SESSION 2001

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1 MP

Exercice 1

On supposera que n est au moins égal à 2

1° **(a)** Soit $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Tout d'abord, $AP'' - nA'P'$ est bien un polynôme à coefficients réels. De plus, AP'' est de degré au plus $(n-1)+2 = n+1$ et $nA'P'$ est de degré au plus $n+1$. On en déduit que $u(P)$ est un polynôme de degré au plus $n+1$. Ainsi,

$$u \text{ est une application de } \mathbb{R}_{n+1}[X] \text{ dans lui-même.}$$

Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$.

$$u(\lambda P + \mu Q) = A(\lambda P + \mu Q)'' - nA'(\lambda P + \mu Q)' = \lambda(AP'' - nA'P') + \mu(AQ'' - nA'Q') = \lambda u(P) + \mu u(Q).$$

On a montré que

$$\boxed{u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{n+1}[X]).}$$

On a $u(1) = 0$ et $u(X) = -n(2X+p) \times 1 = -p - 2nX$. Soit maintenant $k \in [\![2, n+1]\!]$.

$$u(X^k) = (X^2+pX+q) \times k(k-1)X^{k-2} - n(2X+p) \times kX^{k-1} = qk(k-1)X^{k-2} - pk(n+1-k)X^{k-1} - k(2n+1-k)X^k.$$

Donc

$$\boxed{\text{Mat}_{(X^k)_{0\leq k\leq n+1}}(u) = \begin{pmatrix} -0(2n+1) & -pn & 2q & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1(2n) & -2p(n-1) & 6q & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & -2(2n-1) & -3p(n-2) & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & & (n+1)nq \\ \vdots & & & & \ddots & -n(n+1) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & \dots\ \dots & 0 & -(n+1)n \end{pmatrix}}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure et les valeurs propres de u sont directement lisibles.

$$\boxed{\text{Sp}(u) = (\lambda_k)_{0\leq k\leq n+1} \text{ où } \forall k \in [\![0, n+1]\!],\ \lambda_k = -k(2n+1-k).}$$

Maintenant, pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\lambda_k - \lambda_{k+1} = -k(2n+1-k) + (k+1)(2n-k) = -k(2n+1-k) + k(2n-k) + (2n-k) = 2(n-k),$$

ce qui montre que

$$\boxed{\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_n = \lambda_{n+1}.}$$

(b) On sait que u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.
D'après ce qui précède, χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$, admet $n-1$ racines simples et une valeur propre double à savoir $-n(n+1)$.

Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres simples sont nécessairement des droites et donc

$$u \text{ est diagonalisable si et seulement si } \dim(E_{-n(n+1)}) = 2.$$

Or, les deux dernières lignes de la matrice $\mathrm{Mat}_{(X^k)_{0\leq k\leq n+1}}(u + n(n+1)\mathrm{Id})$ sont nulles de sorte que cette matrice (de format $n+2$) est de rang au plus n. On en déduit que $E_{-n(n+1)}$ est de dimension au moins 2 et donc exactement 2 (puisque la dimension de $E_{-n(n+1)}$ est au plus l'ordre de multiplicité de la valeur propre $-n(n+1)$). Finalement

$$\boxed{u \text{ est diagonalisable. De plus } \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \dim(E_{-k(2n+1-k)}) = 1 \text{ et } \dim(E_{-n(n+1)} = 2.}$$

(c) • Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$ et P un polynôme unitaire de degré k. Alors le polynôme $AP'' - nA'P'$ est de degré au plus k et de plus le coefficient de X^k dans $AP'' - nA'P'$ vaut

$$1 \times k(k-1) - n \times 2 \times k = -k(2n+1-k) = \lambda_k.$$

ce qui reste vrai pour $k = 0$ ou $k = 1$. Par suite, si le polynôme P de degré $k \in [\![0, n+1]\!]$ est un vecteur propre de u, P est associé à λ_k.

• Pour $0 \leq k \leq n-1$, $E_{-k(2n+1-k)}$ est une droite vectorielle et contient donc un et un seul polynôme unitaire que l'on note P_k, de degré k d'après ce qui précède.

• Les éléments non nuls de $E_{-n(n+1)}$ sont des polynômes de degré n ou $n+1$ et il existe des polynômes unitaires P de degré n ou $n+1$ vérifiant $u(P) = -n(n+1)P$. Maintenant, si P et Q sont deux polynômes unitaires de degré n éléments de $E_{-n(n+1)}$ alors $P - Q$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ élément de $E_{-n(n+1)}$ et donc $P = Q$. Ceci montre l'unicité de P_n. Enfin, Si P_{n+1} est un polynôme unitaire de degré $n+1$ éléments de $E_{-n(n+1)}$, le polynôme $P_{n+1} + P_n$ est un élément de $E_{-n(n+1)}$ unitaire de degré $n+1$ et distinct de P_{n+1}. Ceci montre que P_{n+1} n'est pas unique.

(d) Puisque A ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto -n\dfrac{A'(x)}{A(x)}$ et $x \mapsto \dfrac{n(n+1)}{A(x)}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Maintenant, $E_{-n(n+1)}$ est un espace vectoriel de dimension 2 constitué de solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. L'espace des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$ est donc $E_{-n(n+1)}$ ce qui montre que

$$\boxed{\text{les solutions de } (E_n) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont des fonctions polynômes.}}$$

2° La fonction P_n ne s'annule pas sur I et est de classe C^2 sur I. Par suite, la fonction v est de classe C^2 sur I si et seulement si la fonction z l'est. De plus

$$\begin{aligned} Av'' - nA'v' - n(n+1)v &= A(z''P_n + 2z'P_n' + zP_n'') - nA'(z'P_n + zP_n') + n(n+1)zP_n \\ &= AP_nz'' + z'(2AP_n' - nA'P_n) + z(AP_n'' - nA'P_n' + n(n+1)P_n \\ &= AP_nz'' + z'(2AP_n' - nA'P_n). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} v \text{ est solution de } (E_n) \text{ sur I} &\Leftrightarrow AP_nz'' + z'(2AP_n' - nA'P_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z')'e^{2\ln(|P_n| - n\ln A)} + z'(2\frac{P_n'}{P_n} - n\frac{A'}{A})e^{2\ln(|P_n| - n\ln A)} = 0 \Leftrightarrow \left(z'\frac{P_n^2}{A^n}\right)' = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}/\ z'\frac{P_n^2}{A^n} = \alpha \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}/\ z' = \alpha\frac{A^n}{P_n^2}. \end{aligned}$$

3° P_{n+1} est une solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$ et donc $P_{n+1} = zP_n$ où $z' = \alpha\dfrac{A^n}{P_n^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 0$, z est constante ce qui contredit le fait que P_n et P_{n+1} n'ont pas même degré. Donc $\alpha \neq 0$ et on a

$$\frac{A^n}{P_n^2} = \frac{1}{\alpha}z' = \left(\frac{1}{\alpha}\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)',$$

ce qui montre déjà que $\dfrac{A^n}{P_n^2}$ admet des fractions rationnelles pour primitives.

Enfin, quand x tend vers $+\infty$

$$\frac{A^n(x)}{P_n^2(x)} \sim \frac{(x^2)^n}{(x^n)^2} = 1,$$

et

$$\left(\frac{1}{\alpha}\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)'(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{P'_{n+1}P_n - P'_nP_{n+1}}{P_n^2} \sim \frac{1}{\alpha}\frac{((n+1)-n)x^n \times x^n}{(x^n)^2} = \frac{1}{\alpha}.$$

On en déduit que $\dfrac{1}{\alpha} = 1$ et donc que

$$\boxed{\frac{A^n}{P_n^2} = \left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)'.}$$

Exercice 2

1° **(a)** Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy montre qu'il existe une solution y_0 et une seule de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $y_0(0) = 0$ et $y_0'(0) = 0$.

(b) Notons (E_h) : $y'' - y = 0$ l'équation homogène associée. On sait que les solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Comme les fonctions $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$ sont deux solutions indépendantes de (E_h) sur $\mathbb{R}$, les solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est somme d'une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ et de la solution générale de (E_h) sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\boxed{\text{les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto y_0(x) + \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

2° **(a)** Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $z(x) = y_0(-x)$. Puisque f est paire, pour tout réel x, on a

$$z''(x) - z(x) = y_0''(-x) - y_0(-x) = f(-x) = f(x).$$

De plus, $z(0) = z'(0) = 0$. Par unicité de y_0, on a alors $z = y_0$ ou encore

$$\boxed{y_0 \text{ est paire.}}$$

(b) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Puisque y_0 est paire,

$$\lambda \operatorname{ch} \pi + \mu \operatorname{sh} \pi + y_0(\pi) = \lambda \operatorname{ch}(-\pi) + \mu \operatorname{sh}(-\pi) + y_0(-\pi) \Leftrightarrow 2\mu \operatorname{sh} \pi = 0 \Leftrightarrow \mu = 0.$$

$$\boxed{\text{les solutions } y \text{ de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telles que } y(\pi) = y(-\pi) \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto y_0(x) + \lambda \operatorname{ch} x,\ \lambda \in \mathbb{R}.}$$

(c) Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ puis F la fonction $x \mapsto \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x + y_0$.

$$\left\{\begin{array}{l} F'(0) = 0 \\ F'(\pi) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \times \lambda + \mu + y_0'(0) = 0 \\ \lambda \operatorname{sh} \pi + \mu \operatorname{ch} \pi + y_0'(\pi) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = 0 \\ \lambda = \dfrac{-y_0'(\pi)}{\operatorname{sh} \pi} \end{array}\right.,$$

ce qui montre l'existence et l'unicité de F.

(d) F est de la forme $x \mapsto \lambda \operatorname{ch} x + y_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui montre déjà que F est paire.
Pour $x \in \mathbb{R}$, posons alors $G(x) = F(x - 2\pi)$. Puisque f est 2π-périodique, G est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Puisque F est paire, on a $G(\pi) = F(-\pi) = F(\pi)$ et puisque F' est impaire, $G'(\pi) = F'(-\pi) = -F'(\pi) = 0 = F'(\pi)$. Ainsi, F et G sont solutions du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} y'' - y = f \\ y(\pi) = F(\pi) \\ y'(\pi) = 0 \end{array}\right..$$

Par unicité d'une telle solution, on a $G = F$ ce qui montre que F est 2π-périodique.

Soit maintenant y une solution 2π-périodique de (E) sur $\mathbb{R}$. $y - F$ est solution de (E_h) sur $\mathbb{R}$ et donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) - F(x) = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$.
Mais si $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, la fonction $x \mapsto \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ (on a ou bien $\lambda \neq -\mu$ et dans ce cas $\lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\lambda + \mu}{2} e^x$, ou bien $\lambda \neq \mu$ et dans ce cas $\lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x \underset{x \to -\infty}{\sim} \dfrac{\lambda - \mu}{2} e^{-x}$) et ne peut donc être 2π-périodique. Donc $y - F$ est la fonction nulle et F est l'unique solution 2π-périodique de (E) sur $\mathbb{R}$.

3° **(a)** Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $z(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sh}(x - t) f(t)\, dt = \operatorname{sh} x \int_0^x f(t) \operatorname{ch} t\, dt - \operatorname{ch} x \int_0^x f(t) \operatorname{sh} t\, dt$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$

$$z'(x) = \operatorname{ch} x \int_0^x f(t) \operatorname{ch} t\, dt + f(x) \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \int_0^x f(t) \operatorname{sh} t\, dt - f(x) \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} x \int_0^x f(t) \operatorname{ch} t\, dt - \operatorname{sh} x \int_0^x f(t) \operatorname{sh} t\, dt.$$

Mais alors z' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$

$$z''(x) = \operatorname{sh} x \int_0^x f(t) \operatorname{ch} t\, dt + f(x) \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch} x \int_0^x f(t) \operatorname{sh} t\, dt - f(x) \operatorname{sh}^2 x = z(x) + f(x).$$

Par suite, z est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Comme de plus $z(0) = z'(0) = 0$, on a $z = y_0$ par unicité de y_0. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ y_0(x) = \int_0^x \operatorname{sh}(x - t) f(t)\, dt \text{ (et } \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) = \int_0^x \operatorname{ch}(x - t) f(t)\, dt).}$$

Mais alors, la question 2°(c) montre que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = -\frac{y_0'(\pi)}{\operatorname{sh} \pi} \operatorname{ch} x + y_0(x) \text{ où } y_0(x) = \int_0^x \operatorname{sh}(x - t) f(t)\, dt.}$$

(b) • Soit $f \in C$. D'après ce qui précède

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x \operatorname{sh}(x - t) f(t)\, dt - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} \pi} \int_0^\pi \operatorname{ch}(\pi - t) f(t)\, dt.$$

On sait déjà que F est 2π-périodique et paire. On sait aussi que F est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et en particulier continue et de classe C^1 par morceaux. Finalement $T(f) = F \in C$.

• Soient $(f, g) \in C^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
T(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_0^x \operatorname{sh}(x - t)(\lambda f + \mu g)(t)\, dt - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} \pi} \int_0^\pi \operatorname{ch}(\pi - t)(\lambda f + \mu g)(t)\, dt \\
&= \lambda \left(\int_0^x \operatorname{sh}(x - t) f(t)\, dt - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} \pi} \int_0^\pi \operatorname{ch}(\pi - t) f(t)\, dt \right) + \mu \left(\int_0^x \operatorname{sh}(x - t) g(t)\, dt - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} \pi} \int_0^\pi \operatorname{ch}(\pi - t) g(t)\, dt \right) \\
&= (\lambda T(f) + \mu T(g))(x).
\end{aligned}$$

Donc T est un endomorphisme de l'espace vectoriel C.

• Soit $x \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned}
|T(f)(x)| &\leq \int_0^x \operatorname{sh}(x - t) |f(t)|\, dt + \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} \pi} \int_0^\pi \operatorname{ch}(\pi - t) |f(t)|\, dt \\
&\leq \pi \operatorname{sh} \pi \|f\|_\infty + \pi \frac{\operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \operatorname{ch} \pi \|f\|_\infty = \pi \frac{\operatorname{ch}(2\pi)}{\operatorname{sh} \pi} \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Comme F est paire et 2π-périodique, cette inégalité est valable pour tout réel x. Ceci montre la continuité de T.

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé } (C, \|\ \|_\infty).}$$

4° **(a)** f et F sont continues sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux et 2π-périodiques. On sait alors que f et F sont développables en série de FOURIER sur $\mathbb{R}$ et que leur série de FOURIER converge normalement sur $\mathbb{R}$. De plus, f et F sont paires et leur développement en série de FOURIER a bien la forme précisée par l'énoncé.

(b) Notons plutôt $a_n(f)$, $b_n(f)$, $a_n(F)$, $b_n(F)$ les coefficients de FOURIER de f et F respectivement. Par définition de F, $F'' - F = f$ et par linéarité des coefficients de FOURIER, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n(f) = a_n(F'') - a_n(F) = -n^2 a_n(F) - a_n(F) = -(n^2+1)a_n(F),$$

et en revenant aux notations de l'énoncé

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = -\frac{1}{n^2+1}a_n.}$$

5° **(a)** Soit $x \in [0, \pi]$. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\sin(t)\ dt - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}\pi}\int_0^\pi \operatorname{ch}(\pi-t)\sin(t)\ dt$. Une double intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\sin(t)\ dt &= [-\operatorname{sh}(x-t)\cos t]_0^x - \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\cos t\ dt\\ &= \operatorname{sh} x - \left([\operatorname{ch}(x-t)\sin t]_0^x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\sin t\ dt\right) = \operatorname{sh} x - \sin x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\sin t\ dt\end{aligned}$$

et donc

$$\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\sin(t)\ dt = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x - \sin x).$$

De même

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \operatorname{ch}(x-t)\sin(t)\ dt &= [-\operatorname{ch}(\pi-t)\cos t]_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{ch}(\pi-t)\cos t\ dt\\ &= 1 + \operatorname{ch}\pi - \left([\operatorname{sh}(\pi-t)\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{ch}(\pi-t)\sin t\ dt\right) = 1 + \operatorname{ch}\pi - \int_0^\pi \operatorname{ch}(\pi-t)\sin t\ dt,\end{aligned}$$

et donc

$$\int_0^\pi \operatorname{ch}(x-t)\sin(t)\ dt = \frac{1}{2}(1+\operatorname{ch}\pi).$$

Finalement, en tenant compte de $\dfrac{1+\operatorname{ch}\pi}{\operatorname{sh}\pi} = \dfrac{2\operatorname{ch}^2(\pi/2)}{2\operatorname{sh}(\pi/2)\operatorname{ch}(\pi/2)} = \coth\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$F(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x - \sin x) - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}\pi}\frac{1}{2}(1+\operatorname{ch}\pi) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh} x - \sin x - \coth\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ch} x\right).$$

$$\boxed{\forall x \in [0,\pi],\ F(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh} x - \sin x - \coth\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ch} x\right).}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque f est paire

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt)\sin t\ dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)\ dt.$$

Si $n = 1$, on a $a_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin(2t)\ dt = 0$ et si $n \neq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)t)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)t)}{n-1}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right) = -\frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = -\frac{4)}{\pi(4n^2-1)}$ et $a_{2n+1} = 0$ (que n soit nul ou pas). Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_{2n+1} = 0$ et $b_{2n} = -\frac{1}{(2n)^2+1}a_{2n} = \frac{4}{\pi(16n^4-1)}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = b_{2n+1} = 0 \text{ puis } a_{2n} = -\frac{4)}{\pi(4n^2-1)} \text{ et } b_{2n} = \frac{4}{\pi(16n^4-1)}.}$$

(c) Pour tout réel x de $[0, \pi]$, on a

$$F(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos(nx) = -\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{16p^4-1}\cos(2px).$$

Pour $x = 0$, on obtient

$$-\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{16p^4-1} = -\frac{1}{2}\coth\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

et donc

$$\boxed{S = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\coth\left(\frac{\pi}{2}\right).}$$

Exercice 3

1° **(a)** Le repère $(0, -\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$ est un repère orthonormé direct du plan. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons $\overrightarrow{u}_\theta = \cos\theta(-\overrightarrow{j}) + \sin\theta\,\overrightarrow{i}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\overrightarrow{OM(\theta, 0)} = a(1-\cos\theta)\cos\theta(-\overrightarrow{j}) + a(1-\cos\theta)\sin\theta(\overrightarrow{i}) = a(1-\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta.$$

$$\boxed{\text{Une équation polaire de } \gamma_0 \text{ dans le repère } (O, -\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) \text{ est } r = a(1-\cos\theta).}$$

(b) De même,

$$\overrightarrow{\Omega_t M(\theta, t)} = a(1-\cos\theta)\cos(\theta-t)(-\overrightarrow{j}) + a(1-\cos\theta)\sin(\theta-t)(\overrightarrow{i}) = a(1-\cos\theta)\overrightarrow{u}_{\theta-t}.$$

En posant $\theta' = \theta - t$, on a $\overrightarrow{\Omega_t M(\theta, t)} = a(1-\cos(\theta'+t))\overrightarrow{u}_{\theta'}$. Un couple de coordonnées polaires de $M(\theta, t)$ est donc $[a(1-\cos(\theta'+t)), \theta']$ ou encore

$$\boxed{\text{une équation polaire de } \gamma_t \text{ dans le repère } (\Omega_t, -\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) \text{ est } r = a(1-\cos(\theta+t)).}$$

Soit r_t la rotation de centre Ω_t et d'angle $-t$ et T_t la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega_t}$.

$$M(\theta, t) = \Omega_t + a(1-\cos\theta)\overrightarrow{u}_{\theta-t} = r_t(\Omega_t + a(1-\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta) = r_t(T_t(O + a(1-\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta)) = r_t \circ T_t(M(\theta, 0)).$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\gamma_t \text{ est l'image de } \gamma_0 \text{ par } r_t \circ T_t \text{ où } T_t \text{ est la translation de vecteur } \overrightarrow{O\Omega_t} \text{ et } r_t \text{ est la rotation} \\ \text{de centre } \Omega_t \text{ et d'angle } -t.\end{array}}$$

2° **(a)** Pour tout réel t, $P(t) = O + h(t)\overrightarrow{i} - a(1-\cos t)\overrightarrow{j}$ et donc pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\overrightarrow{dP}}{dt}(\alpha) = h'(\alpha)\overrightarrow{i} - a\sin\alpha\,\overrightarrow{j}.$$

De même, pour $(\theta, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\theta}(\theta, t) = [a\sin\theta\sin(\theta-t) + a(1-\cos\theta)\cos(\theta-t)]\,\overrightarrow{i} - [a\sin\theta\cos(\theta-t) - a(1-\cos\theta)\sin(\theta-t)]\,\overrightarrow{j},$$

et donc pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \theta}(\alpha, \alpha) = a(1-\cos\alpha)\overrightarrow{i} - a\sin\alpha\overrightarrow{j}.$$

Par suite

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \frac{\overrightarrow{dP}}{dt}(\alpha) = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \theta}(\alpha, \alpha) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R},\ h'(\alpha) = a(1-\cos\alpha) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R},\ h(\alpha) = a(\alpha - \sin\alpha) + h(0)$$
$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R},\ h(\alpha) = a(\alpha - \sin\alpha).$$

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ h(\alpha) = a(\alpha - \sin\alpha).}$$

Dans ce cas, pour tout réel $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\frac{\overrightarrow{dP}}{dt}(\alpha) \neq \overrightarrow{0}$ et $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \theta}(\alpha, \alpha) \neq \overrightarrow{0}$ et de plus la tangente à la courbe Γ en $P(\alpha) = M(\alpha, \alpha)$ est encore la tangente à la courbe γ_α au point $M(\alpha, \alpha) = P(\alpha)$.

(b) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\overrightarrow{dP}}{dt}(\alpha) = a(1-\cos\alpha)\overrightarrow{i} - a\sin\alpha\overrightarrow{j}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{dQ}}{d\theta}(\alpha) &= \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \theta}(\alpha, 0) = [a\sin\alpha\sin\alpha + a(1-\cos\alpha)\cos\alpha]\overrightarrow{i} - [a\sin\alpha\cos\alpha - a(1-\cos\alpha)\sin\alpha]\overrightarrow{j} \\ &= a(1-\cos\alpha)\left(\cos\alpha\overrightarrow{i} + \sin\alpha\overrightarrow{j}\right) - a\sin\alpha\left(-\sin\alpha\overrightarrow{i} + \cos\alpha\overrightarrow{j}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{\overrightarrow{dQ}}{d\theta}(\alpha)$ est l'image de $\frac{\overrightarrow{dP}}{dt}(\alpha)$ par la rotation d'angle α. Ces deux vecteurs sont donc simultanément nuls ou pas. De plus, la tangente à Γ en $P(\alpha)$ se déduit de la tangente à γ_0 en $Q(\alpha)$ par translation de vecteur $\overrightarrow{P(\alpha)Q(\alpha)}$ puis par rotation de centre $Q(\alpha)$ et d'angle α.

3° **(a)** Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons $r(\theta) = a(1-\cos\theta)$.

$$\frac{d\sigma}{d\theta}(\theta) = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} = a\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = a\sqrt{2 - 2\cos\theta} = a\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = 2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons $\left\{\begin{array}{l} x(\theta) = a(\theta - \sin\theta) \\ y(\theta) = a(1-\cos\theta) \end{array}\right.$.

$$\frac{ds}{d\theta}(\theta) = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} = a\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = 2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \frac{d\sigma}{d\theta}(\theta) = \frac{ds}{d\theta}(\theta) = 2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|.}$$

(b) Les longueur des sous-arcs respectifs de γ_0 et Γ est donc la même. On la note L.

$$L = \int_0^{2\pi} 2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\ d\theta = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\ d\theta = 4a\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a.$$

$$\boxed{L = 8a.}$$

(c) Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, $p\theta)$ est un point régulier et on a

$$\frac{\overrightarrow{dP}}{d\theta}(\theta) = a(1-\cos\theta)\overrightarrow{i} - a\sin\theta\overrightarrow{j} = 2a\sin\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} - \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j}) = \frac{d\sigma}{d\theta}(\theta)(\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} - \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j}),$$

et donc $\overrightarrow{T} = \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} - \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j}$ puis $\overrightarrow{N} = r_{\pi/2}(\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} - \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j}) = \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} + \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j}$.

$$\boxed{\forall \theta \in]0, 2\pi[,\ \overrightarrow{T} = \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} - \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j} \text{ et } \overrightarrow{N} = \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} + \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j}.}$$

Soit α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T})$. Puisque

$$\overrightarrow{T} = \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} - \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j} = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{i} + \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{j},$$

on peut prendre $\alpha = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$. On sait alors que

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta} = \frac{2a\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}} = 4a\sin\frac{\theta}{2}.$$

$$\boxed{\forall \theta \in]0, 2\pi[,\ R = 4a\sin\frac{\theta}{2}.}$$

(d) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC(\theta)} &= \overrightarrow{OP(\theta)} + R\overrightarrow{N} \\
&= a(\theta - \sin\theta)\overrightarrow{i} - a(1 - \cos\theta)\overrightarrow{j} + 4a\sin\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{i} + \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{j}) \\
&= a(\theta - \sin\theta)\overrightarrow{i} - a(1 - \cos\theta)\overrightarrow{j} + 2a(\sin\theta\,\overrightarrow{i} + (1 - \cos\theta)\overrightarrow{j}) \\
&= a(\theta + \sin\theta)\overrightarrow{i} + a(1 - \cos\theta)\overrightarrow{j}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } C(\theta) \text{ dans le repère } (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \text{ sont } (a(\theta + \sin\theta), a(1 - \cos\theta).}$$

(e) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
C(\theta + \pi) &= a(\theta + \pi - \sin\theta)\overrightarrow{i} + a(1 + \cos\theta)\overrightarrow{j} \\
&= a(\theta - \sin\theta)\overrightarrow{i} - a(1 - \cos\theta)\overrightarrow{j} + a\pi\overrightarrow{i} + 2a\overrightarrow{j} \\
&= P(\theta + \overrightarrow{u}) \text{ où } \overrightarrow{u} = a\pi\overrightarrow{i} + 2a\overrightarrow{j}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\boxed{\Gamma_1 \text{ est l'image de } \Gamma \text{ par la translation de vecteur } a\pi\overrightarrow{i} + 2a\overrightarrow{j}.}$$

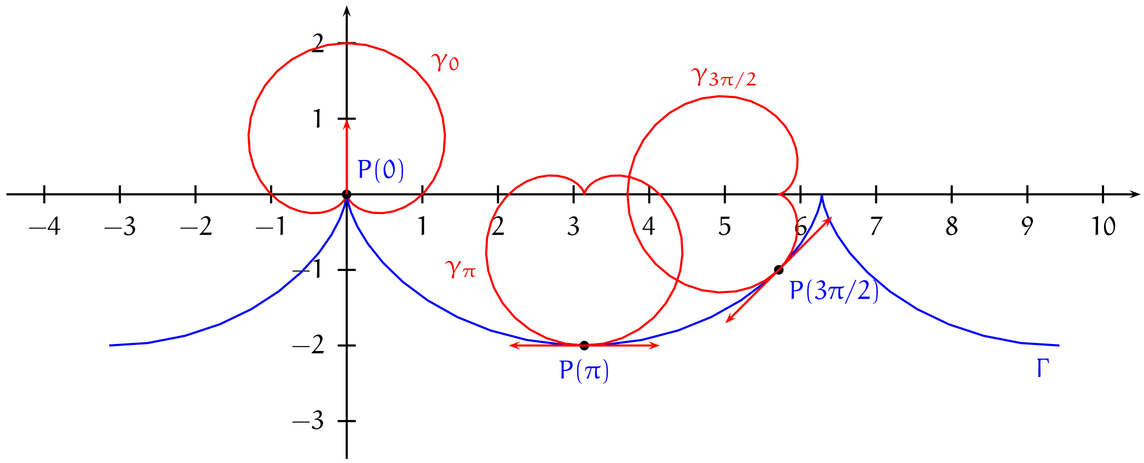
4° **(a)** • Pour tout réel θ, $P(\theta + 2\pi) = (a(\theta + 2\pi - \sin\theta), -a(1 - \cos\theta)) = P(\theta) + 2\pi\overrightarrow{i} = t_{2\pi\overrightarrow{i}}(P(\theta)$. Γ est invariant par la translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{i}$.
• Pour tout réel θ, $P(-\theta) = (-a(\theta - \sin\theta), -a(1 - \cos\theta)) = s_{(Oy)}(P(\theta)$. Γ est invariant par la réflexion d'axe (Oy) et plus généralement par toute réflexion d'axe la droite d'équation $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Quand θ tend vers 0,

$$P(\theta) = a\begin{pmatrix} \theta - \sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \frac{\theta^3}{6} + o(\theta^3) \\ \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2) \end{pmatrix} = \frac{a\theta^2}{2}\overrightarrow{j} + \frac{a\theta^3}{6}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{o(t^3)}.$$

Donc la tangente en le point singulier $P(0)$ est dirigée par $\overrightarrow{j}$ et de plus, le point $P(0)$ est un rebroussement de première espèce.

(c) Le graphique est fait dans le cas $a = 1$.



On a fait rouler sans glisser une cardïoide sur une cycloïde.

