

Epreuve de Mathématiques 2 MP

Exercice 1

1°. Soit u un endomorphisme de E . On sait que $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une algèbre. Par suite, u^+ est un endomorphisme de E . Soit h un élément de G . Vérifions que $u^+ \circ h = h \circ u^+$ ou encore que $h^{-1} \circ u^+ \circ h = u^+$.

$$h^{-1} \circ u^+ \circ h = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} h^{-1} g^{-1} u g h = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} (gh)^{-1} u (gh).$$

Considérons alors l'application $\varphi_h : G \rightarrow G$.

$$g \mapsto gh$$

- φ est bien une application de G dans G , car G est stable pour la loi \circ .
- φ est injective. En effet, dans un groupe tout élément est simplifiable et l'égalité $g \circ h = g' \circ h$ implique l'égalité $g = g'$.

φ est donc une application injective de l'ensemble fini G dans lui-même. D'après un résultat classique de théorie des ensembles, on sait que φ est une permutation de G . Donc,

$$h^{-1} \circ u^+ \circ h = \frac{1}{m} \sum_{g' \in G} g'^{-1} u g' = u^+.$$

Finalement,

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall g \in G, g \circ u^+ = u^+ \circ g.$$

2°.

$$\begin{aligned} (u^+)^+ &= \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u^+ g = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} u^+ \quad (\text{d'après 1}^\circ.) \\ &= \frac{1}{m} \cdot (m u^+) = u^+ \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), (u^+)^+ = u^+.$$

3°. On sait que la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$, vérifiant de plus pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\text{Tr}(f \circ g) = \text{Tr}(g \circ f)$. En particulier, si f est un endomorphisme de E et si g est un automorphisme de E ,

$$\text{Tr}(g^{-1} \circ f \circ g) = \text{Tr}(f \circ g \circ g^{-1}) = \text{Tr}(f).$$

Donc,

$$\text{Tr}(u^+) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \text{Tr}(g^{-1} u g) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \text{Tr}(u) = \frac{1}{m} \times m \text{Tr}(u) = \text{Tr}(u).$$

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \text{Tr}(u^+) = \text{Tr}(u).$$

4°. Soit x un élément de F . Pour tout élément g de G , $g(x) \in F$. Donc, puisque p est un projecteur d'image F ,

$$p(g(x)) = g(x), \text{ puis } g^{-1}(p(g(x))) = g^{-1}(g(x)) = x.$$

Par suite,

$$p^+(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1}(p(g(x))) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} x = x.$$

Puisque x est invariant par p^+ , x est en particulier dans l'image de p^+ ($x = p^+(x)$). On a montré que

$$F \subset \text{Im}(p^+).$$

5°. Soit x un élément de E . Soient g et h deux éléments de G (de sorte que $h^{-1} \in G$).

$$\begin{aligned} p(h(x)) \in F &\Rightarrow g(h^{-1}(p(h(x)))) \in F \\ &\Rightarrow p(g(h^{-1}(p(h(x)))))) = g(h^{-1}(p(h(x)))) \\ &\Rightarrow g^{-1}(p(g(h^{-1}(p(h(x)))))) = g^{-1}(g(h^{-1}(p(h(x)))))) = h^{-1}(p(h(x))) \end{aligned}$$

Cette égalité étant valable pour tout élément x de E , on a donc

$$\forall (g, h) \in G^2, g^{-1}pgh^{-1}ph = h^{-1}ph.$$

6°.

$$\begin{aligned} (p^+)^2 &= \frac{1}{m^2} \sum_{(g,h) \in G^2} g^{-1}pgh^{-1}ph = \frac{1}{m^2} \sum_{(g,h) \in G^2} h^{-1}ph \quad (\text{d'après } 5^\circ.) \\ &= \frac{1}{m^2} \cdot m \sum_{h \in G} h^{-1}ph = \frac{1}{m} \sum_{h \in G} h^{-1}ph = p^+ \end{aligned}$$

Donc,

$$p^+ \text{ est un projecteur.}$$

7°. On a vu au 6°. que p^+ est un projecteur. En 4°, on a démontré que $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(p^+)$. Enfin, puisque p et p^+ sont des projecteurs, d'après 3°,

$$\dim(\text{Im}(p^+)) = \text{Tr}(p^+) = \text{Tr}(p) = \dim(\text{Im}(p)) (< +\infty).$$

Donc, $\text{Im}(p^+) = \text{Im}(p)$. On a montré que

$$p \text{ et } p^+ \text{ sont des projecteurs ayant mêmes images.}$$

8°. Puisque p^+ est un projecteur d'image F , son noyau est un supplémentaire de F . Vérifions que ce noyau est stable par tous les éléments de G .

Soient g un élément de G et x un élément de $\text{Ker}(p^+)$. Montrons que $g(x)$ est encore dans $\text{Ker}(p^+)$. Mais, d'après 1°, p^+ commute avec tous les éléments de G et donc

$$p^+(g(x)) = g(p^+(x)) = g(0) = 0.$$

On a ainsi montré que

$$\text{Ker}(p^+) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ stable par tous les éléments de } G.$$

9°. Soit F un sous-espace de E stable par tous les éléments de G . Soit p un projecteur d'image F . D'après 8°, $F' = \text{Ker}(p^+)$ est un supplémentaire de F stable pour tous les éléments de G .

Exercice 2

1°. Soit (u, v) un couple de réels tels que $0 < \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$|u \pm v| = |u \times 1 \pm v \times 1| \leq \sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{1^2 + 1^2} = \rho\sqrt{2}.$$

$$|u + v| \leq \rho\sqrt{2} \text{ et } |u - v| \leq \rho\sqrt{2}.$$

2°. Soit (u, v) un couple de réels tels que $0 < \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1$.

$\frac{1}{2}D(u, v)$ est le carré de la distance du point (u, v) au point $(-1, -1)$. (u, v) étant un point du disque de centre O et rayon 1, il est clair géométriquement que cette distance est minimum quand (u, v) est le point $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Par suite,

$$D(u, v) \geq D(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2(\sqrt{2} - 1)^2 = 2(3 - 2\sqrt{2}).$$

Par suite,

$$3D(u, v) \geq 6(3 - 2\sqrt{2}) \geq 6(3 - 2 \times 1,4) = 1,2 > 1.$$

3°. Classiquement, pour tous réels u et v , $|2uv| \leq u^2 + v^2$ ($(|u| - |v|)^2 \geq 0$ fournit $u^2 + v^2 - |2uv| \geq 0$ puis $|2uv| \leq u^2 + v^2$). Par suite, si (u, v) est un couple de réels tel que $0 < \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1$,

$$\begin{aligned} |N(u, v)| &\leq |u^2 - v^2|(u^2 + v^2) + 2|2uv||u - v| \\ &\leq (u^2 + v^2)^2 + 2(u^2 + v^2)|u - v| \\ &\leq \rho^4 + 2\rho^2\sqrt{2}\rho \quad (\text{d'après 1.}) \\ &= 2\rho^3\sqrt{2} + \rho^4. \end{aligned}$$

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, (0 < \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1 \Rightarrow |N(u, v)| \leq 2\rho^3\sqrt{2} + \rho^4.)$$

4°. Soit (u, v) un couple de réels tel que $0 < \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1$. Dans ce cas, $(u + 1)^2 + (v + 1)^2 \neq 0$ et $f(1 + u, 1 + v)$ et $g(u, v)$ sont définis.

$$\begin{aligned} g(u, v) &= \frac{(u + 1)^2 - (v + 1)^2}{(u + 1)^2 + (v + 1)^2} - (u - v) - \frac{v^2 - u^2}{2} \\ &= \frac{2((u + 1)^2 - (v + 1)^2) + (-2(u - v) + (u^2 - v^2))((u + 1)^2 + (v + 1)^2)}{D((u, v))} \\ &= \frac{2(u - v)(u + v + 2) + (-2(u - v) + (u^2 - v^2))(u^2 + v^2 + 2(u + v + 1))}{D((u, v))} \\ &= \frac{(u^2 - v^2)(u^2 + v^2) + 2(u - v)(u + v + 2 - (u^2 + v^2 + 2(u + v + 1)))}{D((u, v))} \\ &\quad + \frac{2(u^2 - v^2)(u + v + 1)}{D((u, v))} \\ &= \frac{(u^2 - v^2)(u^2 + v^2) + 2(u - v)(-u^2 - v^2 - u - v + (u + v)(u + v + 1))}{D((u, v))} \\ &= \frac{(u^2 - v^2)(u^2 + v^2) + 2(u - v)(2uv)}{D((u, v))} = \frac{N((u, v))}{D((u, v))} \end{aligned}$$

Par suite, d'après 2°. et 3°.,

$$\begin{aligned} \frac{|g(u, v)|}{\rho^3} &= \frac{|N((u, v))|}{\rho^3 |D((u, v))|} \\ &\leq \frac{2\rho^3\sqrt{2} + \rho^4}{\frac{1}{3}\rho^3} = 3(2\sqrt{2} + \rho) \leq 3(2\sqrt{2} + 1) \leq 12 \end{aligned}$$

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, (0 < \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{|g(u, v)|}{\rho^3} \leq 12.)$$

5°. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en vertu de théorèmes généraux.

Soit (x, y) un couple de réels distinct de $(0, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

et de même,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

6°. Soit (x, y) un couple de réels distinct de $(0, 0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 4y^2 \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} + x \frac{-4x}{(x^2 + y^2)^3} \right) = \frac{4y^2(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3},$$

et de même,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-4x^2(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Enfin,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4x \left(2y \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} + y^2 \frac{-4y}{(x^2 + y^2)^3} \right) = \frac{8xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{4y^2(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-4x^2(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{8xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

7°. D'après 5°. et 6°, on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1, \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = 0.$$

La formule de TAYLOR-YOUNG à l'ordre 2 en $(1, 1)$ appliquée à f fournit, quand le couple (u, v) tend vers le couple $(0, 0)$,

$$\begin{aligned} f((1 + u, 1 + v)) &= f((1, 1)) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)u + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)v \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1)u^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1)uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1)v^2 \right) + o(\|(u, v)\|_2^2) \\ &= (u - v) + \frac{v^2 - u^2}{2} + o(\|(u, v)\|_2^2), \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore,

$$g((u, v)) = o(\rho^2).$$

Or, en 4°, nous avons établi directement que, quand le couple (u, v) tend vers le couple $(0, 0)$,

$$g((u, v)) = O(\rho^3),$$

et donc, nous avons déterminé directement le développement limité de f à l'ordre 2 au point $(1, 1)$.

8°. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et on sait que la surface (S) d'équation $z = f(x, y)$ est régulière. (S) admet en tout point $M(x, y, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2})$, $(x, y) \neq (0, 0)$ un plan tangent dont la normale est dirigée par le vecteur :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'angle (non orienté) que fait ce plan tangent avec le plan (Oxy) d'équation $z = 0$ est encore l'angle non orienté que font entre eux les vecteurs normaux \vec{n} et \vec{k} . Par définition,

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\|\vec{n} \wedge \vec{k}\|}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}.$$

Or,

$$\vec{n} \wedge \vec{k} = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} (x \vec{i} + y \vec{j})$$

et donc,

$$\|\vec{n} \wedge \vec{k}\| = \frac{4|xy|}{(x^2 + y^2)^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4|xy|}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

En tenant compte de $|\vec{n} \cdot \vec{k}| = 1$, on a montré que

$$\tan \theta = \frac{4|xy|}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

9°. Pour tout couple (x, y) distinct du couple $(0, 0)$, $f(\pm x, \pm y) = f(x, y)$. Ceci signifie que la surface (S) admet les plans (xOz) et (yOz) pour plans de symétrie et donc l'axe (Oz) pour axe de symétrie.

Faisons alors varier le point $(x, y, 0)$ sur une demi-droite d'origine $(0, 0, 0)$, privée de $(0, 0, 0)$ et d'angle polaire $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ dans le plan (xOy) (α car la lettre θ est déjà utilisée par l'énoncé).

Le point $(x, y, 0)$ admet pour coordonnées cylindriques $(r \cos \alpha, r \sin \alpha, 0)$ où α est un réel fixé de $]0, \frac{\pi}{2}[$ et r décrit $]0, +\infty[$.

En ce point,

$$\tan \theta = \frac{4r \cos \alpha r \sin \alpha}{(r^2)^{3/2}} = \frac{2 \sin(2\alpha)}{r}.$$

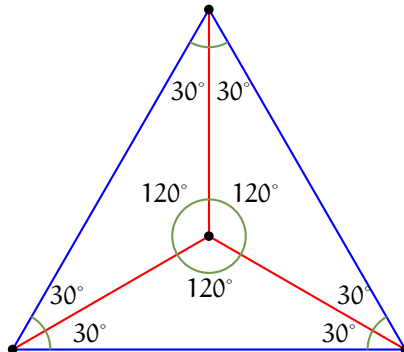
Ainsi, quand r croît de 0 à $+\infty$, $\tan \theta$ décroît de $+\infty$ à 0 ou encore θ décroît de $\frac{\pi}{2}$ à 0 .

Quand le point $(x, y, 0)$ décrit une demi-droite du plan d'équation $z = 0$ d'origine $(0, 0, 0)$, le plan tangent à la surface (S) en le point $(x, y, f(x, y))$ part d'une position presque verticale et s'affaisse jusqu'à tendre vers une position horizontale.

Dans le cas particulier où $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan \theta = 0$ pour tout $r \in]0, +\infty[$.

Exercice 3

1°. Soit ABC un triangle équilatéral de centre O . Ce triangle est la réunion des trois triangles OBC , OCA , et OAB . Chacun de ces trois triangles est pseudo-rectangle, car admet pour angles 30° , 30° et $120^\circ = 30^\circ + 90^\circ$.



2°. (Voir figure page suivante) Posons $\widehat{C} = \alpha$. Au vu de $\widehat{B} = \widehat{C} + \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$, α est élément de $]0, \frac{\pi}{4}[$ et on a

$$\widehat{A} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha, \widehat{B} = \alpha + \frac{\pi}{2} \text{ et } \widehat{C} = \alpha.$$

Notons I le milieu du segment $[BB']$.

L'angle \widehat{BAB}' est le complémentaire de l'angle \widehat{CAB} et vaut donc

$$\widehat{BAB}' = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = 2\alpha.$$

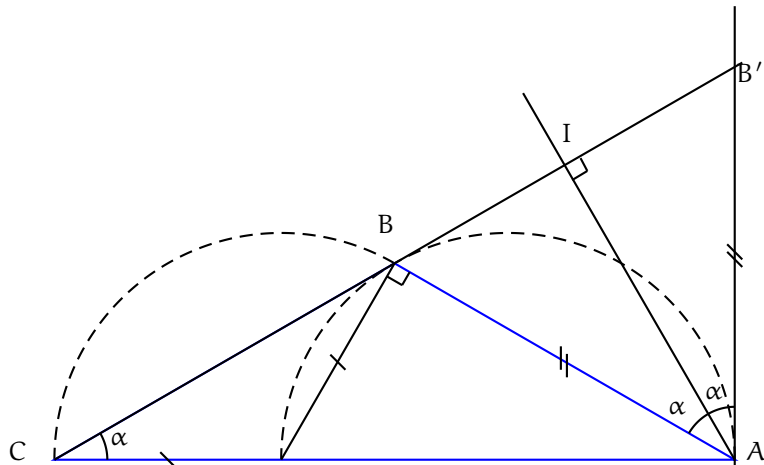
L'angle $\widehat{AB'B}$ est le complémentaire de l'angle \widehat{BCA} et vaut donc

$$\widehat{AB'B} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

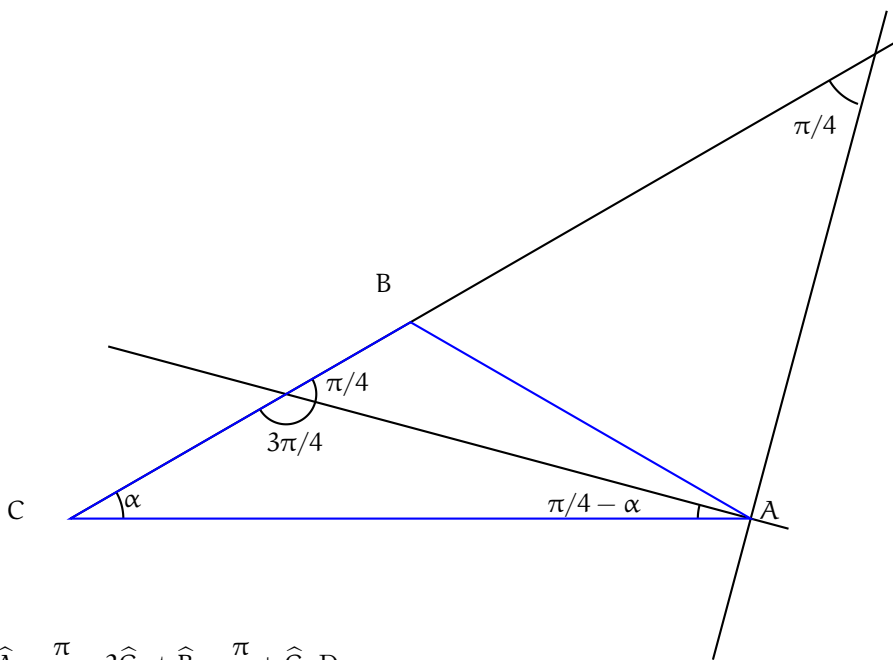
L'angle \widehat{ABB}' vaut alors

$$\widehat{ABB}' = \pi - 2\alpha - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha = \widehat{AB'B}.$$

Le triangle BAB' est donc isocèle en A . La droite (AI) est ainsi la médiatrice du segment $[BB']$. Par suite, le milieu I du segment $[BB']$ est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) ou encore le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC .



3°. La bissectrice intérieure de l'angle en A du triangle ABC fait, avec la droite (AC) un angle (non orienté) de $\frac{1}{2}\widehat{CAB} = \frac{\pi}{4} - \alpha$ et donc, puisque l'angle \widehat{ACB} vaut α , fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec la droite (BC) . Il en est de même de la bissectrice extérieure de l'angle en A du triangle ABC , puisque celle-ci est perpendiculaire à la bissectrice intérieure. /noindent Les deux bissectrices de l'angle en A du triangle ABC coupent la droite (BC) à 45° .



4°. On a déjà $\widehat{A} = \frac{\pi}{2} - 2\widehat{C}$ et $\widehat{B} = \frac{\pi}{2} + \widehat{C}$. Donc,

$$\widehat{B} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2} \text{ et } \widehat{C} = \frac{\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Ensuite, d'après la loi des sinus, (puisque $\pi - \widehat{B} = \frac{\pi}{4} + \frac{\widehat{A}}{2}$),

$$a = 2R \sin(\widehat{A}), \quad b = 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\widehat{A}}{2}\right) \text{ et } c = 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2}\right).$$

Enfin,

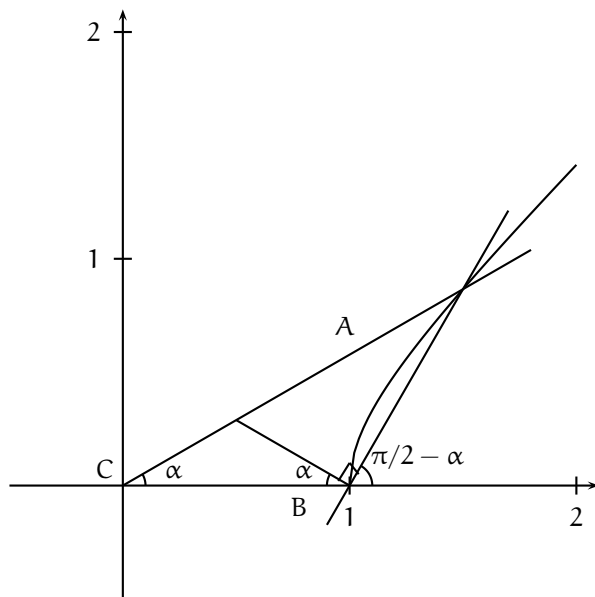
$$S = \frac{1}{2}bc \sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}2R \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\widehat{A}}{2}\right)2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2}\right) \sin(\widehat{A}) = 2R^2 \frac{1}{2}(\cos(\widehat{A}) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)) \sin(\widehat{A}) = \frac{R^2 \sin(2\widehat{A})}{2}$$

et donc,

$$S = \frac{R^2 \sin(2\hat{A})}{2}.$$

5°. On note toujours $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$ l'angle \hat{C} .

On se place dans un repère orthonormé direct d'origine C tel que le point B ait pour coordonnées (1,0). Le point A est alors l'intersection de la droite passant par C et d'angle polaire α et de la droite passant par B et d'angle polaire $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (puisque $\hat{B} = \frac{\pi}{2} + \alpha$). Ceci fournit une construction du point A à partir des points B et C et de l'angle \hat{C} .



Déterminons les coordonnées (x, y) de A. Le point A est l'intersection des droites d'équations respectives

$$y = x \tan \alpha$$

et

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)(x - 1) = \frac{1}{\tan \alpha}(x - 1).$$

Or,

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x \tan \alpha \\ y = \frac{1}{\tan \alpha}(x - 1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \tan \alpha \\ x \tan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \tan \alpha \\ x = \frac{1}{1 - \tan^2 \alpha} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ x = \frac{1}{1 - \tan^2 \alpha} \end{cases}. \end{aligned}$$

Quand α décrit $]0, \frac{\pi}{4}[$, le point A décrit le support de l'arc paramétré

$$\begin{cases} x = \frac{1}{1 - \tan^2 \alpha} \\ y = \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{cases}, \quad \alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[\quad (1).$$

Quand α décrit $]0, \frac{\pi}{4}[$, x décrit $]1, +\infty[$ en décroissant strictement et y décrit $]0, +\infty[$. Donc,

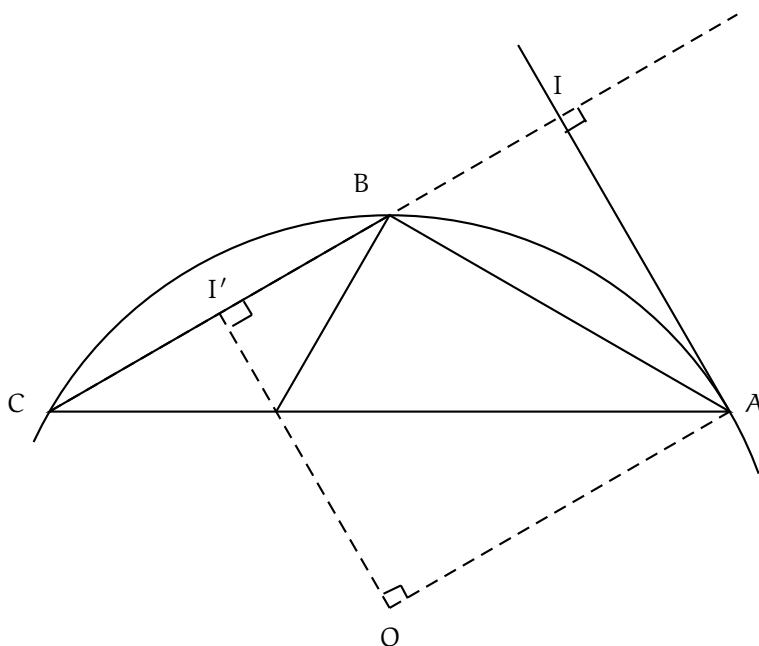
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{y}{x} \\ y = \frac{x}{1 - (y^2/x^2)}, \end{cases} \quad , \quad x > 1, \quad y > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad x > 1, \quad y > 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x, \quad x > 1, \quad y > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - y^2 = \frac{1}{4}, \quad x > 1, \quad y > 0.$$

Quand α décrit $]0, \frac{\pi}{4}[$, le point A décrit une demi-branche d'hyperbole de centre le milieu du segment [BC].

6°. Notons O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et I' le milieu du segment [BC].



La droite (AI) est perpendiculaire à la droite (BC) de même que la droite (OI') (puisque la droite (OI') est la médiatrice du segment [BC]). Le quadrilatère OI'IA est donc un trapèze rectangle. Maintenant, puisque I' est le milieu du segment [BC] et puisque I est le milieu du segment [BB'],

$$OI' = \frac{1}{2}B'C = \frac{1}{2} \frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{b}{2 \cos \alpha} = \frac{2R \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{2 \cos \alpha} = R = OA.$$

Donc, le quadrilatère OI'IA est un rectangle et, en particulier, la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (OA). La tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC est donc la droite (AI).

7°. On sait déjà que la droite (AI) est une hauteur du triangle ABC et l'orthocentre H du triangle ABC est sur la droite (AI).

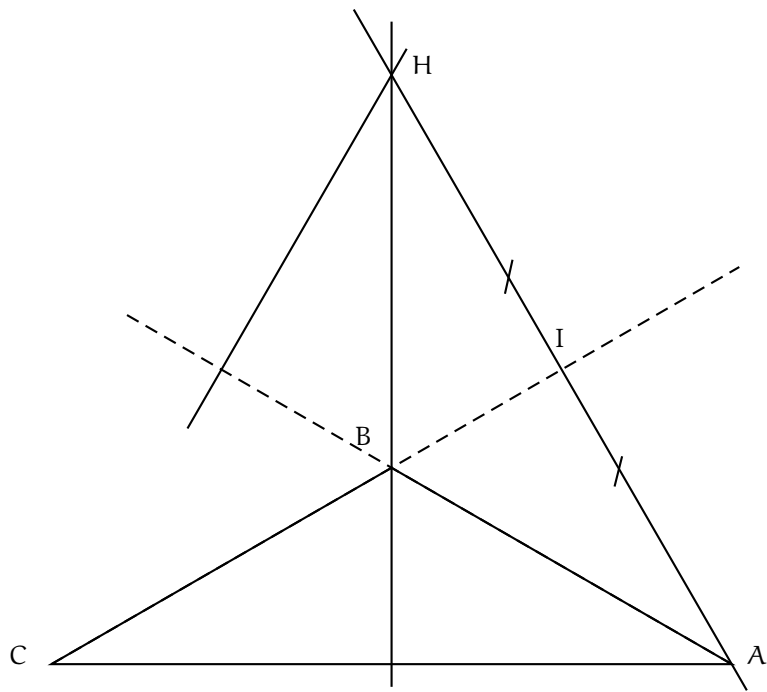
Plus précisément, considérons le triangle ABH. L'angle \widehat{BAH} est l'angle \widehat{BAI} et vaut donc α . Donc,

$$\widehat{BAH} = \alpha.$$

D'autre part, les droites (BH) et (AB') sont parallèles, car toutes deux perpendiculaires à la droite (AC). On en déduit que les angles alternes-internes \widehat{BHI} et $\widehat{AIB'}$ sont égaux. Donc,

$$\widehat{BHI} = \alpha.$$

Ainsi, le triangle ABH est isocèle en B et l'orthocentre H du triangle ABC est le symétrique du point A par rapport au point I.



8°. Soit ABC un triangle.

– Supposons le triangle ABC soit tel que $\widehat{B} = \widehat{C} + \frac{\pi}{2}$.

On a vu au 4°. que

$$a = 2R \sin \widehat{A},$$

mais aussi que

$$ah = 2S = 2R^2 \sin \widehat{A} \cos \widehat{A}.$$

En comparant ces deux égalités, on obtient

$$2Rh \sin \widehat{A} = 2R^2 \sin \widehat{A} \cos \widehat{A}$$

et donc

$$h = R \cos \widehat{A}.$$

– Réciproquement, supposons que le triangle ABC soit tel que $h = R \cos \widehat{A}$. On a alors :

$$\begin{aligned} h = R \cos \widehat{A} &\Leftrightarrow \frac{ah}{2} = \frac{aR \cos \widehat{A}}{2} \Leftrightarrow S = R^2 \sin \widehat{A} \cos \widehat{A} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A} = R^2 \sin \widehat{A} \cos \widehat{A} \\ &\Leftrightarrow 2R^2 \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} = R^2 \cos(\pi - \widehat{B} - \widehat{C}) \\ &\Leftrightarrow 2 \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} + \cos(\widehat{B} + \widehat{C}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} + \cos \widehat{B} \cos \widehat{C} - \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos \widehat{B} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} = 0 \Leftrightarrow \cos(\widehat{C} - \widehat{B}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \widehat{C} - \widehat{B} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \widehat{B} - \widehat{C} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Le triangle ABC est donc bien pseudo-rectangle.

Une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit pseudo-rectangle est que $h = R \cos \widehat{A}$.