**SESSION 2003**

## Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

### Epreuve de Mathématiques A MP

---

# Partie I

**1.** On sait que pour $x \in [0,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \text{ et } \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Donc, pour $x \in [0,1[$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{2} x^n = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1}.$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1}.}$$

**2.** **(i)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_n = \ln\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{n!}{(n+1)!}\frac{e^n}{e^{n+1}}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = (n+\frac{1}{2})\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{2\times\frac{1}{2n+1}}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) - 1 = \frac{1}{2x_n}\ln\left(\frac{1+x_n}{1-x_n}\right) - 1.$$

Maintenant, $0 \leq x_n = \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{3} < 1$ et donc

$$v_n = \frac{1}{2x_n}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x_n^{2i+1}}{2i+1}\right) - 1 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_n^{2i+1}}{2i} + \frac{x_n}{x_n} - 1 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_n^{2i}}{2i+1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_n^{2i}}{2i+1}.}$$

**(ii)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $x_n \neq 1$,

$$0 \leq v_n = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_n^{2i}}{2i+1} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_n^{2i}}{3} = \frac{1}{3} \times x_n^2 \times \frac{1}{1-x_n^2} = \frac{x_n^2}{3(1-x_n^2)} = \frac{1}{3((2n+1)^2-1)} = \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq v_n \leq \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.}$$

**(iii) a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 \leq v_n = \ln(U_n) - \ln(U_{n+1})$ et donc $\ln(U_{n+1}) \leq \ln(U_n)$.

$$\boxed{\text{La suite } (\ln(U_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

**(b)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\ln(U_n) - \ln(U_{n+1}) \leq \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$ et donc

$$\ln(U_n) - \frac{1}{12n} \leq \ln(U_{n+1}) - \frac{1}{12(n+1)}.$$

$$\boxed{\text{La suite } (\ln(U_n) - \frac{1}{12n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

**3.** La suite $(\ln(U_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et la suite $(\ln(U_n) - \dfrac{1}{12n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. De plus la différence de ces deux suites tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Les deux suites $(\ln(U_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\ln(U_n) - \dfrac{1}{12n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes et en particulier convergentes. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(U_n)$. Alors $U_n$ tend vers $e^\ell$ qui est un réel strictement positif.

$$\boxed{\text{La suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers une valeur strictement positive.}}$$

# Partie II

**1.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \dfrac{n^{n-1}}{n!}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n n!}{n^{n-1}(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

Or quand $n$ tend vers $+\infty$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n-1} = e^{(n-1)\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{(n+o(n))(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{1+o(1)}$. Donc, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers $e$ quand $n$ tend vers $+\infty$ et d'après la règle de d'Alembert

$$\boxed{R = \frac{1}{e}.}$$

**2.** D'après la formule de Stirling,

$$\frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{n-1}e^{-n}}{\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{3/2}} > 0.$$

Puisque $\dfrac{3}{2} > 1$, la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge et il en est de même de la série de terme général $\dfrac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}$.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!} \text{ converge.}}$$

**3.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}]$. Posons $f_n(x) = \dfrac{n^{n-1}x^n}{n!}$. On a alors

$$|f_n(x)| = \frac{n^{n-1}|x|^n}{n!} \leq \frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}.$$

Comme la série numérique de terme général $\dfrac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}$ converge, la série de fonctions de terme général $f_n$ converge normalement sur $[-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}]$.

**4.** Puisque $R = \dfrac{1}{e}$, on sait que $]-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}[ \subset D_f \subset [-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}]$ puis d'après la question précédente, $D_f = [-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}]$. Maintenant, la série de fonctions de terme général $f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}]$ et puisque chaque fonction $f_n$ est continue sur $[-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}]$,

$$\boxed{f \text{ est continue sur } [-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}].}$$

## Partie III

**1.** La fonction $\varphi : x \mapsto \ln(1+x)$ est deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$, de dérivée seconde la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ qui est strictement négative sur $[0,+\infty[$. La fonction $\varphi$ est donc strictement concave et son graphe est strictement au-dessous de sa tangente au point $(0,0)$ sur $]0,+\infty[$ ou encore

$$\forall x > 0,\ \ln(1+x) < x.$$

Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(1+\dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}$ puis $1+\dfrac{1}{n} < e^{1/n}$ et finalement $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.}$$

**2.** Puisque $f$ est somme d'une série entière sur $[-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}]$, on sait que $f$ est de classe $C^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence $]-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}[$ et que les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. En particulier,

$$\boxed{\forall x \in ]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}x^n.}$$

**3.** Soit $x \in ]-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}[$.

• Si $x \in [0,\dfrac{1}{e}[$ on a déjà

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}x^n \geq 1 > 0.$$

• Si $x \in ]-\dfrac{1}{e},0[$, puisque la série de terme général $\dfrac{(n+1)^n}{n!}x^n$ converge, on sait que l'on peut associer les termes deux à deux pour obtenir

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n!}|x|^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{(2p+1)^{2p}}{(2p)!}|x|^{2p} - \frac{(2p+2)^{2p+1}}{(2p+1)!}|x|^{2p+1}\right).$$

Maintenant, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\dfrac{(2p+2)^{2p+1}}{(2p+1)!}|x|^{2p+1}}{\dfrac{(2p+1)^{2p}}{(2p)!}|x|^{2p}} = \left(\frac{2p+2}{2p+1}\right)^{2p+1}|x| = \left(1+\frac{1}{2p+1}\right)^{2p+1}|x|$$

$$< e \times \frac{1}{e} = 1 \text{ (d'après III.1.)}.$$

Par suite, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{(2p+1)^{2p}}{(2p)!}|x|^{2p} - \dfrac{(2p+2)^{2p+1}}{(2p+1)!}|x|^{2p+1}\right) > 0$ et donc encore une fois $f'(x) > 0$.

Ainsi, la fonction $f'$ est strictement positive sur $]-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}[$ et donc

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } ]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}[.}$$

# Partie IV

**1.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
A_{N+1} - A_N &= \frac{(2N+1)^{2N}}{(2N+1)!}\left(-\frac{1}{e}\right)^{2N+1} - \frac{(2N+2)^{2N+1}}{(2N+2)!}\left(-\frac{1}{e}\right)^{2N+2} \\
&= \frac{1}{e^{2N+2}(2N+2)!}(-e(2N+1)^{2N+1} + (2N+2)^{2N+1}) \\
&= \frac{(2N+1)^{2N+1}}{e^{2N+2}(2N+2)!}\left(\left(\frac{2N+2}{2N+1}\right)^{2N+1} - e\right) = \frac{(2N+1)^{2N+1}}{e^{2N+2}(2N+2)!}\left(\left(1+\frac{1}{2N+1}\right)^{2N+1} - e\right) < 0.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
B_{N+1} - B_N &= \frac{(2N+2)^{2N+1}}{(2N+2)!}\left(-\frac{1}{e}\right)^{2N+2} + \frac{(2N+3)^{2N+2}}{(2N+3)!}\left(-\frac{1}{e}\right)^{2N+3} \\
&= \frac{1}{e^{2N+3}(2N+3)!}(e(2N+2)^{2N+2} - (2N+3)^{2N+2}) \\
&= \frac{(2N+2)^{2N+2}}{e^{2N+3}(2N+3)!}\left(e - \left(\frac{2N+3}{2N+2}\right)^{2N+2}\right) = \frac{(2N+2)^{2N+2}}{e^{2N+3}(2N+3)!}\left(e - \left(1+\frac{1}{2N+2}\right)^{2N+2}\right) > 0.
\end{aligned}$$

Enfin, d'après la formule de Stirling,

$$\begin{aligned}
A_N - B_N &= \frac{(2N+1)^{2N}}{(2N+1)!}\left(-\frac{1}{e}\right)^{2N} = \frac{(2N+1)^{2N}}{(2N+1)!e^{2N}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2N+1)^{2N}}{\sqrt{2\pi(2N+1)}(2N+1)^{2N+1}e^{-(2N+1)}e^{2N}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{4\sqrt{\pi}N^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(A_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, la suite $(B_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(A_N - B_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $0$. Finalement

$$\boxed{\text{les suites } (A_N)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (B_N)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes.}}$$

**2.** D'après 1.,

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ B_N \leq f\left(-\frac{1}{e}\right) \leq A_N.}$$

**3.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$A_N - B_N < 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{(2N+1)^{2N}}{(2N+1)!e^{2N}} < 10^{-2} \Rightarrow \frac{(2N+1)^{2N}}{(2N+1)!e^{2N}} < \frac{10^{-2}}{2} = 0,005.$$

La machine donne

| $N$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_N - B_N$ | $1$ | $0,203\ldots$ | $0,095\ldots$ | $0,057\ldots$ | $0,039\ldots$ |

Ainsi, $0 \leq A_4 - B_4 < \dfrac{10^{-2}}{2} < 10^{-2}$.

**4.** La valeur exacte de $A_4$ est une valeur approchée de $f\left(-\dfrac{1}{e}\right)$ à $\dfrac{10^{-2}}{2}$ près. Une valeur approchée de $A_4$ à $\dfrac{10^{-2}}{2}$ près est donc une valeur approchée de $f\left(-\dfrac{1}{e}\right)$ à $10^{-2}$ près. La machine donne $A_4 = \displaystyle\sum_{n=1}^{8} \frac{n^{n-1}}{n!}\left(-\frac{1}{e}\right)^n = -0,270\ldots$ et donc

$$\boxed{f\left(-\frac{1}{e}\right) = -0,27 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

# Partie V

**1.** $\varphi$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrons alors par récurrence sur $i \in [\![0, m]\!]$ que

$$\forall i \in [\![0, m]\!],\ \exists P_i \in \mathbb{R}[X] /\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(i)}(x) = P_i(e^x)(1 - e^x)^{m-i}.$$

• Le résultat est vrai pour $i = 0$ avec $P_0 = 1$.
• Soit $i \in [\![0, m-1]\!]$. Supposons qu'il existe un polynôme $P_i$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(i)}(x) = P_i(e^x)(1 - e^x)^{m-i}$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi^{(i+1)}(x) &= e^x P_i'(x)(1 - e^x)^{m-i} - (m-i)e^x P_i(e^x)(1 - e^x)^{m-i-1}\\ &= e^x(P_i'(e^x)(1 - e^x) - (m-i)P_i(e^)) (1 - e^x)^{m-i-1}\\ &= P_{i+1}(e^x)(1 - e^x)^{m-(i+1)} \text{ avec } P_{i+1} = X(P_i'(1 - X) - (m-i)P_i).\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall i \in [\![0, m]\!],\ \exists P_i \in \mathbb{R}[X] /\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(i)}(x) = P_i(e^x)(1 - e^x)^{m-i}.}$$

**2.** On en déduit en particulier que pour $m \geq 2$, $\varphi^{(m-1)}(0) = 0$. Mais, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{m} C_m^n (-1)^n e^{nx},$$

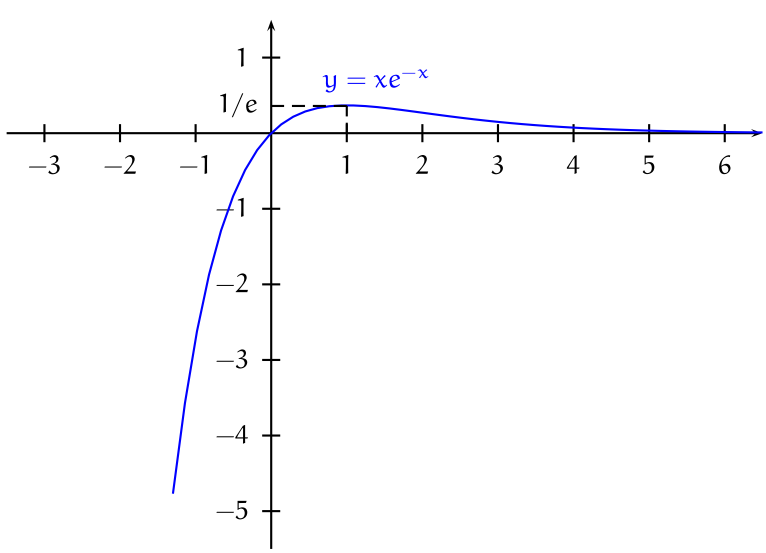
et donc

$$\varphi^{(m-1)}(x) = \sum_{n=0}^{m} C_m^n (-1)^n n^{m-1} e^{nx} = \sum_{n=1}^{m} C_m^n (-1)^n n^{m-1} e^{nx}.$$

Quand $x = 0$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} C_m^n (-1)^n n^{m-1} = 0$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ \left(m \geq 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{m} C_m^n (-1)^n n^{m-1} = 0\right).}$$

**3.** $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $y \in \mathbb{R}$, $g'(y) = (1-y)e^{-y}$. $g$ est donc croissante sur $]-\infty, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus, $\displaystyle\lim_{y \to -\infty} g(y) = \lim_{y \to -\infty} \frac{g(y)}{y} = -\infty$, $g(0) = 0$, $g(1) = \dfrac{1}{e}$ et $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} g(y) = +\infty$. On en déduit le graphe de $g$.



**4.** La fonction $g$ est continue et strictement croissante sur $]-1,0[$ et réalise donc une bijection de $]-1,0[$ sur $]g(-1),g(0)[=]-e,0[$. Comme $-e < -\dfrac{1}{e} < 0$, il existe un réel $\alpha$ et un seul dans $]-1,0[$ tel que $g(\alpha) = -\dfrac{1}{e}$.

Comme $g$ est croissante sur $[\alpha,1]$, donc si $y \in [\alpha,1]$, $g(y) \in [g(\alpha, g(1)] = [-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}]$.

**5.** Soit $y \in [\alpha,1]$. Alors d'après II. et V.4., $f(ye^{-y})$ existe. De plus,

$$\begin{aligned}
f(ye^{-y}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}(ye^{-y})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}y^n}{n!}e^{-ny} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{n^{n-1}y^n}{n!p!}n^py^p\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{n^{n+p-1}}{n!p!}y^{n+p}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=n}^{+\infty}(-1)^{m-n}\frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}y^m\right) \text{ (en posant } m=n+p \text{ ou encore } p=m-n).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall y \in [\alpha,1],\ f(ye^{-y}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=n}^{+\infty}(-1)^{m-n}\frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}y^m\right).}$$

**6.** Soit $y \in [-\alpha,\alpha]$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{m=n}^{+\infty}|z_{m,n}| = \sum_{m=n}^{+\infty}\frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}|y|^m = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{n^{p+n-1}}{n!p!}|y|^{p+n} = \frac{n^{n-1}|y|^n}{n!}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{n^p}{p!}|y|^p = \frac{n^{n-1}|y|^n}{n!}(|y|e^{|y|})^n.$$

Maintenant, puisque $\alpha < 0$, l'égalité $\alpha e^{-\alpha} = -\dfrac{1}{e}$ s'écrit encore $|\alpha|e^{|\alpha|} = \dfrac{1}{e}$. Mais alors, puisque $|y| \leq |\alpha$, on a $|y|e^{|y|} \leq |\alpha|e^{|\alpha|} = \dfrac{1}{e}$.

La question II.3. permet alors d'affirmer que la série numérique de terme général $\dfrac{n^{n-1}|y|^n}{n!}(|y|e^{|y|})^n$ converge et a pour somme $f(|y|e^{|y|})$. On a montré que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=n}^{+\infty}|z_{m,n}|\right) < +\infty,$$

et donc que

$$\boxed{\text{la suite double } (z_{m,n})_{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}} \text{ est sommable.}}$$

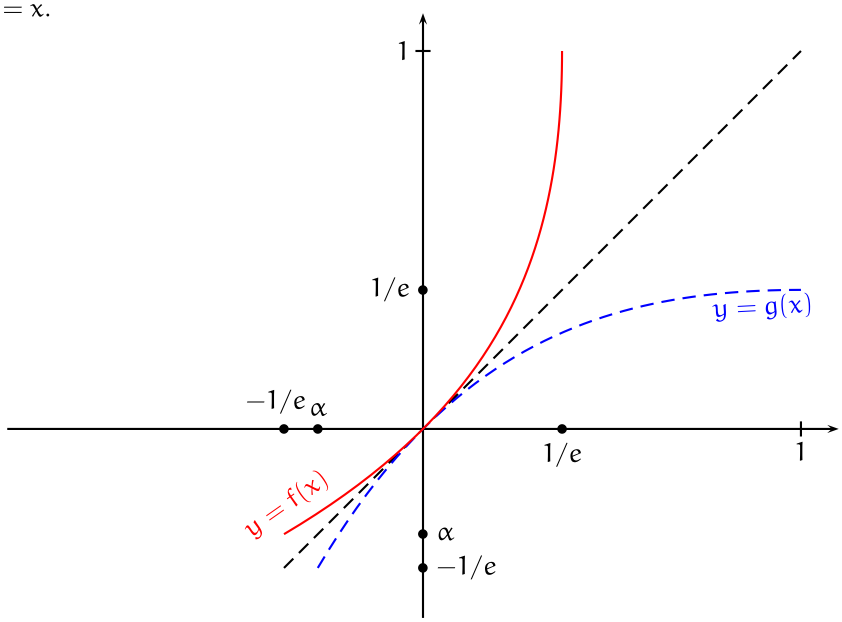
**7.** Puisque la suite double $(z_{m,n})_{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable, le théorème de Fubini nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
f(ye^{-y}) &= \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}(-1)^{m-n}\frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}y^m\right) \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\frac{m!n^{m-1}}{n!(m-n)!}\right)y^m = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\sum_{n=1}^{m}(-1)^nC_m^n n^{m-1}\right)y^m \\
&= y + \sum_{m=2}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\sum_{n=1}^{m}(-1)^nC_m^n n^{m-1}\right)y^m \\
&= y \text{ (d'après V.2.)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall y \in [-\alpha,\alpha],\ f(ye^{-y}) = y.}$$

**8.** La fonction $g$ réalise une bijection de $[\alpha, 1]$ sur $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$ et pour $y \in [\alpha, 1]$, on a $f(g(y)) = y$. $f$ est donc la réciproque de la fonction $\begin{array}{cccc} g : & [\alpha, 1] & \rightarrow & [-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}] \\ & y & \mapsto & ye^{-y} \end{array}$. On sait alors que les deux graphes sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.




**9.** $g$ est dérivable en $\alpha$ et $g'(\alpha) \neq 0$. Donc $f$ est dérivable en $g(\alpha) = -\frac{1}{e}$. De plus

$$f'\left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{g'(\alpha)} = \frac{1}{(1-\alpha)e^{-\alpha}} = \frac{1}{e^{-\alpha} + e^{-1}}.$$

$g$ est dérivable en $1$ mais $g'(1) = 0$. Donc $f$ n'est pas dérivable en $g(1) = \frac{1}{e}$ mais la courbe représentative de $f$ admet au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ une tangente parallèle à $(Oy)$.

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } -\frac{1}{e} \text{ et n'est pas dérivable en } \frac{1}{e}.}$$