SESSION 2001

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 3 MP

Partie I

1°. (a) Soit $f \in E_0$. f est continue sur $[a, b]$ et admet donc des primitives sur $[a, b]$. Soit F la primitive de f qui s'annule en a. Les primitives de f sur $[a, b]$ sont les fonctions de la forme $F + C$, $C \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b (F(x) + C)\, dx = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)\, dx.$$

Ceci assure l'existence et l'unicité de la primitive $L(f)$ de f sur $[a, b]$ dont l'intégrale sur $[a, b]$ est nulle. De plus, $L(f)$ est continue sur $[a, b]$. Ainsi, L est une application de E_0 dans lui-même.

Soient $(f, g) \in E_0^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. $\lambda L(f) + \mu L(g)$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur $[a, b]$ par linéarité de la dérivation et $\displaystyle\int_a^b (\lambda L(f) + \mu L(g))(x)\, dx = 0$ par linéarité de l'intégrale. Donc $\lambda L(f) + \mu L(g) = L(\lambda f + \mu g)$.

On a montré que

$$\boxed{L \in \mathscr{L}(E_0).}$$

(b) Soit $f \in E_0$.

$$f \in \mathrm{Ker}(L) \Rightarrow L(f) = 0 \Rightarrow (L(f))' = 0 \Rightarrow f = 0.$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(L) = \{0\}.}$$

(c) Si $f \in E_1 \subset E_0$, $L(f)$ est de classe C^1 sur $[a, b]$ en tant que primitive d'une fonction continue sur $[a, b]$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(L_{/E_1}) \subset E_1$. $L_{/E_1}$ est donc un endomorphisme injectif de E_1. Maintenant la fonction $x \mapsto 1$ est un élément de E_1 qui n'a pas d'antécédent par $L_{/E_1}$ car $\displaystyle\int_a^b 1\, dx = b - a \neq 0$. Par suite, $\mathrm{Im}(L_{/E_1}) \underset{\neq}{\subset} E_1$.

$$\boxed{L_{/E_1} \text{ n'est pas un automorphisme de } E_1.}$$

2°. (a) Soit $f \in E_0$. Pour $t \in [a, b]$, posons $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(u)\, du$. D'après 1°a), pour $t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned}
L(f)(t) &= F(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)\, dx \\
&= \int_a^t f(u)\, du - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^x f(u)\, du\right) dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^t f(u)\, du\right) dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^x f(u)\, du\right) dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^t f(u)\, du - \int_a^x f(u)\, du\right) dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_x^t f(u)\, du\right) dx.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in [a, b],\ L(f)(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_x^t f(u)\, du\right) dx.}$$

(b) Soit $f \in E_0$. $L(f)$ est continue sur le segment $[a, b]$ et admet donc un minimum et un maximum sur ce segment. Par suite,

$$\boxed{\exists (x_i, x_s) \in [a, b]^2 / \ \forall t \in [a, b],\ L(f)(x_i) \leq L(f)(t) \leq L(f)(x_s).}$$

(c) Soit $x \in [a, b]$. $\displaystyle\int_a^b |x - t|\ dt$ est la somme des aires de deux moitiés de carrés de côtés respectifs $|x - a|$ et $|x - b|$. Donc

$$\int_a^b |x - t|\ dt = \frac{(x-a)^2}{2} + \frac{(x-b)^2}{2} = x^2 - (a+b)x + \frac{a^2 + b^2}{2} = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Cette dernière expression atteint son maximum en a ou en b et ce maximum est égal à $\dfrac{(b-a)^2}{2}$.

$$\boxed{\sup \left\{ \int_a^b |x - t|\ dt,\ x \in [a, b] \right\} = \frac{(b-a)^2}{2}.}$$

Soit $t \in [a, b]$.

$$\begin{aligned}
|L(f)(t)| &= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_x^t f(u)\ du \right)\ dx \right| \\
&\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| \int_x^t f(u)\ du \right|\ dx = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^t \left| \int_x^t f(u)\ du \right|\ dx + \int_t^b \left| \int_x^t f(u)\ du \right|\ dx \right) \\
&\leq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^t \left(\int_x^t |f(u)|\ du \right)\ dx + \int_t^b \left(\int_t^x |f(u)|\ du \right)\ dx \right) \\
&\leq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^t \left(\int_x^t du \right)\ dx + \int_t^b \left(\int_t^x du \right)\ dx \right) \|f\| = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^t |x-t|\ dx + \int_t^b |x-t|\ dx \right) \|f\| \\
&= \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b |x-t|\ dx \right) \|f\| \leq \frac{1}{b-a} \times \frac{(b-a)^2}{2} \|f\| = \frac{b-a}{2} \|f\|.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{b-a}{2}\|f\|$ est un majorant de la fonction $|L(f)|$ sur $[a, b]$ et puisque $\|L(f)\|$ est le plus petit de ces majorants, on en déduit que $\|L(f)\| \leq \dfrac{b-a}{2}\|f\|$.

$$\boxed{\forall f \in E_0,\ \|L(f)\| \leq \frac{b-a}{2}\|f\|.}$$

Puisque L est linéaire, on sait alors qu'une telle inégalité montre que

$$\boxed{L \text{ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé } (E_0, \|\ \|).}$$

(d) Pour $f \in E_0$ telle que $\|f\| \leq 1$, on a $\|L(f)\| \leq \dfrac{b-a}{2}$ et donc $|||L||| \leq \dfrac{b-a}{2}$. Mais d'autre part, puisque $\|P_0\| = 1$, $|||L||| \geq \|L(P_0)\|$. Or, pour $t \in [a, b]$, $L(P_0)(t) = x - \dfrac{a+b}{2}$ (en revenant à la définition de $L(P_0)$ et sans utiliser l'expression de 2°a)) et donc

$$\|L(P_0)\| = |L(P_0)(a)| = |L(P_0)(b)| = \frac{b-a}{2}.$$

On a montré que

$$\boxed{|||L||| = \frac{b-a}{2}.}$$

Partie II

1°. (a) Puisque $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$, E_1 et E_2 ne sont ni vides ni réduits à $\{0\}$.

(b) F_1 et F_2 sont des sous-ensembles non vides de E_0. Soient alors $(f,g) \in F_1^2$ (resp. F_2) et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour $t \in [a,b]$,

$$(\lambda f + \mu g)(a+b-t) = -(\lambda f + \mu g)(t) \text{ (resp. } (\lambda f + \mu g)(t)\text{)},$$

et donc $\lambda f + \mu g \in F_1$ (resp. F_2).

$$\boxed{F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } E_0.}$$

Soit maintenant $f \in F_1$ ou F_2. Pour $t \in [a,b]$, on a

$$\begin{aligned} L(f)(a+b-t) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_x^{a+b-t} f(u)\,du\right)\,dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_{a+b-x}^{t} f(a+b-v)\;-dv\right)\,dx \text{ (en posant } v = a+b-u) \\ &= \frac{-\varepsilon}{b-a}\int_a^b \left(\int_{a+b-x}^{t} f(v)\,dv\right)\,dx \\ &= \frac{-\varepsilon}{b-a}\int_b^a \left(\int_y^{t} f(v)\,dv\right)\;-dy \text{ (en posant } y = a+b-x) \\ &= -\varepsilon L(f)(t). \end{aligned}$$

Donc, si $f \in F_1$ alors $L(f) \in F_2$ et si $f \in F_2$, $L(f) \in F_1$.

$$\boxed{L(F_1) \subset F_2 \text{ et } L(F_2) \subset F_1.}$$

2°. (a) Pour $t \in [a,b]$, $g(a+b-t) = \dfrac{1}{2}(f(a+b-t)+f(t)) = g(t)$ et donc $g \in F_2$.

(b) De même, la fonction $h\;:\;t \mapsto \dfrac{1}{2}(f(t)-f(a+b-t))$ est dans F_1. De plus, $f = g+h$. Ainsi, tout élément de E_0 est somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 et donc $E_0 = F_1 + F_2$.
De plus, si $f \in F_1 \cap F_2$, alors pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = f(a+b-t) = -f(a+b-t)$ et donc $\forall t \in [a,b],\ f(t) = 0$. Ceci montre que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et donc que

$$\boxed{E_0 = F_1 \oplus F_2.}$$

(c) Soit $n \geq 2$.

$$L^n(f)(b) - L^n(f)(a) = \int_a^b (L^n(f))'(t)\,dt = \int_a^b L^{n-1}(f)(t)\,dt = \int_a^b L(L^{n-2}(f))(t)\,dt = 0.$$

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ L^n(f)(a) = L^n(f)(b).}$$

3°. (a) Soit $f \in F_2$. D'après la question II.1°(a), $L(F_2) \subset F_1$ et $L(F_1) \subset F_2$. Donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $L^{2n}(f) \in F_2$ et $L^{2n+1}(f) \in F_1$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$.

• Puisque $L^{2n-1}(f) \in F_1$, pour $t \in [a,b]$, on a $L^{2n-1}(f)(a+b-t) = -L^{2n-1}(f)(t)$ et quand $t = \dfrac{a+b}{2}$, on obtient $L^{2n-1}(f)\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = -L^{2n-1}(f)\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ et donc $L^{2n-1}(f)\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$.

• On a aussi $L^{2n+1}(f)(b) = -L^{2n+1}(f)(a)$. Mais puisque $2n+1 \geq 3 \geq 2$, d'après 2°(c), $L^{2n+1}(f)(b) = L^{2n+1}(f)(a)$. Par suite $L^{2n+1}(f)(b) = -L^{2n+1}(f)(a) = L^{2n+1}(f)(a)$ et donc $L^{2n+1}(f)(b) = L^{2n+1}(f)(a) = 0$.

• $\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t)\ dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (L^{2n+1}(f))'(t)\ dt = L^{2n+1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) - L^{2n+1}(f)(a) = 0 - 0 = 0.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L^{2n-1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0,\ L^{2n+1}(f)(b) = L^{2n+1}(f)(a) = 0 \text{ et } \int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t)\ dt = 0.}$$

(b) • $(L(f))' = f > 0$. Donc $L(f)$ est strictement croissante sur $[a, b]$.

• $(L^2(f))' = L(f)$. Mais d'après la question précédente $L(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$. Donc $L(f)$ est strictement négative sur $[a, \frac{a+b}{2}[$ et strictement positive sur $]\frac{a+b}{2}, b]$. On en déduit que $L^2(f)$ est strictement décroissante sur $[a, \frac{a+b}{2}[$ et strictement croissante sur $]\frac{a+b}{2}, b]$.

• $(L^3(f))' = L^2(f)$. Maintenant, $\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}} L^2(f)(t)\ dt = 0$. $L^2(f)$ ne peut donc être de signe constant sur $[a, \frac{a+b}{2}]$ (car une fonction continue, de signe constant et d'intégrale nulle est nulle ce qui n'est pas le cas de $L^2(f)$) Puisque $L^2(f)$ est strictement décroissante sur $[a, \frac{a+b}{2}]$, on en déduit que $L^2(f)$ s'annule une et une seule fois en un certain $\alpha_2 \in]a, \frac{a+b}{2}[$, est strictement positive sur $[a, \alpha_2[$ et strictement négative sur $]\alpha_2, \frac{a+b}{2}]$. De même, $L^2(f)$ s'annule une et une seule fois en un certain $\beta_2 \in]\frac{a+b}{2}, b[$, est strictement négative sur $[\frac{a+b}{2}, \beta_2[$ et strictement positive sur $]\beta_2, b]$. On en déduit le tableau de variation de $L^3(f)$:

t	a		α_2		$\frac{a+b}{2}$		β_2		b
$(L^3(f))'(t)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$L^3(f)$	0	$\nearrow$	$L^3(f)(\alpha_2)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$L^3(f)(\beta_2)$	$\nearrow$	0

• Mais alors $(L^4(f))' = L^3(f)$ est strictement positive sur $]a, \frac{a+b}{2}[$ et strictement négative sur $]\frac{a+b}{2}, b[$ et donc $L^4(f)$ est strictement croissante sur $[a, \frac{a+b}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{a+b}{2}, b]$.

• Pour les mêmes raisons même que pour $L^2(f)$, $L_4(f)$ n'est pas de signe constant sur $[a, b]$, s'annule en $\alpha_4 \in]a, \frac{a+b}{2}[$ et en $\beta_4 \in]\frac{a+b}{2}[$, est strictement négative sur $[a, \alpha_4[\cup]\beta_4, b]$ et strictement positive sur $]\alpha_4, \beta_4[$. Par suite, $L^5(f)$ est strictement décroissante sur $[a, \alpha_4]$ et sur $[\beta_4, b]$ et strictement croissante sur $[\alpha_4, \beta_4]$.

Par récurrence, on en déduit les différents tableaux de variations de $L^n(f)$, $n \geq 2$.

Tableau de variations de $L^{4p+2}(f)$, $p \in \mathbb{N}$

t	a		$\frac{a+b}{2}$		b
$L^{4p+2}(f)$	< 0	$\searrow$	> 0	$\nearrow$	< 0

Tableau de variations de $L^{4p+3}(f)$, $p \in \mathbb{N}$

t	a		α_{2p+2}		β_{2p+2}		b
$L^{4p+3}(f)$	0	$\nearrow$	> 0	$\searrow$	< 0	$\nearrow$	0

Tableau de variations de $L^{4p}(f)$, $p \in \mathbb{N}^*$

t	a		$\frac{a+b}{2}$		b
$L^{4p}(f)$	< 0	$\nearrow$	> 0	$\searrow$	< 0

Tableau de variations de $L^{4p+1}(f)$, $p \in \mathbb{N}^*$

t	a		α_{2p}		β_{2p}		b
$L^{4p+1}(f)$	0	$\searrow$	> 0	$\nearrow$	< 0	$\searrow$	0

(c) L'étude précédente montre que

$$\boxed{\text{card}(\Omega_1) = 1,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \text{card}(\Omega_{4p}) = \text{card}(\Omega_{4p+2}) = 2,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \text{card}(\Omega_{4p+1}) = \text{card}(\Omega_{4p-1}) = 3.}$$

(d) L'étude précédente montre aussi que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{sgn}(L^{2n}(f)(a)) = (-1)^{n-1}.}$$

Partie III

1°. (a) • $P_0 = 1$.

• $P_1 = (X-a) + \lambda$ avec $\displaystyle\int_a^b ((t-a)+\lambda)\ dt = 0$ ou encore $\dfrac{(b-a)^2}{2} + \lambda(b-a) = 0$ ou enfin $\lambda = -\dfrac{b-a}{2}$. Finalement $P_1 = (X-a) - \dfrac{b-a}{2}$.

• $P_2 = \dfrac{(X-a)^2}{2} - \dfrac{b-a}{2}(X-a) + \lambda$ avec $\displaystyle\int_a^b \left(\frac{(t-a)^2}{2} - \frac{b-a}{2}(t-a)+\lambda\right)\ dt = 0$ ou encore $\dfrac{(b-a)^3}{6} - \dfrac{(b-a)^3}{4} + \lambda(b-a) = 0$ ou enfin $\lambda = \dfrac{(b-a)^2}{12}$. Finalement $P_2 = \dfrac{(X-a)^2}{2} - \dfrac{b-a}{2}(X-a) + \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

• $P_3 = \dfrac{(X-a)^3}{6} - \dfrac{b-a}{4}(X-a)^2 + \dfrac{(b-a)^2}{12}(X-a) + \lambda$ avec $\dfrac{(b-a)^4}{24} - \dfrac{(b-a)^4}{12} + \dfrac{(b-a)^4}{24} + \lambda(b-a) = 0$ ou enfin $\lambda = 0$. Finalement $P_2 = \dfrac{(X-a)^2}{2} - \dfrac{b-a}{2}(X-a) - \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} P_0 = 1,\ P_1 = (X-a) - \dfrac{b-a}{2},\ P_2 = \dfrac{(X-a)^2}{2} - \dfrac{b-a}{2}(X-a) + \dfrac{(b-a)^2}{12} \\ \text{et } P_3 = \dfrac{(X-a)^3}{6} - \dfrac{b-a}{4}(X-a)^2 + \dfrac{(b-a)^2}{12}(X-a). \end{array}}$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $Q_n = P_n(X+b-a) - P_n(X) - (b-a)\dfrac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$. Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n = 0$.

• $Q_1 = ((X+b-a)-a) - \dfrac{b-a}{2} - (X-a) + \dfrac{b-a}{2} - (b-a) = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $Q_n = 0$. Alors, $Q'_{n+1} = Q_n = 0$ et donc pour $t \in [a,b]$, $Q_{n+1}(t) = Q_(n+1)(a) = P_{n+1}(b) - P_{n+1}(a) = 0$ d'après la question II.2°(c) puisque $n+1 \geq 2$.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n = 0$ et donc que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(X+b-a) - P_n(a) = (b-a)\frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}.}$$

(c) La formule précédente appliquée à $a = 0$, $b = 1$ et $n = 3$ s'écrit

$$P_3(X+1) - P_3(X) = \frac{X^2}{2},$$

avec

$$P_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12} = \frac{2X^3 - 3X^2 + X}{12} = \frac{X(X-1)(2X-1)}{12}.$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\sum_{k=1}^{n}(P_3(k+1) - P_3(k)) = 2(P_3(n+1) - P_3(1)) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

2°. (a) φ est une forme bilinéaire, symétrique sur $\mathcal{P}$. Ensuite, pour $P \in \mathcal{P}$, $\varphi(P,P) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b P^2(t)\,dt \geq 0$ et de plus

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0 &\Rightarrow \int_a^b P^2(t)\,dt = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in [a,b],\ P^2(t)=0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow P^2 = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}\\ &\Rightarrow P=0.\end{aligned}$$

Finalement, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathcal{P}$ et donc

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{P}.}$$

(b) Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \geq n \geq 2$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\varphi(P_n,P_m) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b P_n(t)P_m(t)\,dt\\ &= \frac{1}{b-a}\left[P_n(t)P_{m+1}(t)\right]_a^b - \frac{1}{b-a}\int_a^b P_{n-1}(t)P_{m+1}(t)\,dt\\ &= \frac{P_n(b)P_{m+1}(b)-P_n(a)P_{m+1}(a)}{b-a} - \varphi(P_{n-1},P_{m+1})\\ &= -\varphi(P_{n-1},P_{m+1}) \text{ (car } n\geq 2,\ m+1\geq 2 \text{ et donc } P_n(a)=P_n(b) \text{ et } P_{m+1}(a)=P_{m+1}(b) \text{ d'après II.2°(c)).}\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient alors

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2,\ (m\geq n\geq 2 \Rightarrow \varphi(P_n,P_m) = (-1)^{n+1}\varphi(P_1,P_{m+n-1})),$$

ce qui reste vrai quand $m \geq n = 1$. Soient maintenant m et n deux entiers naturels tels que $m \geq n \geq 1$.

$$\begin{aligned}\varphi(P_1,P_{m+n-1}) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b P_1(t)P_{m+n-1}(t)\,dt\\ &= \frac{1}{b-a}\left[P_1(t)P_{n+m}(t)\right]_a^b - \frac{1}{b-a}\int_a^b P_{n+m}(t)\,dt \text{ (car } P_1'=1)\\ &= \frac{P_1(b)P_{n+m}(b)-P_1(a)P_{n+m}(a)}{b-a} \text{ (car } n+m\geq 1 \text{ et donc } \int_a^b P_{n+m}(t)\,dt = \int_a^b L(P_{n+m-1})(t)\,dt = 0)\\ &= \frac{P_1(b)-P_1(a)}{b-a}P_{n+m}(a) = P_{n+m}(a).\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ (m\geq n \Rightarrow \varphi(P_n,P_m) = (-1)^{n+1}P_{n+m}(a)).}$$

Enfin, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(P_n,P_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b P_n(t)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b L(P_{n-1})(t)\,dt = 0.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \varphi(P_n,P_0)=0.}$$

(c) P_0 est un élément de F_2 tel que $\forall t \in [a,b],\ P_0(t) > 0$. Les questions II.3°(b) et II.3°(d) montrent que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ P_n(a)=0 \Leftrightarrow n \text{ est impair et } n\neq 1.}$$

3°. (a) Pour tout entier naturel n, on a $\deg(P_n) = n$. Par suite, la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathcal{P}$ et donc immédiatement

$$\boxed{\mathcal{P} = FP_1 \oplus FP_2.}$$

(b) Soient p un entier naturel non nul et q un entier naturel.

$$\varphi(P_{2p}, P_{2q+1}) = \pm P_{2p+2q+1}(a) = 0 \text{ car } 2p + 2q + 1 \text{ est un entier impair différent de } 1.$$

Comme d'autre part, $\forall q \in \mathbb{N},\ \varphi(P_{2q+1}, P_0) = 0$, on a montré que chaque polynôme P_n d'indice pair est orthogonal à chaque polynôme P_m d'indice impair. Ainsi tout élément d'une base de FP_1 est orthogonal à tout élément d'une base de FP_2 et donc

$$\boxed{\mathcal{P} = FP_1 \overset{\perp}{\oplus} FP_2.}$$

4°. (a) Soit $n \geq 2$. La formule de TAYLOR appliquée à P_n en a s'écrit

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(n-k)}(a)}{(n-k)!}(X-a)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(a)}{(n-k)!}(X-a)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k (b-a)^k}{k!(n-k)!}(X-a)^{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \gamma_k (b-a)^k (X-a)^{n-k}.$$

Maintenant, puisque $n \geq 2$, on a $P_n(a) = P_n(b)$ et en évaluant en b, on obtient

$$\gamma_n = \frac{n!}{(b-a)^n} P_n(b) = \frac{n!}{(b-a)^n} \times \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \gamma_k (b-a)^k (b-a)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \gamma_k.$$

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \gamma_k.}$$

(b) On sait déjà que $\gamma_3 = \gamma_5 = \gamma_7 = \gamma_9 = 0$. Ensuite

- $\gamma_2 = \gamma_0 + 2\gamma_1 + \gamma_2$ ou encore $\gamma_0 + 2\gamma_1 = 0$ et donc $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$.
- $\gamma_0 + 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0$ et donc $\gamma_2 = \frac{1}{3}(-1 + \frac{3}{2}) = \frac{1}{6}$.
- $\gamma_0 + 5\gamma_1 + 10\gamma_2 + 5\gamma_4 = 0$ et donc $\gamma_4 = \frac{1}{5}(-1 + \frac{5}{2} - \frac{10}{6}) = -\frac{1}{30}$.
- $\gamma_0 + 7\gamma_1 + 21\gamma_2 + 35\gamma_4 + 7\gamma_6 = 0$ et donc $\gamma_6 = \frac{1}{6}(-1 + \frac{7}{2} - \frac{21}{6} + \frac{35}{30}) = \frac{1}{42}$.
- $\gamma_0 + 9\gamma_1 + 36\gamma_2 + 126\gamma_4 + 84\gamma_6 + 9\gamma_8 = 0$ et donc $\gamma_8 = \frac{1}{9}(-1 + \frac{9}{2} - \frac{36}{6} + \frac{126}{30} - \frac{84}{42}) = -\frac{1}{30}$.
- $\gamma_0 + 11\gamma_1 + 55\gamma_2 + 330\gamma_4 + 462\gamma_6 + 165\gamma_8 + 11\gamma_{10} = 0$ et donc $\gamma_{10} = \frac{1}{11}(-1 + \frac{11}{2} - \frac{55}{6} + \frac{330}{30} - \frac{462}{42} + \frac{165}{30}) = \frac{5}{66}$.

$$\boxed{\gamma_0 = 1,\ \gamma_1 = -\frac{1}{2},\ \gamma_2 = \frac{1}{6},\ \gamma_4 = -\frac{1}{30},\ \gamma_6 = \frac{1}{42},\ \gamma_8 = -\frac{1}{30} \text{ et } \gamma_{10} = \frac{5}{66}.}$$

(c) Orthogonalisons la famille (P_0, P_2, P_4, P_6) en adaptant le procédé de SCHMIDT. Les différents produits scalaires seront calculés à l'aide des formules :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(P_n, P_0) = 0 \text{ et pour } m \geq n > 0,\ \varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} P_{n+m}(a) = (-1)^{n+1}\frac{(b-a)^{n+m}\gamma_{n+m}}{(n+m)!}.$$

- $\varphi(P_0, P_2) = 0$ et on conserve P_2.
- Ensuite, à P_4, on retranche sa projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(P_0, P_2)$ à savoir $\dfrac{\varphi(P_0, P_4)}{\varphi(P_0, P_0)}P_0 + \dfrac{\varphi(P_2, P_4)}{\varphi(P_2, P_2)}P_2 = \dfrac{\varphi(P_2, P_4)}{\varphi(P_2, P_2)}P_2$.

Or, $\varphi(P_2, P_2) = -\dfrac{(b-a)^4}{4!}\gamma_4 = \dfrac{(b-4)^4}{30 \times 4!}$ et $\varphi(P_4, P_2) = -\dfrac{(b-a)^6}{6!}\gamma_6 = -\dfrac{(b-a)^6}{42 \times 6!}$. Par suite,

$$\frac{\varphi(P_2,P_4)}{\varphi(P_2,P_2)} = -\frac{\frac{(b-a)^6}{42\times 6!}}{\frac{(b-4)^4}{30\times 4!}} = -\frac{(b-a)^2}{42}.$$

• La projection orthogonale de P_6 sur $\mathrm{Vect}(P_0,P_2,P_4) = \mathrm{Vect}(P_0,P_2,P_4+\frac{(b-a)^2}{42}P_2)$ est

$$\frac{\varphi(P_0,P_6)}{\varphi(P_0,P_0)}P_0 + \frac{\varphi(P_2,P_6)}{\varphi(P_2,P_2)}P_2 + \frac{\varphi(P_4+\frac{(b-a)^2}{42}P_2,P_6)}{\varphi(P_4+\frac{(b-a)^2}{42}P_2,P_4+\frac{(b-a)^2}{42}P_2)}(P_4+\frac{(b-a)^2}{42}P_2)$$

Or,

$$\frac{\varphi(P_2,P_6)}{\varphi(P_2,P_2)} = \frac{-\frac{(b-a)^8\gamma_8}{8!}}{-\frac{(b-a)^4\gamma_4}{4!}} = \frac{(b-a)^4}{1680}.$$

Ensuite,

$$\varphi(P_4,P_4) = -\frac{(b-a)^8\gamma_8}{8!} = \frac{(b-a)^8}{30\times 8!} \text{ et } \varphi(P_4,P_6) = -\frac{(b-a)^10\gamma_{10}}{10!} = \frac{5(b-a)^{10}}{66\times 10!},$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(P_4+\frac{(b-a)^2}{42}P_2,P_6)}{\varphi(P_4+\frac{(b-a)^2}{42}P_2,P_4+\frac{(b-a)^2}{42}P_2)} &= \frac{-\frac{5(b-a)^{10}}{66\times 10!}+\frac{(b-a)^2}{42}\frac{(b-a)^8}{30\times 8!}}{\frac{(b-a)^8}{30\times 8!}-2\times\frac{(b-a)^2}{42}\frac{(b-a)^6}{42\times 6!}+\frac{(b-a)^4}{(42)^2}\frac{(b-a)^4}{30\times 4!}}\\ &= \frac{\frac{(b-a)^{10}}{10!}\left(-\frac{5}{66}+\frac{1}{14}\right)}{\frac{(b-a)^8}{8!}\left(\frac{1}{30}-\frac{4}{63}+\frac{2}{63}\right)} = -\frac{(b-a)^2}{33}\end{aligned}$$

La projection orthogonale de P_6 sur $\mathrm{Vect}(P_0,P_2,P_4)$ est donc

$$\frac{(b-a)^4}{1680}P_2 - \frac{(b-a)^2}{33}\left(P_4+\frac{(b-a)^2}{42}P_2\right) = -\frac{(b-a)^2}{33}P_4 - \frac{(b-a)^4}{7920}P_2$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Une base }\varphi\text{-orthogonale de }\mathrm{Vect}(P_0,P_2,P_4,P_6)\text{ est}\\ \left(P_0,P_2,P_4+\frac{(b-a)^2}{42}P_2,P_6+\frac{(b-a)^2}{33}P_4+\frac{(b-a)^4}{7920}P_2\right).\end{array}}$$

