SESSION 2002

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2 MP

Exercice 1

1° *Des exemples de fonctions de* E.

(a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. φ_i est continue sur $[a,b]$, affine sur $[a,a_i]$ et sur $[a_i,b]$ et donc affine sur chaque $[a_i,a_{i+1}]$, $i \in [\![0,n-1]\!]$. Finalement

$$\boxed{\forall i \in [\![0,n]\!],\ \varphi_i \in E.}$$

(b) Unicité. Soient $i \in [\![0,n]\!]$ puis $(f,g) \in E^2$ tel que $\forall j \in [\![0,n]\!],\ f(a_j) = g(a_j) = \delta_{i,j}$. Alors, la fonction $f-g$ est affine sur chaque intervalle $[a_j,a_{j+1}]$, $0 \leq j \leq n-1$, et s'annule en chaque a_j. On en déduit que la fonction $f-g$ est nulle sur chaque intervalle $[a_j,a_{j+1}]$, $0 \leq j \leq n-1$, et finalement que la fonction $f-g$ est la fonction nulle. Ceci assure l'unicité de la fonction δ_i.

Existence. Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$. Pour $x \in [a,b]$, on pose

$$\delta_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_{i-1}}{a_i-a_{i-1}} \text{ si } x \in [a_{i-1},a_i] \\ \dfrac{x-a_{i+1}}{a_i-a_{i+1}} \text{ si } x \in]a_i,a_{i+1}] \\ 0 \text{ si } x \in [a,b] \setminus [a_{i-1},a_{i+1}] \end{cases}$$

• Pour $j \neq i$, on a $\delta_i(a_j) = 0$ et d'autre part, $\delta_i(a_i) = \dfrac{a_i-a_{i-1}}{a_i-a_{i-1}} = 1$.

• Ensuite, δ_i est continue sur $[a,a_{i-1}[$, $[a_{i-1},a_i]$, $]a_i,a_{i+1}]$ et $]a_{i+1},b]$. De plus, $\delta_i(a_{i-1}^-) = 0 = \delta_i(a_{i-1})$, $\delta_i(a_i^+) = 1 = \delta_i(a_i)$ et $\delta_i(a_{i+1}^+) = 0 = \delta_i(a_{i+1})$ et donc δ_i est continue sur $[a,b]$.
• δ_i est affine sur chaque intervalle $[a_j,a_{j+1}]$, $0 \leq j \leq n-1$.
Donc, δ_i convient.

Si $i=0$, on pose pour $x \in [a,b]$, $\delta_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a-a_1} \text{ si } x \in [a_0,a_1] \\ 0 \text{ si } x \in]a_1,b] \end{cases}$ et si $i=n$, on pose pour $x \in [a,b]$,

$\delta_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x-b}{a_{n-1}-b} \text{ si } x \in [a_{n-1},b] \\ 0 \text{ si } x \in [a,a_{n-1}[\end{cases}$. De nouveau, δ_0 et δ_n conviennent.

$$\boxed{\forall i \in [\![0,n]\!],\ \exists!\delta_i \in E/\ \forall j \in [\![0,n]\!],\ \delta_i(a_j) = \delta_{i,j}.}$$

2° **(a)** • E est contenu dans $\mathcal{C}([a,b])$ et la fonction nulle appartient à E.
• Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda f + \mu g$ est affine sur chaque intervalle $[a_i,a_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n$, et donc $\lambda f + \mu g \in E$.
Finalement

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}([a,b]).}$$

(b) • $\mathcal{B}$ est une famille d'éléments de E.

• Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre. Soit $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_j = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_j(a_i) = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{i,j} = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![0,n]\!],\ \lambda_i = 0.$$

Donc, $\mathcal{B}$ est une famille libre.

• Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E. Soit $f \in E$. Considérons

$$g = \sum_{j=0}^{n} f(a_j)\delta_j.$$

Puisque E est un espace vectoriel, g est un élément de E. Ensuite, g coïncide avec f en chaque a_i, $0 \leq i \leq n$, et puisque f et g sont affines sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$, f coïncide avec g sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$. On en déduit que $f = g = \sum_{j=0}^{n} f(a_j)\delta_j$. Ainsi, tout élément de E est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$ et donc $\mathcal{B}$ est génératrice de E.

Finalement

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E \text{ et donc } \dim(E) = n+1.}$$

(c) D'après 1°(a), $(\varphi_i)_{0\leq i\leq n}$ est une famille d'élément de E et d'après 2°(b), $\text{card}(\varphi_i)_{0\leq i\leq n} = n+1 = \dim(E) < +\infty$. Pour démontrer que $\mathcal{C}$ est une base de E, il suffit de démontrer que $\mathcal{C}$ est une famille libre.

Soit $(\lambda_j)_{0\leq j\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ etl que $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j\varphi_j = 0$. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Si $\lambda_i \neq 0$, on peut écrire

$$\varphi_i = -\frac{1}{\lambda_i}\sum_{j\neq i} \lambda_j\varphi_j.$$

Mais cette dernière égalité est impossible car la fonction $-\frac{1}{\lambda_i}\sum_{j\neq i} \lambda_j\varphi_j$ est dérivable en a_i alors que la fonction φ_i ne l'est pas. Donc $\lambda_i = 0$.

On a montré que la famille $(\varphi_i)_{0\leq i\leq n}$ est une famille libre et donc que

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } E.}$$

3° *Un cas particulier.*

D'après ce qui précède appliqué à $a_0 = u$, $a_1 = v$ et $a_2 = w$, $\exists!(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \ \forall x \in [u, w],\ g(x) = \alpha|x-u| + \beta|x-v| + \gamma|x-w|$. Or,

$$\left\{\begin{array}{l} g(u) = 0 \\ g(v) = 1 \\ g(w) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (v-u)\beta + (w-u)\gamma = 0 \\ (v-u)\alpha + (w-v)\gamma = 1 \\ (w-u)\alpha + (w-v)\beta = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \gamma = -\dfrac{v-u}{w-u}\beta \\ \alpha = -\dfrac{w-v}{w-u}\beta \\ -(v-u)\dfrac{w-v}{w-u}\beta - (w-v)\dfrac{v-u}{w-u}\beta = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = -\dfrac{w-u}{2(w-v)(v-u)} \\ \gamma = \dfrac{1}{2(w-v)} \\ \alpha = \dfrac{1}{2(v-u)} \end{array}\right.$$

Maintenant, pour $x > w$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2(v-u)}(x-u) - \frac{w-u}{2(w-v)(v-u)}(x-v) + \frac{1}{2(w-v)}(x-w) \\ &= \left(\frac{w-v}{2(w-v)(v-u)} - \frac{w-u}{2(w-v)(v-u)} + \frac{v-u}{2(w-v)(v-u)}\right)x - u\frac{w-v}{2(w-v)(v-u)} + \frac{v(w-u)}{2(w-v)(v-u)} - \frac{w(v-u)}{2(w-v)(v-u)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $x < u$, $g(x)$ est l'opposé de l'expression précédente et encore une fois $g(x) = 0$. g vérifie donc bien les conditions requises et finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{2(v-u)}|x-u| - \frac{w-u}{2(w-v)(v-u)}|x-v| + \frac{1}{2(w-v)}|x-w|.}$$

4° *Retour au cas général.*

(a) Pour $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\varphi_j = \sum_{i=0}^{n} \varphi_j(a_i)\delta_i = \sum_{i=0}^{n} |a_j - a_i|\delta_i.$$

Donc

$$\boxed{P = (|a_i - a_j|)_{0 \leq i,j \leq n}.}$$

(b) Soit $f \in E$. Notons X (resp. X') le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$). Puisque

$$f = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\delta_i,$$

et donc $X = (f(a_i))_{0 \leq i \leq n}$. D'autre part, les formules de changement de bases s'écrivent $X = PX'$ ou encore

$$X' = P^{-1}X.$$

Finalement

$$\boxed{\forall f \in E, \text{ les coordonnées de } f \text{ dans } \mathcal{C} \text{ sont les composantes du produit } P^{-1}X = (|a_i - a_j|)^{-1}_{0 \leq i,j \leq n}(f(a_i))_{0 \leq i \leq n}.}$$

5° **(a)** Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on a $a_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ et pour $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, on a $a_j - a_i = (j - i)\dfrac{b-a}{n}$. Donc,

$$\boxed{P = \frac{b-a}{n}(|j-i|)_{0 \leq i,j \leq n} = \frac{b-a}{n}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ n & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Ensuite, on a déjà

$$\det P = \left(\frac{b-a}{n}\right)^n \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ n & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dans ce nouveau déterminant, on retranche l'avant dernière colonne à la dernière, **puis** la colonne n° $(n-2)$ à la colonne n° $(n-1)$ et de manière générale, on effectue les transformations $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$, j variant de n à 2. Ces transformations ne modifient pas la valeur du déterminant et on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ n & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & & & \vdots \\ 2 & -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & -1 & 1 \\ n & -1 & \dots & \dots & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ensuite, on ajoute la dernière ligne à chacune des n premières et on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ n & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & & & \vdots \\ 2 & \times & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -2 & 0 \\ n & \times & \dots & \dots & \times & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n n 2^{n-1}.$$

Finalement

$$\boxed{\det(P) = (-1)^n n 2^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\right)^n.}$$

(b) Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. δ_i est continue, nulle en dehors de $]a_{i-1}, a_{i+1}[$, affine sur $[a_{i-1}, a_i]$ et sur $[a_i, a_{i+1}]$ et telle que $\delta_i(a_i) = 1$. D'après la question 3°, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2(a_i - a_{i-1})}|x - a_{i-1}| - \frac{a_{i+1} - a_{i-1}}{2(a_{i+1} - a_i)(a_i - a_{i-1})}|x - a_i| + \frac{1}{2(a_{i+1} - a_i)}|x - a_{i+1}| \\ &= \frac{n}{2(b-a)}\varphi_{i-1}(x) - \frac{n}{b-a}\varphi_i(x) + \frac{n}{2(b-a)}\varphi_{i+1}(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \delta_i = \frac{n}{2(b-a)}\left(\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}\right).}$$

(c) Ainsi, on a

$$\boxed{P^{-1} = \frac{n}{2(b-a)} \begin{pmatrix} ? & 1 & 0 & \dots & 0 & ? \\ ? & -2 & \ddots & \ddots & \vdots & ? \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 0 & ? \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 & ? \\ ? & \vdots & \ddots & \ddots & -2 & ? \\ ? & 0 & \dots & 0 & 1 & ? \end{pmatrix}.}$$

(d) Notons α_0, ..., α_n les coefficients de la colonne n° 0 de la matrice $\dfrac{2(b-a)}{n}P^{-1}$ et β_0, ..., β_n les coefficients de la colonne n° n.

$$P^{-1}P = I_n \Leftrightarrow \frac{n}{2(b-a)}\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \beta_0 \\ \alpha_1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots & \beta_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \vdots & \ddots & \ddots & -2 & \beta_{n-1} \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 & 1 & \beta_n \end{pmatrix} \frac{b-a}{n}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ n & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n\beta_0 & ? & \dots & \dots & ? & n\alpha_0+n-1 \\ n\beta_1 & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & n\alpha_1 - n \\ \vdots & 1 & & & & n\alpha_2 \\ n\beta_{n-2} & 0 & & & & \vdots \\ -n+n\beta_{n-1} & & & & \vdots & n\alpha_{n-1} \\ (n-1)+n\beta_n & ? & \dots & \dots & ? & n\alpha_n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ? & \dots & \dots & ? & 0 \\ 0 & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & 0 \\ 0 & ? & \dots & \dots & ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \beta_0 = \frac{1}{n} = \alpha_n,\ \beta_1 = \ldots = \beta_{n-2} = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-2} = 0,\ \beta_{n-1} = \alpha_1 = 1,\ \beta_n = -1 + \frac{1}{n} = \alpha_0$$

$$\boxed{P^{-1} = \frac{n}{2(b-a)}\begin{pmatrix} -1+\frac{1}{n} & 1 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{n} \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{n} & \dots & \dots & 0 & 1 & -1+\frac{1}{n} \end{pmatrix}.}$$

Exercice 2

1° **(a)** Les fonctions $x \mapsto -3i$ et $x \mapsto e^{ix} - 2$ sont continues sur $\mathbb{R}$. On sait alors que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ forme un sous-espace vectoriel de dimension 2 du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $D^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D'autre part, l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques est un sous-espace vectoriel de $D^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. $\mathcal{S}_{2\pi}$ est l'intersection de ces deux sous-espaces et est donc un sous-espace vectoriel de $D^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$$\boxed{\mathcal{S}_{2\pi} \text{ est un sous-espace vectoriel de } D^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}).}$$

(b) Soit φ une solution de E sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\psi(x) = \varphi(x + 2\pi)$. ψ est encore une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$. En effet, ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \psi''(x) - 3i\psi'(x) + (e^{3ix} - 2)\psi(x) &= \varphi''(x+2\pi) - 3i\varphi'(x+2\pi) + (e^{ix} - 2)\varphi(x+2\pi) \\ &= \varphi''(x+2\pi) - 3i\varphi'(x+2\pi) + (e^{i(x+2\pi)} - 2)\varphi(x+2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Puisque les fonctions $x \mapsto -3i$ et $x \mapsto e^{ix} - 2$ sont continues sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy permet d'affirmer que

$$\varphi \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \Leftrightarrow \varphi = \psi \Leftrightarrow \varphi(0) = \psi(0) \text{ et } \varphi'(0) = \psi'(0) \Leftrightarrow \varphi(0) = \varphi(2\pi) \text{ et } \varphi'(0) = \varphi'(2\pi).$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Une solution } \varphi \text{ de l'équation } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } 2\pi\text{-périodique si et seulement si} \\ \varphi(0) = \varphi(2\pi) \text{ et } \varphi'(0) = \varphi'(2\pi).\end{array}}$$

2° **(a)** Soit f une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$. f est en particulier 2π-périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait alors que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

(b) (i) • Soit φ une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. Alors φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\varphi''(x) = 3i\varphi'(x) - (e^{ix} - 2)\varphi(x).$$

Comme φ et φ' sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que φ'' est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et les coefficients de FOURIER de φ, φ' et φ'' sont bien définis.

• Soit $k \in \mathbb{Z}$. On sait que $c_k(\varphi') = ikc_k(\varphi)$ et que $c_k(\varphi'') = ikc_k(\varphi') = -k^2c_k(\varphi)$. D'autre part, en notant e_1 la fonction $x \mapsto e^{ix}$, $c_k(e_1\varphi) = c_{k-1}(\varphi)$. Par linéarité des coefficients de FOURIER, on a alors

$$\begin{aligned}\varphi \in \mathcal{S}_{2\pi} &\Rightarrow c_k(\varphi'') - 3ic_k(\varphi') + c_k(e_1\varphi) - 2c_k(\varphi) = 0 \Rightarrow (k^2 - 3k + 2)c_k(\varphi) = c_{k-1}(\varphi)\\ &\Rightarrow (k-1)(k-2)c_k(\varphi) = c_{k-1}(\varphi).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ (k-1)(k-2)c_k(\varphi) = c_{k-1}(\varphi).}$$

(ii) • Quand $k = 2$, on obtient en particulier $c_1(\varphi) = 0$.
• Soit maintenant $k \leq 1$. Si $c_k(\varphi) = 0$ alors $c_{k-1}(\varphi) = (k-1)(k-2)c_k(\varphi) = 0$.
Par récurrence descendante, on a montré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ k \leq 1 \Rightarrow c_k(\varphi) = 0.}$$

(iii) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$$c_k(\varphi) = \frac{1}{(k-1)(k-2)} \times \frac{1}{(k-2)(k-3)} \times \ldots \times \frac{1}{2\times 1}c_2 = \frac{1}{(k-1)!(k-2)!}c_2,$$

ce qui reste vrai quand $k = 2$.

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ c_k(\varphi) = \frac{1}{(k-1)!(k-2)!}c_2.}$$

3° Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!(k-2)!}e^{ikx}$. D'après 2°, tout élément de $\mathcal{S}_{2\pi}$ est nécessairement colinéaire à φ.

Réciproquement, la série de somme φ converge normalement sur $\mathbb{R}$ ainsi que les séries des dérivées première et seconde (car $\left|\frac{1}{(k-1)!(k-2)!}e^{ikx}\right| = \frac{1}{(k-1)!(k-2)!} = o(\frac{1}{k^2}$, $\left|\frac{1}{(k-1)!(k-2)!}(ik)e^{ikx}\right| = \frac{k}{(k-1)!(k-2)!} = o(\frac{1}{k^2}$ et $\left|\frac{1}{(k-1)!(k-2)!}(ik)^2e^{ikx}\right| = \frac{k^2}{(k-1)!(k-2)!} = o(\frac{1}{k^2})$. φ est donc deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi''(x) - 3i\varphi'(x) + (e^{ix} - 2)\varphi(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!(k-2)!}((ik)^2 - 3i(ik) - 2)e^{ikx} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!(k-2)!}e^{i(k+1)x}\\ &= -\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(k-1)(k-2)}{(k-1)!(k-2)!}e^{ikx} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!(k-3)!}e^{ikx}\\ &= \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!(k-3)!}e^{ikx} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!(k-3)!}e^{ikx} = 0.\end{aligned}$$

φ est donc un élément de $\mathcal{S}_{2\pi}$ et puisque $\mathcal{S}_{2\pi}$ est un espace vectoriel, $\mathcal{S}_{2\pi} = \text{Vect}(\varphi)$.
Comme $\varphi(0) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!(k-2)!} \neq 0$, φ n'est pas nulle. Finalement

$$\boxed{\mathcal{S}_{2\pi} \text{ est une droite vectorielle.}}$$

Comme l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2, on en déduit encore que

$$\boxed{\text{les solutions de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ ne sont pas toutes } 2\pi\text{-périodiques.}}$$

4° **(a)** Pour tout réel x, on a

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{(k-1)!(k-2)!} \text{ et } \varphi_2(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{(k-1)!(k-2)!}.$$

En particulier,

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est paire et } \varphi_2 \text{ est impaire.}}$$

(b) $\varphi_1(0) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!(k-2)!} > 0$.

(c) On a

$$\varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi/2)}{(k-1)!(k-2)!} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(p\pi)}{(2p-1)!(2p-2)!} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p-1)!(2p-2)!}.$$

Maintenant la suite $\left(\dfrac{(-1)^p}{(2p-1)!(2p-2)!}\right)_{p\geq 1}$ est décroissante. La série de terme général $\dfrac{(-1)^p}{(2p-1)!(2p-2)!}$ est donc une série alternée. On sait alors que la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p-1)!(2p-2)!}$ est du signe de son premier terme à savoir -1. Donc

$$\varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

On a aussi $\varphi_1\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \varphi_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$. Puis,

$$\varphi_1(\pi) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi)}{(k-1)!(k-2)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(k-2)!},$$

cette dernière somme étant du signe de son premier terme à savoir 1. Donc $\varphi_1(\pi) > 0$.

$$\boxed{\varphi_1(0) > 0,\ \varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0,\ \varphi_1(\pi) > 0,\ \varphi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0 \text{ et } \varphi_1(2\pi) > 0.}$$

Ainsi, φ_1 change de signe au moins quatre fois dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Exercice 3

1° **(a)** φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

On en déduit tableau de variations de la fonction φ.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

On en déduit encore le nombre de solutions de l'équation $\varphi(x) = \lambda$ en fonction de λ :

- Si $\lambda \in]-\infty, 0]$, l'équation $\varphi(x) = \lambda$ admet une solution et une seule.
- Si $\lambda \in]0, \frac{1}{e}[$, l'équation $\varphi(x) = \lambda$ admet exactement deux solutions.
- Si $\lambda = \frac{1}{e}$, l'équation $\varphi(x) = \lambda$ admet une solution et une seule à savoir $x = 1$.
- Si $\lambda \in]\frac{1}{e}, +\infty[$, l'équation $\varphi(x) = \lambda$ n'admet pas de solution.

(b) φ est de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et φ' est strictement positive sur $]0, +\infty[$. On sait alors que $\varphi_{/]0,+\infty[}$ définit un C^∞-difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $]\lim_{x\to-\infty} \varphi(x), \lim_{x\to 0} \varphi(x)[=]0, +\infty[$.

$\varphi_{/]0,+\infty[}$ définit un C^∞-difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

2° f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On sait alors que si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, le point (x_0, y_0) est un point critique de f. Or

$$df_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y(1-x)e^{-x-y} = 0 \\ x(1-y)e^{-x-y} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y(1-x) = 0 \\ x(1-y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\}.$$

Maintenant, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$r((x,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}((x,y)) = y(x-2)e^{-x-y},\ t((x,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}((x,y)) = x(y-2)e^{-x-y} \text{ et}$$
$$s((x,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}((x,y)) = (1-x)(1-y)e^{-x-y}.$$

Ainsi
- $rt - s^2((0,0)) = 0 \times 0 - 1^2 = -1 < 0$ et f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.
- $rt - s^2((1,1)) = (-1) \times (-1) - 0^2 = 1 > 0$ et f admet un extremum local en $(1, 0)$. De plus, $r((1,1)) = -1 < 0$ et f présente un maximum local en $(1, 1)$. Enfin, puisque $\lim_{x\to-\infty} f((x,x)) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-2x}$, f n'est pas majorée et ce maximum n'est pas un maximum global.

f admet un maximum local en $(1, 1)$ égal à $\frac{1}{e^2}$. Ce maximum n'est pas un maximum global.

3° **(a)** Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(x_0, y_0) \in \Gamma_\lambda \Leftrightarrow \lambda = f((x_0, y_0)),$$

ce qui montre l'existence et l'unicité d'une ligne de niveau passant par (x_0, y_0).

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Γ_λ est la courbe d'équation $f((x, y)) = \lambda$ ou encore

$$\Gamma_\lambda\ :\ xye^{-x-y} = \lambda.$$

Soit $(x_0, y_0) \in \Gamma_\lambda$. On a vu que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et que les points critiques de f sont les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Si (x_0, y_0) n'est pas l'un de ces deux points, on sait que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f((x_0, y_0))$ est un vecteur normal à la tangente en (x_0, y_0) à Γ_λ. Un vecteur directeur de la tangente à Γ_λ en (x_0, y_0) est donc $(x_0(1-y_0)e^{-x_0-y_0}, -y_0(1-x_0)e^{-x_0-y_0}$ ou aussi $(x_0(1-y_0), y_0(x_0-1)$.

si $(x_0, y_0) \notin \{(0, 0), (1, 1\}$, un vecteur directeur de la tangente à Γ_λ en (x_0, y_0) est $(x_0(1-y_0), y_0(x_0-1)$.

(c) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ puis $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x, y) \in \Gamma_\lambda \Leftrightarrow xye^{-x-y} = \lambda \Leftrightarrow yxe^{-y-x} = \lambda \Leftrightarrow (y, x) \in \Gamma_\lambda.$$

Pour tout réel λ, Γ_λ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

4° Soit $\lambda > 0$.

(a) Γ_λ est la courbe d'équation $\varphi(x)\varphi(y) = \lambda$. Comme $\varphi(]0,+\infty[) \subset]0,+\infty[$ et $\varphi(]-\infty,0] \subset]-\infty,0]$, on a déjà

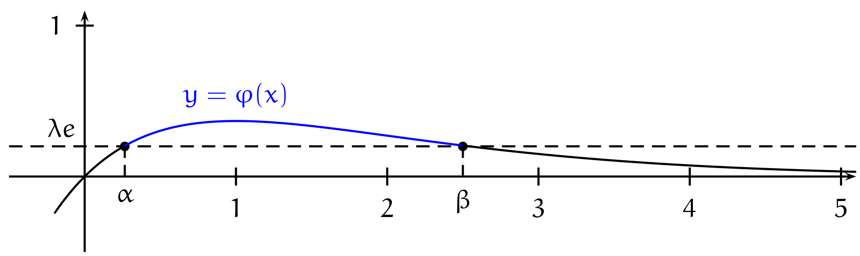
$$(x,y) \in \Gamma_\lambda^+ \Rightarrow x > 0 \text{ et } \varphi(y) = \frac{\lambda}{\varphi(x)} > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ et } y > 0.$$

Donc $\Gamma_\lambda^+ \subset]0,+\infty[^2$.

D'après la question 1°, pour $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, on a $0 < \varphi(x)\varphi(y) \leq \frac{1}{e^2}$. Donc si $\Gamma_\lambda^+ \neq \varnothing$, nécessairement $\lambda \in]0, \frac{1}{e^2}]$.
Réciproquement, si $\lambda \in]0, \frac{1}{e^2}]$ alors $\sqrt{\lambda} \in]0, \frac{1}{e}]$ et d'après la question 1°, l'équation $\varphi(x) = \sqrt{\lambda}$ a au moins une solution notée x_0. Mais alors $\varphi(x_0)\varphi(x_0) = \lambda$ et donc $(x_0, x_0) \in \Gamma_\lambda^+$. Γ_λ^+ n'est donc pas vide.

$$\boxed{\forall \lambda \in]0,+\infty[,\ \Gamma_\lambda^+ \neq \varnothing \Leftrightarrow \lambda \in]0, \frac{1}{e^2}].}$$

(b) Soient $\lambda \in]0, \frac{1}{e^2}]$ puis $(x,y) \in \Gamma_\lambda^+$. On a $0 < \varphi(x) \leq \frac{1}{e}$ et $0 < \varphi(y) \leq \frac{1}{e}$. Donc, $\varphi(x) = \frac{\lambda}{\varphi(y)} \geq \lambda e$ et $\varphi(y) = \frac{\lambda}{\varphi(x)} \geq \lambda e$. Maintenant, le nombre $\mu = \lambda e$ est élément de $]0, \frac{1}{e}]$ et l'équation $\varphi(t) = \mu$ admet deux solutions dans $]0,+\infty[$ notées α et β avec $\alpha < \beta$ (α et β sont confondus si et seulement si $\lambda = \frac{1}{e^2}$). L'étude de φ montre alors que x et y sont dans $[\alpha, \beta]$. Par suite, $\Gamma_\lambda^+ \subset [\alpha,\beta]^2$ et donc Γ_λ^+ est bornée.



(c) Soient $\lambda \in]0,+\infty[$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x,y) \in \Gamma_\lambda^- \Rightarrow x < 0 \text{ et } \varphi(x)\varphi(y) = \lambda \Rightarrow \varphi(x) < 0 \text{ et } \varphi(y) < 0 \Rightarrow x < 0 \text{ et } y < 0.$$

Donc $\Gamma_\lambda^- \subset]-\infty, 0[^2$.

Soit alors $(x,y) \in]-\infty,0[^2$. D'après la question 1°, $\varphi_{/]0,+\infty[}$ définit un C^∞-difféomorphisme de $]-\infty,0[$ sur lui-même. On peut donc écrire

$$(x,y) \in \Gamma_\lambda^- \Leftrightarrow \varphi(y) = \frac{\lambda}{\varphi(x)} \Leftrightarrow y = \varphi^{-1}\left(\frac{\lambda}{\varphi(x)}\right).$$

Pour $x < 0$, on pose $g_\lambda(x) = \varphi^{-1}\left(\frac{\lambda}{\varphi(x)}\right)$.

• La fonction φ est de classe C^∞ sur $]-\infty,0[$ à valeurs dans $]-\infty,0[$. Donc la fonction $x \mapsto \frac{\lambda}{\varphi(x)}$ est de classe C^∞ sur $]-\infty,0[$ à valeurs dans $]-\infty,0[$. Comme φ^{-1} est de classe C^∞ sur $]-\infty,0[$,

$$\boxed{g_\lambda \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]-\infty,0[.}$$

• Puisque φ est strictement croissante sur $]-\infty,0[$, φ^{-1} est strictement croissante sur $]-\infty,0[$. Ensuite, puisque φ est strictement croissante et strictement négative, la fonction $x \mapsto \frac{\lambda}{\varphi(x)}$ est strictement décroissante et strictement négative sur $]-\infty,0[$ et puisque φ^{-1} est strictement croissante sur $]-\infty,0[$,

$$\boxed{g_\lambda \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty,0[.}$$

• Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $\varphi(x)$ tend vers 0 par valeurs inférieures et donc $\dfrac{\lambda}{\varphi(x)}$ tend vers $-\infty$. Or $\lim\limits_{y\to-\infty}\varphi^{-1}(y)=-\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g_\lambda(x)=-\infty.}$$

Quand x tend vers $-\infty$, $\varphi(x)$ tend vers $-\infty$ et donc $\dfrac{\lambda}{\varphi(x)}$ tend vers 0 par valeurs inférieures. Or $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y<0}}\varphi^{-1}(y)=0$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g_\lambda(x)=0.}$$

5° **(a)** Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Les formules de changement de repère s'écrivent

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X-Y\\ X+Y\end{pmatrix}.$$

Soit M un point du plan dont les coordonnées dans le repère initial sont notées (x,y) et les coordonnées dans le nouveau repère sont notées (X,Y).

$$M\in\Gamma_\lambda\Leftrightarrow xye^{-(x+y)}=\lambda\Leftrightarrow (X-Y)(X+Y)e^{-2X}=\lambda\Leftrightarrow (X^2-Y^2)e^{-2X}=\lambda.$$

(b) Soient $\lambda<0$ et M un point du plan dont les coordonnées dans le repère initial sont notées (x,y) et les coordonnées dans le nouveau repère sont notées (X,Y).

$$\begin{aligned}
M\in\Gamma_\lambda^-&\Leftrightarrow x<0 \text{ et } xye^{-x-y}=\lambda\Leftrightarrow X<Y \text{ et } (X^2-Y^2)e^{-2X}=\lambda\Leftrightarrow X<Y \text{ et } |Y|=\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}\\
&\Leftrightarrow (X<Y \text{ et } Y=\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}) \text{ ou } (X<Y \text{ et } Y=-\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}})\\
&\Leftrightarrow Y=\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}} \text{ (car } \sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}>\sqrt{X^2}=|X|\geq X \text{ et } -\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}<-\sqrt{X^2}=-|X|\leq X).
\end{aligned}$$

Pour $X\in\mathbb{R}$, posons $G_\lambda(X)=\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}$. G_λ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. G_λ' est du signe de $2X-2\lambda e^{2X}$ ou encore de $2Xe^{-2X}-2\lambda$ ou enfin de $\varphi(2X)-2\lambda$. La question 1° montre que l'équation $\varphi(2X)=2\lambda$ admet une et une seule solution $\alpha<0$ et de plus, pour $X<\alpha$, $\varphi(2X)-2\lambda<0$ et pour $X>\alpha$, $\varphi(2X)-2\lambda>0$. G_λ est strictement décroissante sur $]-\infty,\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$.

Quand X tend vers $+\infty$, $G_\lambda(x)\sim\sqrt{-\lambda}e^X$. Par suite, $\lim\limits_{X\to+\infty}G_\lambda(X)=+\infty$ et de plus Γ_λ^- admet une branche parabolique de direction (OY).

Quand X tend vers $-\infty$, $G_\lambda(X)+X=\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}+X=\dfrac{-\lambda e^{2X}}{\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}-X}$. Cette dernière expression tend vers 0 quand X tend vers $-\infty$. Par suite, $\lim\limits_{X\to-\infty}G_\lambda(X)=+\infty$ et Γ_λ^- admet la droite d'équation $Y=-X$ est asymptote à Γ_λ^- quand X tend vers $-\infty$.

Γ_λ^+ est le graphe de la fonction $Y=-\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}$. Γ_λ^+ est donc la symétrique de Γ_λ^- par rapport à la droite d'équation $X=0$ dans le nouveau repère ou encore $x=y$ dans le repère initial.

(c) Soient $\lambda\in]0,\dfrac{1}{e^2}]$ et M un point du plan dont les coordonnées dans le repère initial sont notées (x,y) et les coordonnées dans le nouveau repère sont notées (X,Y).

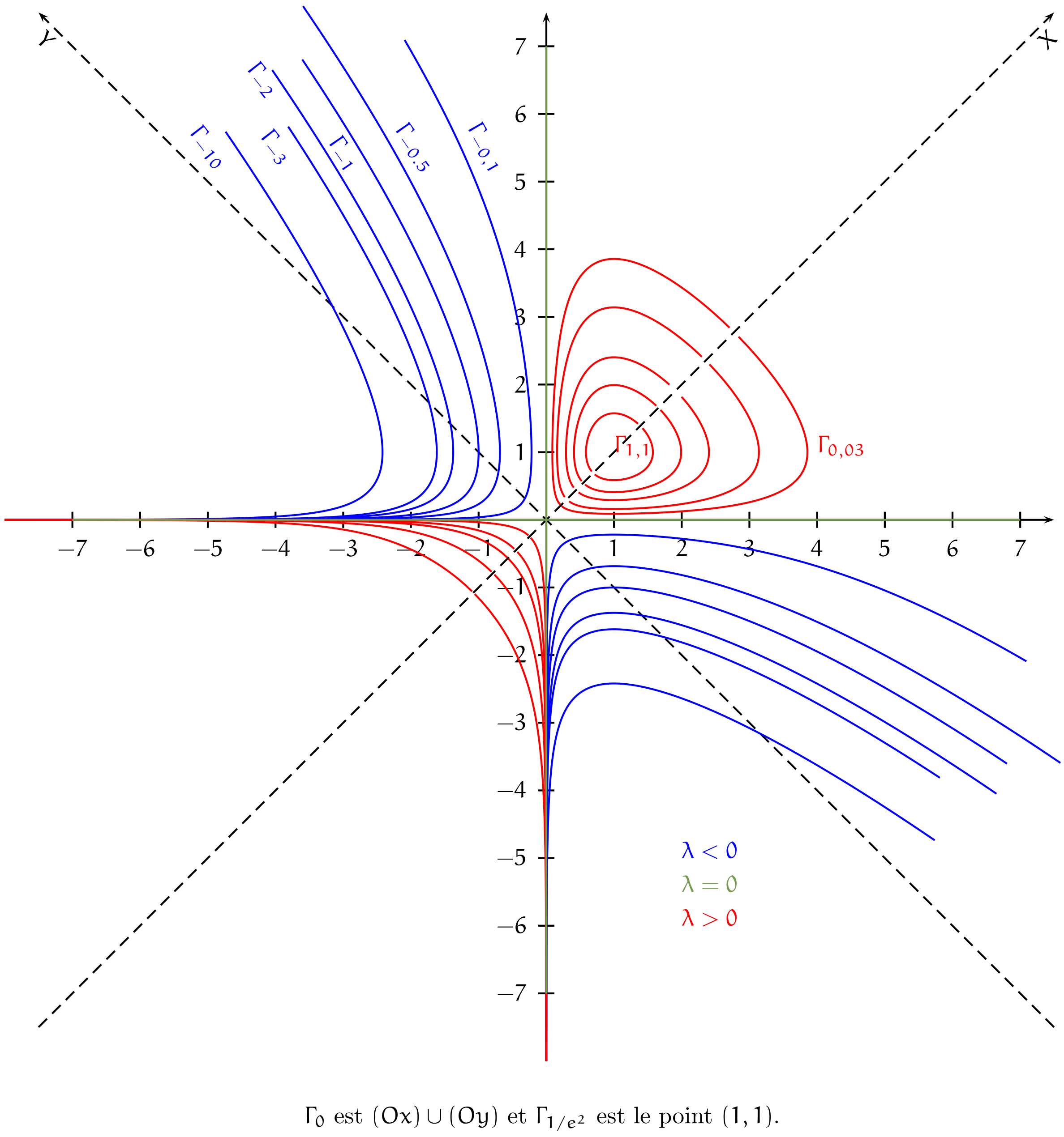
$$\begin{aligned}
M\in\Gamma_\lambda^+&\Leftrightarrow x>0 \text{ et } xye^{-x-y}=\lambda\Leftrightarrow Y<X \text{ et } (X^2-Y^2)e^{-2X}=\lambda\Leftrightarrow Y<X \text{ et } |Y|=\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}\\
&\Leftrightarrow (Y<X \text{ et } Y=\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}) \text{ ou } (Y<X \text{ et } Y=-\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}).
\end{aligned}$$

Maintenant, si $Y<X$ et $Y=\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}$, nécessairement $X>0$ et dans ce cas, on a $Y=\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}<X$. Si $Y<X$ et $Y=-\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}$, alors $Y\geq-\sqrt{X^2}=-|X|$ et on ne peut avoirs $X\leq 0$ car alors $Y\geq-(-X)=X$. Dans ce cas, on a alors $Y\leq 0<X$. Ainsi, dans tous les cas, $X>0$ et $Y=\pm\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}$. Γ_λ^+ est donc la réunion de la courbe d'équation $Y=\sqrt{X^2-\lambda e^{2X}}$, $X>0$ et de la symétrique de cette courbe par rapport à (OX).

Pour $X > 0$, posons $G_\lambda(X) = \sqrt{X^2 - \lambda e^{2X}}$. Pour $X > 0$, $G_\lambda(X)$ existe si et seulement si $(Xe^{-X})^2 - \lambda \geq 0$ ou encore $\varphi(X) = |\varphi(X)| \geq \sqrt{\lambda}$. Puisque $\sqrt{\lambda} \in]0, \frac{1}{e}]$, l'équation $\varphi(X) = \sqrt{\lambda}$ admet deux solutions α et β (confondues quand $\lambda = \frac{1}{e^2}$ telles que $0 < \alpha \leq 1 \leq \beta$ et G_λ est définie sur $[\alpha, \beta]$, dérivable sur $]\alpha, \beta[$.

Pour $X \in]\alpha, \beta[$, $G'_\lambda(X)$ est du signe de $2X - 2\lambda e^{2X}$ ou encore $(2X)e^{-2X} - 2\lambda$ ou enfin $\varphi(2X) - 2\lambda$. Comme $0 < 2\lambda \leq \frac{2}{e^2} = \frac{2}{e} \times \frac{1}{e} < \frac{1}{e}$, l'équation $\varphi(2X) = 2\lambda$ a toujours deux solutions γ et δ telles que $\gamma < \delta$. Il s'agit maintenant de comparer α, β, γ et δ ce qui ne sera pas fait ici, ce problème devenant insupportable.

6°



Γ_0 est $(Ox) \cup (Oy)$ et Γ_{1/e^2} est le point $(1, 1)$.

