Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice 1

1. (i) $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 1$. Donc, $\dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u))$ vaut 0 ou 1.

• Si $\dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)) = 0$, alors $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ et comme d'autre part, d'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = n$, on en déduit que $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

• Si $\dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)) = 1$, alors $\dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u)) < +\infty$ et comme $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Im}(u)$, on en déduit que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$, ou encore $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{rg}(u) = 1, \text{ ou bien } E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) \text{ ou bien } \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u).}$$

(ii) Puisque e est un vecteur non nul, la famille (e) est libre et on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E avec $e_1 = e$.

Si $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, alors d'une part, $f(e_1) = 0$ et d'autre part, pour $2 \leq i \leq n$, $f(e_i)$ est colinéaire à e_1. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \ldots & a_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Mais alors $\mathrm{Tr}(u) = 0$.

(iv) Montrons l'équivalence des trois assertions :

a)$\Rightarrow$b) Si $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ ne sont pas supplémentaires, alors d'après 1), $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ ce qui fournit $u^2 = 0$. Si u était diagonalisable, A serait alors semblable à une matrice diagonale nilpotente et donc semblable à la matrice nulle et donc nulle. Ceci contredirait $\mathrm{rg}(u) = 1$. Donc, u n'est pas diagonalisable. Par contraposition, on a montré que si u est diagonalisable, alors $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

b)$\Rightarrow$c) et b)$\Rightarrow$a) Si $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$, on choisit une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ de E adaptée à cette décomposition. Les images des $n-1$ derniers vecteurs de $\mathcal{B}'$ sont nulles et d'autre part, $u(e'_1)$ est un vecteur colinéaire à e'_1 (car (e'_1) est une base de $\mathrm{Im}(u)$) et non nul (car $\mathrm{rg}(u) = 1$). La matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a \neq 0$. Ceci montre tout à la fois que u est diagonalisable et que $\mathrm{Tr}(u) = a \neq 0$.

c)$\Rightarrow$b) Si $\mathrm{Tr}(u) \neq 0$, d'après (ii), on ne peut avoir $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et d'après (i), on a $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

2. (i) F_A est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, linéaire par linéarité de la trace et donc, F_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(ii) Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Pour toute $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$F(\lambda A + \mu B)(X) = \mathrm{Tr}((\lambda A + \mu B)X) = \lambda \mathrm{Tr}(AX) + \mu \mathrm{Tr}(BX) = (\lambda F(A)(X) + \mu F(B)(X)) = (\lambda F(A) + \mu F(B))(X),$$

et donc $F(\lambda A + \mu B) = \lambda F(A) + \mu F(B)$. On a montré que F est linéaire.

(iii) $AE_{i,j} = \displaystyle\sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} \delta_{l,i} E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j}$. Par suite,

$$F_A(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} \mathrm{Tr}(E_{k,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} \delta_{k,j} = a_{j,i}.$$

Déterminons alors le noyau de F. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$A \in \mathrm{Ker}(F) \Rightarrow F_A = 0 \Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ F_A(E_{i,j}) = 0 \Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i} = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Donc, $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$ et F est injective.

(iv) Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et son dual ont même dimension finie à savoir n^2, et que F est une application linéaire injective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans son dual, on en déduit que

$$\boxed{F \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*.}$$

3. (i) Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$. Puisque F est un isomorphisme, il existe une et une seule matrice A telle que $F_A = f$ ou encore telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.

(ii) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque J n'est pas la matrice nulle,

$$X \in \mathrm{Ker}(\psi_f) \Leftrightarrow f(X)J = 0 \Leftrightarrow f(X) = 0 \Leftrightarrow X \in \mathrm{Ker}(f).$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\psi_f) = \mathrm{Ker}(f).}$$

Ensuite, on a déjà $\mathrm{Im}(\psi_f) \subset \mathrm{Vect}(J)$ et en particulier, $\dim(\mathrm{Im}(\psi_f))$ vaut 0 ou 1. Comme ψ_f n'est pas l'application nulle, $\mathrm{rg}(\psi_f) = 1$ et

$$\boxed{\mathrm{Im}(\psi_f) = \mathrm{Vect}(J) \text{ et } \mathrm{rg}(\psi_f) = 1.}$$

(iii) 1ère solution.
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\psi_f(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}(AE_{i,j})J = a_{j,i}J$. Si on pose $J = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on a alors $E^*_{i,j}(\psi_f(E_{i,j})) = a_{j,i}m_{i,j}$. Par suite,

$$\mathrm{Tr}(\psi_f) = \sum_{1\leq i,j\leq n} E^*_{i,j}(\psi_f(E_{i,j})) = \sum_{1\leq i,j\leq n} E_{i,j}a_{j,i}m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}m_{i,j}\right) = \mathrm{Tr}(AJ).$$

Deuxième solution. On a $\psi_f(J) = \mathrm{Tr}(AJ)J$.
• Si $\mathrm{Tr}(AJ) = 0$, alors ψ_f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1 tel que $\mathrm{Im}(\psi_f) \subset \mathrm{Ker}(\psi_f)$. D'après $1.(iii)$, $\mathrm{Tr}(\psi_f) = 0 = \mathrm{Tr}(AJ)$.
• Si $\mathrm{Tr}(AJ) \neq 0$, ψ_f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1 tel que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Im}(\psi_f) \oplus \mathrm{Ker}(\psi_f)$. D'après 1.(iii), puisque (J) est une base de $\mathrm{Im}(\psi_f)$, $\mathrm{Tr}(\psi_f)$ est la coordonnée non nulle de $\psi_f(J)$ à savoir $\mathrm{Tr}(AJ)$ encore une fois.

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\psi_f) = \mathrm{Tr}(AJ).}$$

(iv) D'après 1.(iii),

$$\boxed{\psi_f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \mathrm{Tr}(AJ) \neq 0.}$$

(v) Si ψ_f est diagonalisable, puisque $\dim(\mathrm{Ker}(\psi_f)) = n^2 - 1$, 0 est valeur propre de ψ_f d'ordre $n^2 - 1$. La dernière valeur propre de ψ_f est donc sa trace à savoir $\mathrm{Tr}(AJ)$.
Le polynôme minimal de $\psi(f)$ est alors un polynôme unitaire à racines simples admettant pour racines toutes les valeurs propres de ψ_f et rien que les valeurs propres de ψ_f. Donc

$$\boxed{\mu_{\psi_f} = X(X - \mathrm{Tr}(AJ)).}$$

Exercice 2

1. (i) Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$,

$$\frac{\ln(\cos x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\cos x - 1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=-\frac{1}{2}.}$$

(ii) Mais alors $\exists\alpha>0$ tel que $\forall x\in]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$, $-1\leq\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}\leq-\dfrac{1}{4}$ ce qui s'écrit encore $-x^2\leq\ln(\cos x)\leq-\dfrac{1}{4}x^2$. Ce dernier encadrement restant vrai pour $x=0$, on a montré que

$$\boxed{\exists\alpha>0/\ \forall x\in]-\alpha,\alpha[,\ -x^2\leq\ln(\cos x)\leq-\frac{1}{4}x^2.}$$

(iii) a. Puisque la série de terme général $(u_n)^2$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)^2=0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{0}=0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(u_n)=1$ et en particulier, $\exists n_0/\ \forall n\geq n_0,\ \cos(u_n)>0$.

b. La suite $(\ln(\cos(u_n))$ est bien définie à partir du rang n_0. Ensuite, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$, il existe un rang $n_1\geq n_0$ tel que pour $n\geq n_1$, $u_n\in]-\alpha,\alpha[$. Mais alors, pour $n\geq n_1$, $-u_n^2\leq\ln(\cos(u_n))\leq-\dfrac{1}{4}u_n^2$ et en particulier $\ln(\cos(u_n))\underset{n\to+\infty}{=}O(u_n^2)$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la série } \textstyle\sum_{n\geq n_0}\ln(\cos(u_n)) \text{ converge.}}$$

2. (i) Soit $n\in\mathbb{N}$. Puisque $\beta\in]0,\dfrac{\pi}{2}[$, pour $i\in[\![0,n]\!]$, on a $\dfrac{\beta}{2^i}\in]0,\dfrac{\pi}{2}[$ et donc $\cos(\dfrac{\beta}{2^i})>0$. On en déduit que $P_n>0$. De plus, pour $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=\cos(\dfrac{\beta}{2^{n+1}})\leq1$ et puisque $P_n>0$, on en déduit que $P_{n+1}\leq P_n$. Finalement

$$\boxed{\text{la suite } P_\beta \text{ est décroissante et positive.}}$$

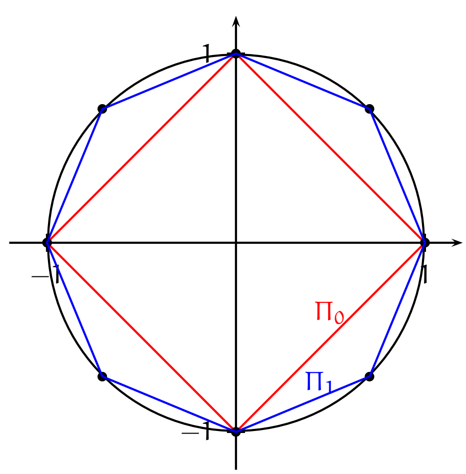
Ainsi, P_β est une suite décroissante et minorée par 0. On en déduit que cette suite converge vers un réel $l_\beta\geq0$.

(ii) Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=\dfrac{\beta}{2^n}$. Alors, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n^2=\left(\dfrac{\beta^2}{4}\right)^n$. Or $\dfrac{\beta^2}{4}\in]0,\dfrac{\pi^2}{16}[\subset]0,1[$ et donc la série géométrique de terme général u_n^2 converge. D'après la question 1.(iii), il en est de même de la série de terme général $\ln(\cos(u_n))$. Posons alors $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\ln(\cos(u_n))$.

Maintenant, pour $n\in\mathbb{N}$, $\ln(P_n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\ln(\cos(u_k))$. La suite $(\ln(P_n))$ converge donc vers S puis la suite (P_n) converge donc vers $e^S=l_\beta$ ce qui montre que $l_\beta>0$.

$$\boxed{l_\beta>0.}$$

3. (i)



(ii) Le triangle OAC est isocèle en O. Donc,

$$\begin{aligned}\text{aire}(OAC) &= \frac{OM \times AC}{2} = OM \times MA = \left|\frac{1+e^{2i\theta}}{2}\right| \times \left|\frac{1-e^{2i\theta}}{2}\right| = \frac{1}{4}|1-e^{4i\theta}| = \frac{1}{4}|e^{2i\theta}| \times |e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}| \\ &= \frac{|\sin(2\theta)|}{2} = \frac{\sin(2\theta)}{2} \text{ (car } \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[) \\ &= \sin\theta\cos\theta.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{aire}(OAC) = OM \times MA = \sin\theta\cos\theta.}$$

b. Si H est le projeté orthogonal de B sur (OA),

$$2\cos\theta\,\text{aire}(OAB) = 2\cos\theta\frac{OA \times BH}{2} = 2\cos\theta\frac{\sin\theta}{2} = \cos\theta\sin\theta = \text{aire}(OAC).$$

$$\boxed{\text{aire}(OAC) = 2\cos\theta\,\text{aire}(OAB).}$$

(iii) Π_n est constitué de 2^{n+2} triangles isométriques à (OAB_n) et donc $\text{aire}(\Pi_n) = 2^{n+2}\text{aire}(OAB_n)$.

(iv) D'après (ii)b., $\text{aire}(OAB_n) = 2\cos\theta_{n+1}\text{aire}(OAB_{n+1}) = 2\cos\frac{\pi}{\pi}2^{n+2}$.

On en déduit que $2^{n+2}\text{aire}(OAB_n) = 2^{n+3}\cos\frac{\pi}{\pi}2^{n+2}\text{aire}(OAB_{n+1})$ et finalement que $\text{aire}(\Pi_n) = \cos\frac{\pi}{2^{n+2}}\text{aire}(\Pi_{n+1})$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \text{aire}(\Pi_n) = \cos\frac{\pi}{2^{n+2}} \times \text{aire}(\Pi_{n+1}).}$$

(v) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{aire}(\Pi_n) = \text{aire}(\Pi_0) \times \prod_{k=0}^{n-1}\frac{\text{aire}(\Pi_{k+1})}{\text{aire}(\Pi_k)} = 2\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}} = \frac{2}{P_{n-1}(\pi/4)}.$$

Donc, $P_n(\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\text{aire}(\Pi_{n+1})}$. Maintenant, $\text{aire}(\Pi_{n+1})$ tend vers l'aire du disque délimité par $\mathscr{C}$ à savoir π et donc

$$\boxed{l_{\pi/4} = \frac{2}{\pi}.}$$

Exercice 3

1. a. Une équation de la droite (D_M) est $\alpha(x-\alpha) + \beta(y-\beta) = 0$ ou encore

$$\boxed{\alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta^2.}$$

b. $d(I, (D_M)) = \frac{|a\alpha - \alpha^2 - \beta^2|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

c. Soit $M(\alpha, \beta)$ un point du plan distinct de O.

$$\begin{aligned}(D_M) \text{ tangente à } \mathcal{C} &\Leftrightarrow d(I, (D_M)) = OI \\ &\Leftrightarrow \frac{(a\alpha - \alpha^2 - \beta^2)^2}{\alpha^2+\beta^2} = a^2 \Leftrightarrow (\alpha^2+\beta^2-a\alpha)^2 = a^2(\alpha^2+\beta^2)\end{aligned}$$

2. Puisque le cercle $\mathcal{C}$ passe par O, (Γ) est la réunion de l'ensemble des points précédents et de O. Par suite, une équation cartésienne de (Γ) est

$$\boxed{(x^2+y^2-ax)^2 = a^2(x^2+y^2).}$$

Soit alors M un point du plan dont les coordonnées cartésiennes sont notées (x, y) et un couple de coordonnées polaires est noté $[r, \theta]$.

$$\begin{aligned}
M \in (\Gamma) &\Leftrightarrow (x^2+y^2-ax)^2 = a^2(x^2+y^2) \Leftrightarrow (r^2 - ar\cos\theta)^2 = a^2r^2 \\
&\Leftrightarrow (r - a\cos\theta)^2 = a^2 \text{ ou } r = 0 \\
&\Leftrightarrow r - a\cos\theta = a \text{ ou } r - a\cos\theta = -a \text{ ou } r = 0 \Leftrightarrow r = a(1+\cos\theta) \text{ ou } r = a(-1+\cos\theta) \text{ ou } r = 0 \\
&\Leftrightarrow r = a(1+\cos\theta) \text{ ou } r = a(-1+\cos\theta) \text{ (car } \theta = \pi \text{ fournit } a(1+\cos\theta) = 0\text{)}.
\end{aligned}$$

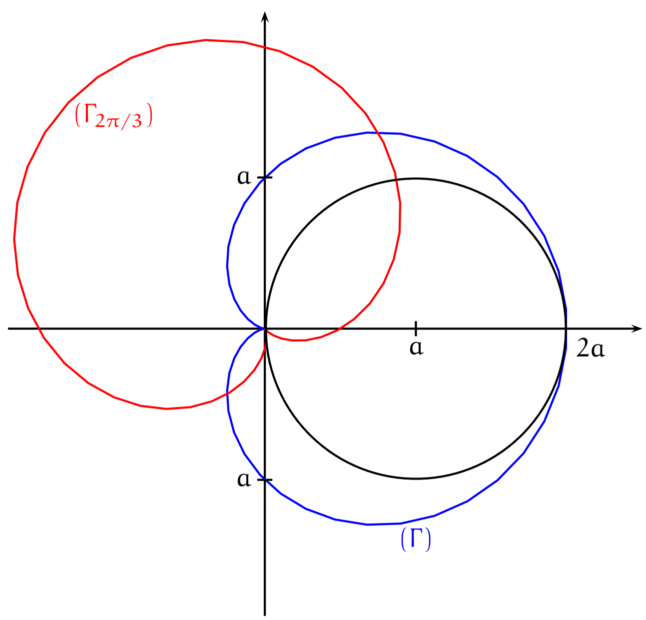
(Γ) est donc la réunion des courbes (Γ_1) et (Γ_2) d'équations polaires respectives $r = r_1 = a(1+\cos\theta)$ et $r = r_2 = a(-1+\cos\theta)$. Maintenant

$$M_2(\theta+\pi) = [r_2(\theta+\pi), \theta+\pi] = [a(-1-\cos\theta), \theta+\pi] = [-r_1(\theta), \theta+\pi] = [r_1(\theta), \theta] = M_1(\theta).$$

Par suite, (Γ_2) qui est l'ensemble des $M_2(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, est aussi l'ensemble des $M_1(\theta - \pi)$, $\theta \in \mathbb{R}$, ou encore l'ensemble des $M_1(\theta')$, $\theta' \in \mathbb{R}$. Ainsi, (Γ_1) et (Γ_2) sont une seule et même courbe et on a montré que

$$\boxed{\text{une équation polaire de } (\Gamma) \text{ est } r = a(1+\cos\theta).}$$

3.



4. a. Voir graphique ci-dessus.

b. $(\Gamma_{2\pi/3})$ est l'ensemble des points d'affixes $a(1+\cos\theta)e^{i(\theta+\frac{2\pi}{3})}$, $\theta \in \mathbb{R}$, ou encore l'ensemble des points d'affixes $a(1+\cos(\theta' - \dfrac{2\pi}{3}))e^{i\theta'}$, $\theta' \in \mathbb{R}$. Donc

$$\boxed{(\Gamma_{2\pi/3}) \text{ est la courbe d'équation polaire } r = a\left(1+\cos(\theta - \frac{2\pi}{3})\right).}$$

Notons $\mathscr{D}$ le domaine considéré. $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points du plan dont un couple de coordonnées polaires $[r, \theta]$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leq r \leq a(1+\cos\theta) \\ \quad\quad \text{et} \\ 0 \leq r \leq a(1+\cos(\theta - \dfrac{2\pi}{3})) \end{array}\right. .$$

Maintenant, pour $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$a(1+\cos\theta) < a(1+\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})) \Leftrightarrow \cos(\theta-\frac{2\pi}{3})-\cos\theta > 0 \Leftrightarrow -2\sin(\theta-\frac{\pi}{3})\sin(-\frac{\pi}{3}) > 0 \Leftrightarrow \sin(\theta-\frac{\pi}{3}) > 0$$
$$\Leftrightarrow \theta \in [-\pi, -\frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3}, \pi].$$

Par suite, en notant $\mathscr{A}(\mathscr{D})$ l'aire du domaine considéré

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\mathscr{D}) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{-2\pi/3} a^2(1+\cos\theta)^2\ d\theta + \frac{1}{2}\int_{-2\pi/3}^{\pi/3} a^2(1+\cos(\theta-\frac{2\pi}{3}))^2\ d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\ d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\int_{-\pi}^{-2\pi/3}(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos\theta}{2})\ d\theta + \int_{-2\pi/3}^{\pi/3}(1+2\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})+\frac{1+\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})}{2})\ d\theta\right. \\
&\left.+\int_{\pi/3}^{\pi}(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos\theta}{2})\ d\theta\right) \\
&= \frac{a^2}{2}\times\frac{3}{2}\times\left(2\pi+[\sin\theta]_{-\pi}^{-2\pi/3}+\left[\sin(\theta-\frac{2\pi}{3})\right]_{-2\pi/3}^{\pi/3}+[\sin\theta]_{\pi/3}^{\pi}\right) \\
&= \frac{3a^2}{4}(2\pi-2\sqrt{3}) = \frac{3a^2(\pi-\sqrt{3})}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \frac{3a^2(\pi-\sqrt{3})}{2}.}$$

