**SESSION 2002**

## Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

## Epreuve de Mathématiques 1 MP

---

# Exercice 1

**1°** *Etude de la série entière* $T_p$.

**(a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $|x| \leq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{np+1}}{np+1} = 0$. Si $x > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{np+1}}{np+1} = +\infty$ et si $x < -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{np+1}}{np+1}$ n'existe pas.

**(b)** Pour $x = 1$, $\dfrac{x^{np+1}}{np+1}$ tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$ et donc $R \geq 1$. Mais si $x > 1$, $\dfrac{x^{np+1}}{np+1}$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$ et donc $R \leq 1$. Finalement

$$\boxed{R = 1.}$$

**(c)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $|x| < 1$, alors $|x^p| < 1$ et la série géométrique de terme général $(-1)^n(x^p)^n$ converge absolument et si $|x| \geq 1$, la série géométrique de terme général $(-1)^n(x^p)^n$ diverge grossièrement. De plus,

$$\boxed{\forall x \in ]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{pn} = \frac{1}{1+x^p}.}$$

**(d)** $T_p$ est la primitive sur $]-1,1[$, qui s'annule en $0$, de la série entière précédente et donc

$$\boxed{\forall x \in ]-1,1[,\ T_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{pn+1}}{pn+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t^p}\,dt.}$$

**2°** *Une série alternée.*

**(a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $y \in [0,1]$, posons $f_n(y) = -p + (pn+p+1)y^{pn+1} - (pn+1)y^{pn+p+1}$. $f_n$ est dérivable sur $[0,1]$ et pour $y \in [0,1]$, on a

$$f_n'(y) = (pn+p+1)(pn+1)y^{pn} - (pn+p+1)(pn+1)y^{pn+p} = (pn+p+1)(pn+1)y^{pn}(1-y^p) \geq 0.$$

La fonction $f_n$ est donc croissante sur $[0,1]$. En particulier, pour $y \in [0,1]$,

$$f_n(y) \leq f_n(1) = -p + pn + p + 1 - pn - 1 = 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall y \in [0,1],\ -p + (pn+p+1)y^{pn+1} - (pn+1)y^{pn+p+1} \leq 0.}$$

**(b)** Soit $x \in ]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1}(x)| - |u_n(x)| = \frac{1}{pn+p+1}(1-x^{np+p+1}) - \frac{1}{np+1}(1-x^{np+1}) = \frac{-p+(pn+p+1)x^{pn+1}-(pn+1)x^{pn+p+1}}{(np+1)(np+p+1)} \leq 0.$$

La suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Ensuite, quand $n$ tend vers $+\infty$, $x^{pn+1}$ tend vers $0$ et donc $\dfrac{1}{np+1}(1-x^{pn+1})$ tend vers $0$.

$$\boxed{\forall x \in ]0,1[,\ \text{la suite } (|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante de limite nulle.}}$$

**(c) Critère spécial aux séries alternées.** Soit $(v_n)$ une suite réelle telle que la suite $((-1)^n v_n)$ est de signe constant et la suite $(|v_n|)$ tend vers $0$. Alors la série de terme général $v_n$ converge.

On en déduit que, pour tout réel $x \in ]0,1[$, la série de terme gééral $u_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

De plus, puisque $u_0(x) = 1 - x > 0$, on sait que pour tout entier naturel $N$,

$$\sum_{n=0}^{2N+1} u_n(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \leq \sum_{n=0}^{2N} u_n(x)$$

**(d)** En particulier, $u_0(x) - u_1(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \leq u_0(x)$ avec $u_0(x) = 1 - x$ et

$$u_0(x) + u_1(x) = 1 - x - \frac{1}{p+1}(1 - x^{p+1}) = \frac{(p+1)(1-x) - (1-x^{p+1})}{p+1} = \frac{p - (p+1)x + x^{p+1}}{p+1}.$$

$$\boxed{\forall x \in ]-1,1[,\ \frac{p-(p+1)x+x^{p+1}}{p+1} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \leq 1 - x.}$$

**3°** Soit $x \in ]0,1[$. Puisque les deux séries considérées convergent, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{pn+1}}{pn+1} = S_p - T_p(x).$$

Donc

$$\forall x \in ]-1,1[,\ \frac{p-(p+1)x+x^{p+1}}{p+1} \leq S_p - T_p(x) \leq 1 - x.$$

Maintenant, quand $x$ tend vers $1$ par valeurs inférieures, $1-x$ tend vers $0$ de même que $\frac{p-(p+1)x+x^{p+1}}{p+1}$. On en déduit que $S_p = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} T_p(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \int_0^x \frac{1}{t^p+1}\,dt$. Enfin, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^p+1}$ est continue sur $[0,1]$ et il en est de même de la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{t^p+1}\,dt$. En particulier, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \int_0^x \frac{1}{t^p+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t^p+1}\,dt$. On a montré que

$$\boxed{S_p = \int_0^1 \frac{1}{t^p+1}\,dt.}$$

# Exercice 2

**1° (a)** Posons $p = \dim(\mathrm{Ker}(\sigma - Id_E))$. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(\sigma - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(\sigma + Id_E)$, la matrice de $\sigma$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\sigma) = \mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1),\ p \text{ désignant l'ordre de la valeur propre } 1.$$

et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\sigma - Id_E) = \mathrm{diag}(0,\ldots,0,-2,\ldots,-2) \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\sigma + Id_E) = \mathrm{diag}(2,\ldots,2,0,\ldots,0).$$

On en déduit que

$$\mathrm{Im}(\sigma - Id_E) = \mathrm{Vect}(e_i)_{p+1\leq i\leq n} = \mathrm{Ker}(\sigma + Id_E) = Dir_\sigma \text{ et } \mathrm{Im}(\sigma + Id_E) = \mathrm{Vect}(e_i)_{1\leq i\leq p} = \mathrm{Ker}(\sigma - Id_E) = Inv_\sigma.$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(\sigma - Id_E) = Dir_\sigma \text{ et } \mathrm{Im}(\sigma + Id_E) = Inv_\sigma.}$$

**(b)** Soit $x \in E$. Puisque $\sigma^* - Id_E = \sigma^* - Id_E^* = (\sigma - Id_E)^*$ et $\sigma^* + Id_E = \sigma^* + Id_E^* = (\sigma + Id_E)^*$,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(\sigma^* - Id_E) &\Leftrightarrow (\sigma^* - Id_E)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E,\ ((\sigma^* - Id_E)(x), y) = 0 \ (\Leftarrow \text{ est vraie car } E^\perp = \{0\}) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E,\ (x, (\sigma - Id_E)(y)) = 0 \Leftrightarrow x \in (\mathrm{Im}(\sigma - Id_E))^\perp. \end{aligned}$$

et de même

$$x \in \mathrm{Ker}(\sigma^* + \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (\sigma^* + \mathrm{Id}_E)(x) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E,\ ((\sigma^* + \mathrm{Id}_E)(x), y) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall y \in E,\ (x, (\sigma + \mathrm{Id}_E)(y)) = 0 \Leftrightarrow x \in (\mathrm{Im}(\sigma + \mathrm{Id}_E))^{\perp}.$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\sigma^* - \mathrm{Id}_E) = (\mathrm{Im}(\sigma - \mathrm{Id}_E))^{\perp} \text{ et } \mathrm{Ker}(\sigma^* + \mathrm{Id}_E) = (\mathrm{Im}(\sigma + \mathrm{Id}_E))^{\perp}.}$$

Maintenant, on a $(\sigma^*)^2 = (\sigma^2)^* = (\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$ et d'après ce qui précède,

$$\boxed{\sigma^* \text{ est une symétrie vectorielle. De plus } \mathit{Inv}_{\sigma^*} = (\mathit{Dir}_{\sigma})^{\perp} \text{ et } \mathit{Dir}_{\sigma^*} = (\mathit{Inv}_{\sigma})^{\perp}.}$$

**2° (a)** Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors $(f(x)|x) > 0$ et on peut poser $k = \dfrac{1}{\sqrt{(f(x)|x)}}$. Mais alors

$$(f(kx)|kx) = k^2(f(x)|x) = \frac{1}{(f(x)|x)}(f(x)|x) = 1.$$

$$\boxed{\forall x \in E \setminus \{0\},\ \frac{1}{\sqrt{(f(x)|x)}}x \in \mathcal{Q}.}$$

**(b)** Soit $x \in E$. Si $x = 0$, l'égalité proposée est vraie et si $x \neq 0$, on peut poser $k = \dfrac{1}{\sqrt{(f(x)|x)}} > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}(\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|x) &= \frac{1}{k^2}(\sigma^* \circ f \circ \sigma(kx)|kx) = \frac{1}{k^2}(f \circ \sigma(kx)|\sigma(kx)) \\ &= \frac{1}{k^2}(f(kx)|kx) \text{ (car } kx \in \mathcal{Q} \Rightarrow \sigma(kx) \in \mathcal{Q}) \\ &= (f(x)|x).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in E,\ (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|x) = (f(x)|x).}$$

**(c)** Soit alors $(x, y) \in E^2$. On généralise les identités de polarisation. On note tout d'abord que

$$(\sigma^* \circ f \circ \sigma(y)|x) = (y|\sigma^* \circ f^* \circ \sigma(x)) = (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|y),$$

et donc

$$\begin{aligned}(\sigma^* \circ f \circ \sigma(x+y)|x+y) &= (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|x) + (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|y) + (\sigma^* \circ f \circ \sigma(y)|x) + (\sigma^* \circ f \circ \sigma(y)|y) \\ &= (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|x) + 2(\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|y) + (\sigma^* \circ f \circ \sigma(y)|y).\end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}(\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|y) &= \frac{1}{4}\left((\sigma^* \circ f \circ \sigma(x+y)|x+y) - (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x-y)|x-y)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((f(x+y)|x+y) - (f(x-y)|x-y)\right) = (f(x)|y).\end{aligned}$$

Soit $x \in E$ donné. On a : $\forall y \in E,\ (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x) - f(x)|y) = 0$. Par suite, $\sigma^* \circ f \circ \sigma(x) - f(x) \in E^{\perp} = \{0\}$ et donc $\sigma^* \circ f \circ \sigma(x) - f(x) = 0$.

Ainsi, $\forall x \in E,\ \sigma^* \circ f \circ \sigma(x) = f(x)$ et donc $\sigma^* \circ f \circ \sigma = f$ ou enfin $\sigma^* \circ f = f \circ \sigma^{-1} = f \circ \sigma$.

$$\boxed{\sigma^* \circ f = f \circ \sigma.}$$

**(d)** Soit $y \in f(\mathit{Inv}_{\sigma})$. Alors, il existe $x \in \mathit{Inv}(\sigma)$ tel que $f(x) = y$ et d'après la question précédente

$$\sigma^*(y) = \sigma^*(f(x)) = f(\sigma(x)) = f(x) = y.$$

Donc

$$\boxed{\forall y \in E,\ (y \in f(\mathit{Inv}_\sigma) \Rightarrow \sigma^*(y) = y).}$$

**(e)** On a donc $f(\mathit{Inv}_\sigma) \subset \mathit{Inv}_{\sigma^*} = (\mathit{Dir}_\sigma)^\perp$. Mais $f$ est défini positif et en particulier $f$ est un automorphisme de $E$ ($\forall x \in E,\ x \neq 0 \Rightarrow (f(x)|x) > 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$). On en déduit que

$$\dim(f(\mathit{Inv}_\sigma)) = \dim(\mathit{Inv}_\sigma) = n - \dim(\mathit{Dir}_\sigma) = \dim((\mathit{Dir}_\sigma)^\perp).$$

Finalement

$$\boxed{f(\mathit{Inv}_\sigma) = \mathit{Inv}_{\sigma^*} = (\mathit{Dir}_\sigma)^\perp.}$$

**3° (a)** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\mathrm{diag}(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2})$. $f$ diagonalise en base orthonormée et est donc un endomorphisme auto-adjoint. De plus, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(f(x,y)|(x,y)) = ((\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2})|(x,y)) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

ce qui montre tout à la fois que $f$ est défini positif et que $\mathcal{Q}$ est l'ensemble des couples $(x, y)$ tels que $(f(x,y)|(x,y)) = 1$.

Soit alors $\sigma$ une symétrie. D'après le résultat admis par l'énoncé, $\sigma$ laisse I invariant et vérifie $\sigma(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$ si et seulement si I et $f(I)^\perp$ sont en somme directe. Maintenant, si on pose $A(\alpha, \beta)$, I est la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{OA} = (\alpha, \beta)$ et $f(I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $f(\overrightarrow{OA}) = \left(\frac{\alpha}{a^2}, \frac{\beta}{b^2}\right)$ puis $f(I)^\perp$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\left(-\frac{\beta}{b^2}, \frac{\alpha}{a^2}\right)$. Maintenant

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\frac{\beta}{b^2} \\ \beta & \frac{\alpha}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1 \neq 0,$$

on a bien $\mathbb{R}^2 = I \oplus f(I)^\perp$. La symétrie par rapport à $I = \mathrm{Vect}\,((\alpha, \beta))$ laissant globalement invariant l'ellipse $\mathcal{Q}$ a pour direction $f(I)^\perp = \mathrm{Vect}\left((-\frac{\beta}{b^2}, \frac{\alpha}{a^2})\right)$.

**Construction.** La droite $(f(I))^\perp$ est également engendrée par le vecteur $\overrightarrow{OA'} = \left(-\frac{a}{b}\beta, \frac{b}{a}\alpha\right)$. On peut noter que le point $A'$ appartient à l'ellipse $\mathcal{Q}$ car

$$\frac{1}{a^2}\left(-\frac{a}{b}\beta\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\alpha\right) = \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\alpha^2}{a^2} = 1.$$

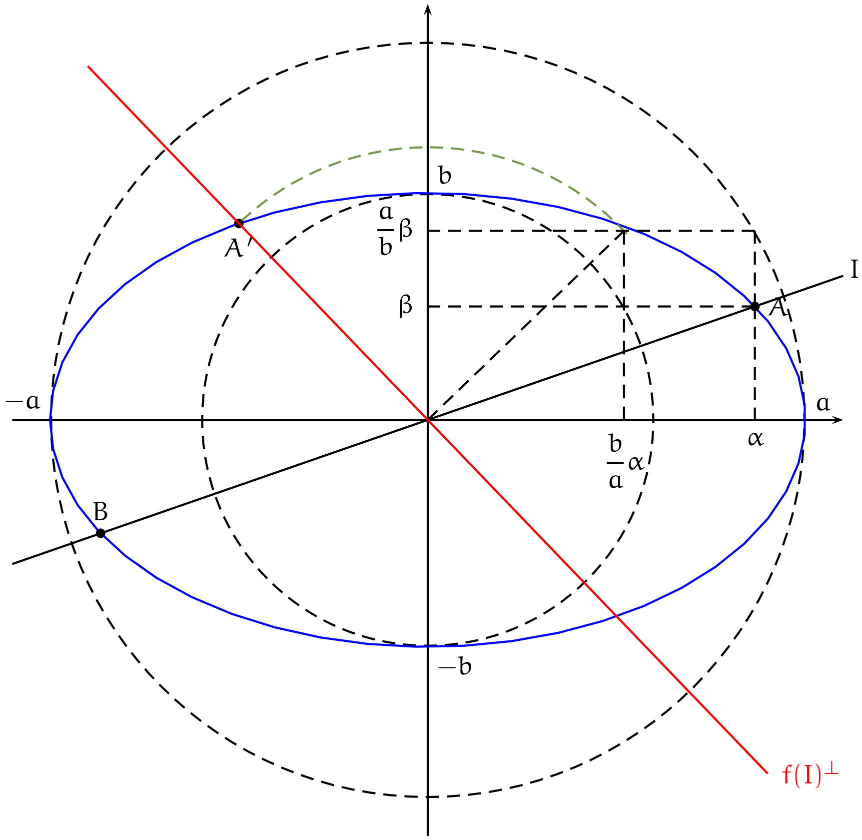
Maintenant, on sait que l'image de l'ellipse $\mathcal{Q}$ par l'affinité de rapport $\frac{a}{b}$ (resp. $\frac{b}{a}$), d'axe $(Ox)$ (resp. $(Oy)$) et de direction $(Oy)$ (resp. $(Ox)$) est le cercle de centre $O$ et de rayon $a$ (resp. $b$). On en déduit aisément la construction du point $A'$ fournie à la page suivante.

Enfin, prenons comme paramétrisation de l'ellipse $\mathcal{Q}$ $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$ et notons $t_0$ une valeur du paramètre telle que $M(t_0) = A$. On a donc $\alpha = a\cos t_0$ et $\beta = b\sin t_0$. Mais alors

$$-\frac{a}{b}\beta = -\frac{a}{b} \times b\sin t_0 = a\cos\left(t_0 + \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \frac{b}{a}\alpha = \frac{b}{a} \times a\cos t_0 = b\sin\left(t_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi, si $A$ est le point de l'ellipse $\mathcal{Q}$ de paramètre $t_0$, alors $A'$ est le point de l'ellipse $\mathcal{Q}$ de paramètre $t_0 + \frac{\pi}{2}$.




**(b)** • Soient $p \in \mathbb{N}^*$ puis $f_p$ l'endomorphisme de matrice $\frac{1}{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. La matrice de $f_p$ dans cette base est symétrique réelle et puisque cette base est orthonormée, $f_p$ est un endomorphisme auto-adjoint. Enfin, $\chi_{f_p} = -(X - \frac{1}{p})(X - \frac{2}{p})(X + \frac{2}{p})$. Par suite, aucune valeur propre de $f_p$ n'est nulle et l'une au moins de ses valeurs propres est strictement positive.

• Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(f(x, y, z)|(x, y, z)) = ((\frac{x}{p}, \frac{2z}{p}, \frac{2y}{p})|(x, y, z)) = \frac{1}{p}(x^2 + 4yz),$$

de sorte que $(x, y, z) \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow \frac{1}{p}(x^2 + 4yz) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4yz = p \Leftrightarrow (x, y, z) \in (\mathcal{Q}_p)$. Donc, $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_p)$.

• $\{(1, 1, \frac{p-1}{4}),\ p \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel. Cherchons tout d'abord un sous-espace vectoriel I de $\mathbb{R}^3$ et distinct de $\mathbb{R}^3$ et contenant la droite affine $\{(1, 1, \frac{p-1}{4}),\ p \in \mathbb{R}\}$. I ne peut être qu'un plan vectoriel. Soit $ax + by + cz = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, une équation de I.

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{R},\ (1, 1, \frac{p-1}{4}) \in I \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{R},\ a + b - \frac{c}{4} + \frac{c}{4}p = 0 \\ \Leftrightarrow a + b - \frac{c}{4} = \frac{c}{4} = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ et } b = -a.\end{aligned}$$

I est donc le plan vectoriel d'équation $y = x$.

• $I = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$ puis $f(I) = \text{Vect}(f(1, 1, 0), f(0, 0, 1)) = \text{Vect}(\frac{1}{p}(1, 0, 2), \frac{1}{p}(0, 2, 0))$. $(f(I))^\perp$ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 0, 2) \wedge (0, 1, 0) = (-2, 0, 1)$. Comme $(-2, 0, 1) \notin I$, I et $(f(I))^\perp$ sont effectivement en somme directe.

• Soit $\sigma$ la symétrie par rapport au plan I d'équation $x = y$ et de direction la droite $\text{Vect}(-2, 0, 1)$. $\sigma$ est distincte de l'identité, laisse globalement invariante chaque quadrique $(\mathcal{Q}_p)$, $p \in \mathbb{R}^*$ et laisse fixe chacun des vecteurs $(1, 1, (p-1)/4)$, $p \in \mathbb{R}$. Déterminons alors la matrice de $\sigma$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}) = ((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$.

$$\overrightarrow{u'} = \sigma(\overrightarrow{u}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u'} \in (f(I))^{\perp} \\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'} \in I \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} x' = x - 2\lambda \\ y' = y \\ z' = z + \lambda \\ x + x - 2\lambda = y + y \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} \lambda = x - y \\ x' = -x + 2y \\ y' = y \\ z' = x - y + z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = -x + 2y \\ y' = y \\ z' = x - y + z \end{array} \right.$$

La matrice de $\sigma$ dans la base canonique est donc $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Il reste à vérifier que $(\mathcal{Q}_0)$ est invariante par $\sigma$. Mais si $(x', y', z') = \sigma(x, y, z)$, alors

$$x^2 + 4yz = (-x' + 2y')^2 + 4y'(x' - y' + z') = x'^2 + 4y'z',$$

de sorte que $x^2 + 4yz = 0 \Leftrightarrow x'^2 + 4y'z' = 0$ et on a bien $\sigma(\mathcal{Q}_0) = \mathcal{Q}_0$. Ainsi, en notant $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

## Exercice 3

**1° (a)** Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $\omega \mapsto \dfrac{e^{i\omega t}}{a + i\omega}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $F_t$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et si on note $\varphi_t$ une primitive de la fonction $\omega \mapsto \dfrac{e^{i\omega t}}{a + i\omega}$, pour $B \in \mathbb{R}$, on a $F_t(B) = \varphi(B) - \varphi(-B)$ et donc

$$F_t'(B) = \varphi_t'(B) + \varphi_t'(-B) = \frac{e^{iBt}}{a + iB} + \frac{e^{-iBt}}{a - iB}.$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \forall B \in \mathbb{R},\ F_t'(B) = \frac{e^{iBt}}{a + iB} + \frac{e^{-iBt}}{a - iB}.}$$

**(b)** Pour $u \in \mathbb{R}$, posons $f(u) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n}$. Pour $u \neq 0$, on a $f(u) = \dfrac{\sin u}{u} = \phi(u)$. Or $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\boxed{\phi \text{ est prolongeable en une fonction de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

**(c)** Montrons que la fonction $B \mapsto \displaystyle\int_0^t e^{au} \frac{\sin(Bu)}{u}\, du$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, considérons $\begin{array}{rccc} \Psi : & ]0, t] \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (u, B) & \mapsto & e^{au} \dfrac{\sin(Bu)}{u} \end{array}$.

• Pour chaque $B \in \mathbb{R}$, la fonction $u \mapsto e^{au} \dfrac{\sin(Bu)}{u}$ est continue et intégrable sur $]0, t]$ (car prolongeable par continuité en $0$).

• $\Psi$ admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable $B$ sur $]0, t] \times \mathbb{R}$ et pour $(u, B) \in ]0, t] \times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial B}(u, B) = e^{au} \cos(Bu).$$

De plus, pour chaque $u \in ]0,t]$, la fonction $B \mapsto \frac{\partial\Psi}{\partial B}(u,B) = e^{au}\cos(Bu)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour chaque $B \in \mathbb{R}$, la fonction $u \mapsto \frac{\partial\Psi}{\partial B}(u,B) = e^{au}\cos(Bu)$ est continue et intégrable sur $]0,t]$. Enfin, pour $(u,t) \in ]0,t] \times \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial\Psi}{\partial B}(u,B)\right| \leq e^{au} = \varphi(u),$$

où $\varphi$ est une fonction continue et intégrable sur $]0,t]$. D'après le théorème dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction $B \mapsto \int_0^t e^{au}\frac{\sin(Bu)}{u}\,du$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour $B \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dB}\left(\int_0^t e^{au}\frac{\sin(Bu)}{u}\,du\right) = \int_0^t e^{au}\cos(Bu)\,du.$$

**(d)** Pour $B \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dB}\left(2e^{-at}\int_0^t e^{au}\frac{\sin(Bu)}{u}\,du\right) &= 2e^{-at}\int_0^t e^{au}\cos(Bu)\,du = e^{-at}\int_0^t e^{(a+iB)u}\,du + e^{-at}\int_0^t e^{(a-iB)u}\,du \\ &= \frac{e^{-at}}{a+iB}e^{(a+iBt)} + \frac{e^{-at}}{a-iB}e^{(a-iBt)} - \frac{e^{-at}}{a+iB} - \frac{e^{-at}}{a+iB} = F_t'(B) - e^{-at}F_0'(B).\end{aligned}$$

Mais alors, pour $B \in \mathbb{R}$,

$$F_t'(B) = \frac{d}{dB}\left(2e^{-at}\int_0^t e^{au}\frac{\sin(Bu)}{u}\,du\right) + e^{-at}F_0'(B) = \frac{d}{dB}\left(2e^{-at}\left(\int_0^t e^{au}\frac{\sin(Bu)}{u}\,du + \frac{1}{2}F_0'\right)\right)(B) = G_t'(B).$$

Ainsi, $F_t' = G_t'$. De plus $F_t(0) = G_t(0) = 0$ et donc pour tout $B \in \mathbb{R}$,

$$F_t(B) = F_t(0) + \int_0^B F_t'(u)\,du = G_t(0) + \int_0^B G_t'(u)\,du = G_t(B).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall B \in \mathbb{R},\ \int_{-B}^B \frac{e^{i\omega t}\,d\omega}{a+i\omega} = 2e^{-at}\left(\int_0^t e^{au}\frac{\sin(Bu)}{u}\,du + \frac{1}{2}\int_{-B}^B \frac{d\omega}{a+i\omega}\right).}$$

**2° (a)** Soit $B \in \mathbb{R}_+^*$. Au vu de l'intégrabilité des différentes fonctions considérées, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{au}\frac{\sin(Bu)}{u}\,du &= \int_0^t \frac{\sin(Bu)}{u}\,du + \int_0^t \frac{e^{au}-1}{u}\sin(Bu)\,du \\ &= \int_0^{Bt}\frac{\sin(v)}{v}\,dv + \int_0^t \frac{e^{au}-1}{u}\sin(Bu)\,du \text{ (en posant } v = Bu).\end{aligned}$$

Le rappel (ii) permet d'affirmer que $\lim_{B\to+\infty}\int_0^{Bt}\frac{\sin(v)}{v}\,dv = \mathit{sign}(t)\frac{\pi}{2}$ (la fonction $v \mapsto \frac{\sin v}{v}$ étant paire).

Ensuite, $\int_0^t \frac{e^{au}-1}{u}\sin(Bu)\,du = \int_0^t \lambda(u)\sin(Bu)\,du$ où $\lambda(u) = \begin{cases}\frac{e^{au}-1}{u} \text{ si } u \neq 0\\ a \text{ si } u = 0\end{cases}$. Comme la fonction $\lambda$ est continue sur $\mathbb{R}$, le rappel (i) permet d'affirmer que $\lim_{B\to+\infty}\lambda(u)\sin(Bu)\,du = 0$. Finalement

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \lim_{B\to+\infty}\int_0^t e^{au}\frac{\sin(Bu)}{u}\,du = \lim_{B\to+\infty}\int_0^t \frac{\sin(Bu)}{u}\,du = \frac{\pi}{2}\mathit{sign}(t).}$$

**(b)** Soit $B \in \mathbb{R}$.

$$F_0(B) = \int_{-B}^B \frac{1}{a+i\omega}\,d\omega = \int_{-B}^B\left(\frac{a}{a^2+\omega^2} - i\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\right)\,d\omega = \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{\omega}{a}\right) - \frac{i}{2}\ln(a^2+\omega^2)\right]_{-B}^B = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{B}{a}\right),$$

et donc $F_0(B)$ tend vers $2\times\dfrac{\pi}{2}\mathit{sign}(a)=\pi\mathit{sign}(a)$ quand B tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\forall a\in\mathbb{R}^*,\ \lim_{B\to+\infty}F_0(B)=\pi\mathit{sign}(a).}$$

**(c)** Mais alors,

$$\lim_{B\to+\infty}F_t(B)=\lim_{B\to+\infty}2e^{-at}\left(\int_0^t e^{au}\frac{\sin(Bu)}{u}\,du+\frac{1}{2}\int_{-B}^{B}\frac{d\omega}{a+i\omega}\right)=2e^{-at}\left(\frac{\pi}{2}\mathit{sign}(t)+\frac{1}{2}\pi\mathit{sign}(a)\right)$$
$$=\pi e^{-at}(\mathit{sign}(t)+\mathit{sign}(a)).$$

$$\boxed{\forall a\in\mathbb{R}^*,\ \forall t\in\mathbb{R},\ \lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}\frac{e^{i\omega t}}{a+i\omega}\,d\omega=\pi e^{-at}(\mathit{sign}(t)+\mathit{sign}(a)).}$$

**3°** *Une formule d'inversion.*

**(a)** Soient $a\in\mathbb{R}^*$ et $\omega\in\mathbb{R}$. La fonction $f\ :\ t\mapsto e^{-a|t|}e^{-i\omega t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel $t$, $|f(t)|=e^{-a|t|}$. Donc, si $a>0$, $|f(t)|$ est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ et si $a<0$, $|f(t)|$ est prépondérant devant 1 quand $t$ tend vers $+\infty$. On en déduit que $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a>0$.

$$\boxed{\text{Pour tous } a\in\mathbb{R}^* \text{ et } \omega\in\mathbb{R}, \text{ la fonction } t\mapsto x(t)e^{-i\omega t} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } a>0.}$$

**(b)** Soient $a>0$ et $\omega\in\mathbb{R}$.

$$H_x(\omega)=\int_{-\infty}^{0}e^{(a-i\omega)t}\,dt+\int_0^{+\infty}e^{(-a-i\omega)t}\,dt=\left[\frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega}\right]_{-\infty}^{0}+\left[\frac{e^{(-a-i\omega)t}}{-a-i\omega}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{a-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

$$\boxed{\forall\omega\in\mathbb{R},\ \forall a\in]0,+\infty[,\ H_x(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}.}$$

**(c)** Soit $t\in\mathbb{R}$. La fonction $\omega\mapsto\dfrac{2ae^{i\omega t}}{a^2+\omega^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dominée par $\dfrac{1}{\omega^2}$ quand $\omega$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. On en déduit que

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \forall a\in\mathbb{R}^*,\ \text{la fonction } \omega\mapsto\frac{2ae^{i\omega t}}{a^2+\omega^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

**(d)** D'après ce qui précède, pour $a>0$ et $t\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H_x(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2ae^{i\omega t}}{a^2+\omega^2}\,d\omega.$$

Maintenant, d'après 2°(c), pour $t>0$ et $a>0$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}d\omega}{a+i\omega}=\pi e^{-at}(\mathit{sign}(a)+\mathit{sign}(t))=2\pi e^{-at}\ \text{et}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}d\omega}{-a+i\omega}=\pi e^{-at}(\mathit{sign}(-a)+\mathit{sign}(t))=0.$$

On en déduit que

$$2\pi e^{-at}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}d\omega}{a+i\omega}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}d\omega}{-a+i\omega}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2ae^{i\omega t}d\omega}{a^2+\omega^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}H_x(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Ainsi,

$$\forall a>0,\ \forall t>0,\ x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H_x(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Si $t < 0$ et $a > 0$, en posant $u = -\omega$ on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2ae^{i\omega t}d\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{2ae^{-iut}(-du)}{a^2+u^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2ae^{iu(-t)}du}{a^2+u^2} = x(-t) = x(t).$$

Enfin si $t = 0$ et $a > 0$, puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{a^2+\omega^2}d\omega = \pi$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_x(\omega)\ d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2a\ d\omega}{a^2+\omega^2} = \pi = x(0).$$

Finalement

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \forall a > 0,\ x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_x(\omega)e^{i\omega t}\ d\omega.}$$