1} k\alpha^{k+1} = \sum_{k=-p}^{p-1} k\alpha^k - \sum_{k=-(p-1)}^p (k-1)\alpha^k \\ &= -p\alpha^{-p} + \sum_{k=-(p-1)}^{p-1} \alpha^k - (p-1)\alpha^p = -(p+1)\alpha^{-p} - (p-1)\alpha^p = (p+1) + (p-1) \\ &= 2p. \end{aligned}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{2p}} du = -\frac{i\pi e^{i\pi/2p}}{2p^2} \frac{2p}{1 - e^{i\pi}} = -\frac{i\pi}{p} \frac{1}{e^{-i\pi/2p} - e^{i\pi/2p}} = -\frac{i\pi}{p} \frac{1}{-2i \sin(\pi/2p)} = \frac{\pi/2p}{\sin(\pi/2p)}.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{2p}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2} dt = \frac{\pi/2p}{\sin(\pi/2p)}.$$

5° Puisque f est développable en série entière sur $] -1, 1[$ de même que la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$, la fonction $g : x \mapsto \pi x - f(x) \sin(\pi x)$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$. Posons alors

$$\forall x \in] -1, 1[, g(x) = \pi x - f(x) \sin(\pi x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Supposons par l'absurde que g ne soit pas nulle sur $] - 1, 1[$. Alors, il existe au moins un coefficient a_n non nul et on peut considérer l'entier naturel $p = \text{Min}\{n \in \mathbb{N} / a_n \neq 0\}$. On sait alors que

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_p x^p + o(x^p).$$

Par suite, la fonction $x \mapsto \frac{g(x)}{x^p}$ a une limite réelle non nulle quand x tend vers 0 ce qui montre en particulier que g ne s'annule pas sur un intervalle de la forme $]0, \alpha[$, $\alpha > 0$. Ceci contredit le fait que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $g\left(\frac{1}{2p}\right) = 0$. Donc g est nulle sur $] - 1, 1[$ et on a montré que

$$\forall x \in] - 1, 1[\setminus \{0\}, \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2} dt = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

Exercice 3

1° Soit $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{R}$. Alors $x^2 + y^2 + z^2$ est un entier et cet entier est nul si et seulement si $x = y = z = 0$ ou encore $\vec{v} = \vec{0}$.

Soit $\mathcal{P} = \{x^2 + y^2 + z^2, x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{R} \setminus \{\vec{0}\}\}$. \mathcal{P} est une partie non vide de \mathbb{N}^* et donc \mathcal{P} admet un plus petit élément.

Soit $\vec{u} = x_0\vec{a} + y_0\vec{b} + z_0\vec{c}$ un élément non nul de $\mathcal{D} \cap \mathcal{R}$ tel que $x^2 + y^2 + z^2$ soit minimum.

• $\mathcal{D} \cap \mathcal{R}$ est un sous-groupe de $(E, +)$ en tant qu'intersection de sous-groupes de $(E, +)$. Puisque $\vec{u} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{R}$, $\mathcal{D} \cap \mathcal{R}$ contient encore les $\lambda\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ et donc

$$\mathbb{Z}\vec{u} \subset \mathcal{R} \cap \mathcal{D}.$$

• Réciproquement, soit $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{R}$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Mais alors le vecteur $\vec{v} - E(\lambda)\vec{u} = (\lambda - E(\lambda))\vec{u}$ est encore dans $\mathcal{D} \cap \mathcal{R}$ (où $E(\lambda)$ désigne la partie entière du réel λ). De plus,

$$\vec{v} - E(\lambda)\vec{u} = (\lambda - E(\lambda))(x_0\vec{a} + y_0\vec{b} + z_0\vec{c}),$$

avec

$$((\lambda - E(\lambda))x_0)^2 + ((\lambda - E(\lambda))y_0)^2 + ((\lambda - E(\lambda))z_0)^2 = (\lambda - E(\lambda))^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) < (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2).$$

Par définition de \vec{u} , on a alors $\vec{v} - E(\lambda)\vec{u} = \vec{0}$ et donc $\vec{v} = E(\lambda)\vec{u} \in \mathbb{Z}\vec{u}$. Ceci montre que $\mathcal{R} \cap \mathcal{D} \subset \mathbb{Z}\vec{u}$ et finalement que

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{u}.$$

2° (a)

$$(\vec{a} | \vec{A}) = \frac{1}{\Delta}(\vec{a} | (\vec{b} \wedge \vec{c})) = \frac{1}{\Delta}[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = 1,$$

et

$$(\vec{b} | \vec{A}) = \frac{1}{\Delta}(\vec{b} | (\vec{b} \wedge \vec{c})) = \frac{1}{\Delta}[\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}] = 0.$$

De même, $(\vec{c} | \vec{A}) = 0$ et aussi $(\vec{b} | \vec{B}) = (\vec{c} | \vec{C}) = 1$ et $(\vec{a} | \vec{B}) = (\vec{c} | \vec{B}) = (\vec{a} | \vec{C}) = (\vec{b} | \vec{C}) = 0$. Finalement,

$$\forall (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^6, (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} | \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}) = x\alpha + y\beta + z\gamma.$$

(b) Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} = \vec{0} &\Rightarrow \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} | \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}) = 0 \Rightarrow \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x\alpha + y\beta + z\gamma = 0 \\ &\Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^3)^\perp \quad (\mathbb{R}^3 \text{ étant muni du produit scalaire usuel}) \\ &\Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est une famille libre de E et puisque $\text{card}(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = 3 = \dim(E) < +\infty$,

$$\text{la famille } (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) \text{ est une base de } E.$$

3° Soient $\vec{w} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ et $\vec{t} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$ deux éléments de $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$.

$$\begin{aligned}\vec{w} \wedge \vec{t} &= (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) \wedge (x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}) \\ &= (yz' - zy')(\vec{b} \wedge \vec{c}) - (xz' - zx')(\vec{c} \wedge \vec{a}) + (xy' - yx')(\vec{a} \wedge \vec{b}) \\ &= \Delta((yz' - zy')\vec{A} - (xz' - zx')\vec{B} + (xy' - yx')\vec{C}),\end{aligned}$$

et donc

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \Delta^2((yz' - zy')^2 + (xz' - zx')^2 + (xy' - yx')^2).$$

Ceci montre que $X^2 + Y^2 + Z^2$ est un entier naturel et que cet entier naturel est nul si et seulement si $\vec{w} \wedge \vec{t} = \vec{0}$ (car $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est une base de E).

Soit $\mathcal{S} = \{X^2 + Y^2 + Z^2, (\vec{w}, \vec{t}) \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{R})^2, (\vec{w}, \vec{t}) \text{ libre}\}$. \mathcal{S} est une partie non vide de \mathbb{N}^* et donc \mathcal{S} admet un plus petit élément.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux éléments de $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$ tels que (\vec{u}, \vec{v}) libre et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ de norme minimum.

• $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$ est un sous-groupe de $(E, +)$ et puisque $(\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{R}, \mathcal{P} \cap \mathcal{R})$ contient encore les $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$. Par suite,

$$\mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v} \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{R}.$$

• Réciproquement, soit $\vec{w} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{R}$. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Mais alors le vecteur $\vec{w} - E(\lambda)\vec{u} - E(\mu)\vec{v} = (\lambda - E(\lambda))\vec{u} + (\mu - E(\mu))\vec{v}$ est encore dans $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$.

Maintenant, si on pose $\vec{u} \wedge ((\lambda - E(\lambda))\vec{u} + (\mu - E(\mu))\vec{v}) = X\vec{A} + Y\vec{B} + Z\vec{C}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} = X_0\vec{A} + Y_0\vec{B} + Z_0\vec{C}$, on a

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (\lambda - E(\lambda))^2(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) < X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2,$$

et donc $\lambda - E(\lambda) = 0$. De même, en faisant le produit vectoriel avec \vec{v} , on obtient $\mu - E(\mu) = 0$. Ainsi, λ et μ sont des entiers et on a montré que

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}.$$

4° (a) Notons $(\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (où \vec{u} et \vec{v} ont été définis à la question précédente). $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} . Soit alors $\vec{w} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \in \mathcal{R}$.

$$\begin{aligned}\vec{w} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{R} &\Leftrightarrow (\vec{w} | \vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} | \alpha'\vec{A} + \beta'\vec{B} + \gamma'\vec{C}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha'x + \beta'y + \gamma'z = 0 \text{ (d'après 2°(a)).}\end{aligned}$$

De plus, en divisant les deux membres de cette dernière égalité par le PGCD de α' , β' et γ' , on obtient une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ où cette fois-ci α , β et γ sont premiers entre eux.

(b) Il est clair que tout élément de \mathcal{R} appartient à exactement un et un seul des $\mathcal{P}_k \cap \mathcal{R}$. De plus, α , β et γ sont premiers entre eux et on sait que pour tout entier relatif k , l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$ a au moins une solution $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ ce qui montre qu'aucun des $\mathcal{P}_k \cap \mathcal{R}$ n'est vide. Finalement

$$(\mathcal{P}_k \cap \mathcal{R})_{k \in \mathbb{Z}} \text{ est une partition de } \mathcal{R}.$$

(c) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Soient M un point de \mathcal{P}_k et M' son projeté orthogonal sur \mathcal{P}_{k+1} . Puisque \mathcal{P}_k et \mathcal{P}_{k+1} sont parallèles, la distance cherchée est MM' . On a $(\vec{OM}, \vec{N}) = k$ et $(\vec{OM}', \vec{N}) = k + 1$. Par suite, $|(\vec{MM}', \vec{N})| = 1$. Maintenant, \vec{MM}' est colinéaire à \vec{N} et donc

$$|(\vec{MM}', \vec{N})| = MM' \times \|\vec{N}\| = d(\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_{k+1}) \times \|\vec{N}\|,$$

et finalement

$$\forall k \in \mathbb{Z}, d(\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_{k+1}) = \frac{1}{\|\vec{N}\|}.$$