

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice 1

1. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur \mathbb{R} . Donc la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est définie sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = -t$, on obtient

$$g(-x) = e^{-(-x)^2} \int_0^{-x} e^{t^2} dt = e^{-x^2} \int_0^x e^{u^2} (-du) = -e^{-x^2} \int_0^x e^{u^2} du = -g(x).$$

Donc

g est impaire.

2. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur \mathbb{R} . Donc la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et il en est de même de g . De plus, pour $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} \times e^{x^2} = -2xg(x) + 1.$$

La fonction g est solution de l'équation différentielle (E) sur \mathbb{R} .

3. Les fonctions $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur \mathbb{R} . On sait alors que les solutions de (E) sur \mathbb{R} constituent un \mathbb{R} -espace affine de dimension 1. Soit alors f une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + 2xf(x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} (f - g)'(x) + 2x(f - g)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} (f - g)'(x) + 2xe^{x^2} (f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx} (e^{x^2} (f - g))(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} (f - g)(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{-x^2} + g(x). \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-x^2} + e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$, $C \in \mathbb{R}$.

4. (a) On suppose à priori que le rayon R de la série $\sum a_i x^i$ est strictement positif. Pour $x \in]-R, R[$, on pose

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i \text{ et on a}$$

$$\begin{aligned} f'(x) + 2xf(x) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i x^{i-1} + 2 \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^{i+1} = \sum_{i=0}^{+\infty} (i+1) a_{i+1} x^i + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} a_{i-1} x^i \\ &= a_1 + \sum_{i=1}^{+\infty} ((i+1) a_{i+1} + 2a_{i-1}) x^i. \end{aligned}$$

Mais alors, par unicité des coefficients d'un développement en série entière,

$$f \text{ solution de (E) sur }]-R, R[\Leftrightarrow a_1 = 1 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}^*, (i+1)a_{i+1} + 2a_{i-1} = 0 \Leftrightarrow a_1 = 1 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}, (i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0.$$

(b) On a $a_1 = 1$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $a_{2i+1} = -\frac{2}{2i+1}a_{2i-1}$. Par suite, pour $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_{2i+1} &= -\frac{2}{2i+1} \times -\frac{2}{2i-1} \times \dots \times -\frac{2}{3}a_1 = (-1)^i 2^i \frac{1}{(2i+1) \times (2i-1) \times \dots \times 3} \\ &= (-1)^i 2^i \frac{(2i) \times (2i-2) \times \dots \times 2}{(2i+1) \times (2i) \times (2i-1) \times \dots \times 3 \times 2} = (-1)^i 2^i \frac{2^i i!}{(2i+1)!} \\ &= (-1)^i \frac{4^i i!}{(2i+1)!}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $i = 0$.

$$\forall i \in \mathbb{N}, a_{2i+1} = (-1)^i \frac{4^i i!}{(2i+1)!}.$$

(c) De même, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $a_{2i} = -\frac{2}{2i}a_{2i-2}$. Par suite, pour $i \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{2i} = -\frac{2}{2i} \times -\frac{2}{2i-2} \times \dots \times -\frac{2}{2}a_0 = (-1)^i 2^i \frac{1}{(2i) \times (2i-2) \times \dots \times 2} a_0 = (-1)^i 2^i \frac{1}{2^i i!} a_0 = \frac{(-1)^i}{i!} a_0,$$

ce qui reste vrai pour $i = 0$.

$$\forall i \in \mathbb{N}, a_{2i} = \frac{(-1)^i}{i!} a_0.$$

En particulier, la donnée de a_0 détermine une suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et une seule.

(d) Réciproquement, soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite vérifiant : $\forall i \in \mathbb{N}$, $(i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0$.

D'après ce qui précède, la série entière $\sum a_{2i}x^{2i} = \sum \frac{(-1)^i}{i!} a_0 x^{2i}$ a un rayon de convergence infini. D'autre part, pour $x \neq 0$ et $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{a_{2i+1}x^{2i+1}}{a_{2i-1}x^{2i-1}} \right| = \frac{2x^2}{2i+1},$$

et donc $\lim_{i \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{2i+1}x^{2i+1}}{a_{2i-1}x^{2i-1}} \right| = 0$. La règle de d'ALEMBERT permet alors d'affirmer que, pour tout réel x non nul, la série numérique de terme général $a_{2i+1}x^{2i+1}$ converge et donc que la série série entière $\sum a_{2i+1}x^{2i+1}$ a un rayon de convergence infini.

En résumé, les deux séries entières $\sum a_{2i}x^{2i}$ et $\sum a_{2i+1}x^{2i+1}$ ont un rayon de convergence infini et on en déduit que la série entière $\sum a_i x^i$ a un rayon de convergence infini.

$$\mathbb{R} = +\infty.$$

(e) Les calculs faits en (a) sont maintenant validés par le fait que $\mathbb{R} = +\infty$. Les solutions de l'équation (E) sur \mathbb{R} , développables en série entière sur \mathbb{R} , sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto a_0 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^{2i} + \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{4^i i!}{(2i+1)!} x^{2i+1}$,

$a_0 \in \mathbb{R}$.

Ces fonctions constituent un \mathbb{R} -espace affine de dimension 1 ce qui montre déjà que toute solution de (E) sur \mathbb{R} est développable en série entière sur \mathbb{R} .

g est donc développable en série entière sur \mathbb{R} et il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = a_0 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^{2i} + \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{4^i i!}{(2i+1)!} x^{2i+1}.$$

De plus, d'après 1., g est impaire. g est donc la partie impaire de la fonction $x \mapsto a_0 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^{2i} + \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{4^i i!}{(2i+1)!} x^{2i+1}$

c'est-à-dire la fonction $x \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{4^i i!}{(2i+1)!} x^{2i+1}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{4^i i!}{(2i+1)!} x^{2i+1}.$$

5. (a) Immédiatement

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_1(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^{2i} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, g_2(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1) \times i!}.$$

(b) En effectuant le produit de CAUCHY des deux séries entières précédentes, on obtient pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(x) &= g_1(x)g_2(x) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^{2i} \right) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1) \times i!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{2i+2j+1=2k+1} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(2j+1) \times j!} \right) x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{1}{(2j+1) \times j!} \right) x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{(2j+1)} C_k^j \right) x^{2k+1}. \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière et d'après la question 4.(e), pour tout entier k on a

$$\frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{(2j+1)} C_k^j \right) = (-1)^k \frac{4^k k!}{(2k+1)!},$$

ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{(2j+1)} C_k^j = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}.$$

Exercice 2

1. Soit $P \in O_3(\mathbb{R})$. Alors, $\forall x \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $\|Ax\| = \|x\|$ et en particulier $\forall x \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $\|Ax\| = 1 \Leftrightarrow \|x\| = 1$.

$$\forall P \in O_3(\mathbb{R}), \mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^3 / \|x\| = 1\}.$$

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors $Dx = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3)$ puis

$$\|Dx\| = 1 \Leftrightarrow \alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_2^2 x_2^2 + \alpha_3^2 x_3^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^2} + \frac{x_2^2}{\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^2} + \frac{x_3^2}{\left(\frac{1}{\alpha_3}\right)^2} = 1 \text{ et donc}$$

$\mathcal{E}(D)$ est un ellipsoïde.

3. Soit $A \in GL_3(\mathbb{R})$.

(i) ${}^t({}^tAA) = {}^tA {}^t({}^tA) = {}^tAA$. Donc tAA est symétrique réelle.

On sait alors que les valeurs propres de tAA sont réelles. Soient λ une valeur propre de tAA et X un vecteur propre associé.

$$\|AX\|^2 = {}^t(AX)(AX) = {}^tX({}^tAA)X = {}^tX(\lambda X) = \lambda \|X\|^2,$$

et donc, puisque $X \neq 0$,

$$\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}.$$

Maintenant, puisque $X \neq 0$ et que A est inversible, on a $AX \neq 0$. On en déduit que $\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} > 0$.

Ainsi, les valeurs propres de tAA sont des réels strictement positifs et donc

$$\forall A \in GL_3(\mathbb{R}), {}^tAA \text{ est symétrique définie positive.}$$

(ii) Puisque tAA est symétrique réelle, A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale et il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $\Delta = \text{diag}(a, b, c) \in D_3(\mathbb{R})$ telles que $A = {}^tP\Delta P$. Puisque tAA est définie positive, a, b et c sont strictement positifs et on peut poser $D = \text{diag}(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$. D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs telle que

$$A = {}^tPD^2P.$$

(iii) S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs et donc

$$S \text{ est une matrice symétrique définie positive.}$$

(iv) $A = {}^tA^{-1}({}^tPD^2P) = {}^tA^{-1}{}^tPDP{}^tPDP = QS$ où $Q = {}^tA^{-1}{}^tPDP$. Mais

$${}^tQQ = {}^tA^{-1}{}^tPDP \times {}^t({}^tA^{-1}{}^tPDP) = {}^tA^{-1}{}^tPDP{}^tP{}^tDPA^{-1} = {}^tA^{-1}{}^tPD^2PA^{-1} = A^{-1}{}^tAAA^{-1} = I_3,$$

et donc $Q \in O_3(\mathbb{R})$.

$$\exists Q \in O_3(\mathbb{R}) / A = QS.$$

(v) Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Puisque Q est orthogonale,

$$\|Ax\| = 1 \Leftrightarrow \|Q \times Sx\| = 1 \Leftrightarrow \|Sx\| = 1.$$

$$\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S).$$

(vi) De même, puisque P est orthogonale, pour $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\|Sx\| = 1 \Leftrightarrow \|{}^tPDPx\| = 1 \Leftrightarrow \|D \times Px\| = 1 \Leftrightarrow \alpha_1^2 x_1'^2 + \alpha_2^2 x_2'^2 + \alpha_3^2 x_3'^2 = 1 \text{ où on a posé } Px = (x_1', x_2', x_3').$$

Maintenant, puisque P est une matrice orthogonale, (x_1', x_2', x_3') sont les coordonnées de x dans une certaine base orthonormée \mathcal{B}' . $\mathcal{E}(S)$ a ainsi pour équation $\alpha_1^2 x_1'^2 + \alpha_2^2 x_2'^2 + \alpha_3^2 x_3'^2 = 1$ dans \mathcal{B}' et donc $\mathcal{E}(S)$ est un ellipsoïde. Puisque $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)$,

$$\mathcal{E}(A) \text{ est un ellipsoïde.}$$

4. (i) Soit $v \neq 0$. $\left\| S \left(\frac{1}{\|S(v)\|} v \right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|S(v)\|} S(v) \right\| = \frac{\|S(v)\|}{\|S(v)\|} = 1$. Par suite, $v \in \mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$ et donc $\left\| S' \left(\frac{1}{\|S(v)\|} v \right) \right\| = 1$ ou encore $\|S(v)\| = \|S'(v)\|$. Cette égalité restant valable pour $v = 0$, on a montré que

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \|S(v)\| = \|S'(v)\|.$$

(ii) Soit $(v, w) \in (\mathbb{R}^3)^2$.

$$\langle s(v), s(w) \rangle = \frac{1}{4} (\|S(v) + Ss(w)\|^2 - \|S(v) - S(w)\|^2) = \frac{1}{4} (\|S(v+w)\|^2 - \|S(v-w)\|^2) = \\ \frac{1}{4} (\|S'(v+w)\|^2 - \|S'(v-w)\|^2) = \frac{1}{4} (\|S'(v) + S'(w)\|^2 - \|S'(v) - S'(w)\|^2) = \langle S'(v), S'(w) \rangle.$$

$$\forall (v, w) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle S(v), S(w) \rangle = \langle S'(v), S'(w) \rangle.$$

(iii) Ainsi, pour tout $(v, w) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\langle S(v), S(w) \rangle = \langle S'(v), S'(w) \rangle$. Maintenant, S ou S' sont symétriques et donc égales à leur adjointe. On en déduit que pour tout $(v, w) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\langle S^2(v), w \rangle = \langle S'^2(v), w \rangle$ et finalement que

$$\forall (v, w) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle (S^2 - S'^2)(v), w \rangle = 0 (*).$$

Soit alors $v \in \mathbb{R}^3$. (*) montre que $(S^2 - S'^2)(v) \in (\mathbb{R}^3)^\perp = \{0\}$ et donc que $S^2(v) = S'^2(v)$. Ainsi, $\forall v \in \mathbb{R}^3$, $S^2(v) = S'^2(v)$ et donc

$$S^2 = S'^2.$$

(iv) **Théorème de décomposition des noyaux.** Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $(P_1, P_2) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2$ tel que $P_1 \wedge P_2 = 1$. Alors

$$\text{Ker}((P_1 P_2)(f)) = \text{Ker}(P_1(f)) \oplus \text{Ker}(P_2(f)).$$

Ici, puisque S est définie positive, $\alpha \neq 0$ et donc $\alpha \neq -\alpha$. On en déduit que $(X - \alpha) \wedge (X + \alpha) = 1$ et d'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$\text{Ker}(S^2 - \alpha^2 I) = \text{Ker}((S - \alpha I)(S + \alpha I)) = \text{Ker}(S - \alpha I) \oplus \text{Ker}(S + \alpha I).$$

Maintenant, les valeurs propres de S sont des réels strictement positifs et donc $-\alpha$ n'est pas valeur propre de S ou encore $\text{Ker}(S + \alpha I) = \{0\}$. On en déduit que $\text{Ker}(S^2 - \alpha^2 I) = \text{Ker}(S - \alpha I)$.

$$\forall \alpha \in \text{Sp}(S), \text{Ker}(S^2 - \alpha^2 I) = \text{Ker}(S - \alpha I).$$

(v) La démonstration précédente reste valable quand α est un réel strictement positif quelconque. Mais alors, puisque $S^2 = S'^2$,

$$\forall \alpha > 0, \text{Ker}(S - \alpha I) = \text{Ker}(S^2 - \alpha^2 I) = \text{Ker}(S'^2 - \alpha^2 I) = \text{Ker}(S' - \alpha I).$$

En particulier, S et S' ont les mêmes valeurs propres et un vecteur propre de S associée à une certaine valeur propre α est encore valeur propre de S' associée à la même valeur propre α . Maintenant, S est diagonalisable et il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 constituée de vecteurs propres de S . Ce qui précède montre que S et S' coïncident sur \mathcal{B} et donc que

$$S = S'.$$

5. Soit $(A, A') \in (\mathcal{GL}_3(\mathbb{R}))^2$. D'après 3.(iv), $\exists(Q, Q') \in O_3(\mathbb{R})^2$ et $\exists(S, S') \in S_3^{++}(\mathbb{R})^2$ telles que $A = QS$ et $A' = Q'S'$. D'après 3.(v) et 4.(v),

$$\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A') \Leftrightarrow \mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S') \Leftrightarrow S = S'.$$

Donc, si $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')$, alors $\exists(Q, Q') \in O_3(\mathbb{R})^2$, $\exists S \in S_3^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$ et $A' = Q'S$. Soit $V = QQ'^{-1}$. Puisque $(O_3(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe, $V \in O_3(\mathbb{R})$ et de plus,

$$VA' = QQ'^{-1}Q'S = QS = A.$$

Réciproquement, s'il existe $V \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $A = VA'$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\|Ax\| = \|VA'x\| = \|A'x\|$$

et en particulier, $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')$.

$$\forall (A, A') \in (GL_3(\mathbb{R}))^2, \mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A') \Leftrightarrow \exists V \in O_3(\mathbb{R}) / A = VA'.$$

Exercice 3

1. (i) Pour tout réel $t \in [-\pi, \pi]$

$$\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = -5 \sin t \vec{i} + 3 \cos t \vec{j} \neq \vec{0}.$$

Donc

$$\begin{aligned} M(x, y) \in T_t &\Leftrightarrow \det \left(\overrightarrow{M(t)M}, \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 5 \cos t & -5 \sin t \\ y - 3 \sin t & 3 \cos t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3 \cos t(x - 5 \cos t) + 5 \sin t(y - 3 \sin t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(\cos t)x + 5(\sin t)y = 15. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de T_t est $3(\cos t)x + 5(\sin t)y = 15$.

(ii) Soit $t \in \mathbb{R}$. T_t est la droite passant par $M(t)(5 \cos t, 3 \sin t)$ et de vecteur directeur $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = -5 \sin t \vec{i} + 3 \cos t \vec{j}$. Un système d'équations paramétrique de T_t est donc

$$\begin{cases} x = 5 \cos t - 5\lambda \sin t \\ y = 3 \sin t + 3\lambda \cos t \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Soit $P(5 \cos t - 5\lambda \sin t, 3 \sin t + 3\lambda \cos t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, un point de T_t . Alors $P \neq O$ et

$$\begin{aligned} (OP) \perp T_t &\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt}(t) = 0 \Leftrightarrow -5 \sin t(5 \cos t - 5\lambda \sin t) + 3 \cos t(3 \sin t + 3\lambda \cos t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{16 \cos t \sin t}{9 \cos^2 t + 25 \sin^2 t}. \end{aligned}$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité du point P .

(iii) $M(t)$ est un sommet de l'ellipse si et seulement si $t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Dans ce cas, T_t est perpendiculaire à la droite $(OM(t))$ et donc $P = M(t)$.

(iv) D'après (ii),

$$\begin{aligned} P &= \left(5 \cos t - 5 \frac{16 \cos t \sin t}{9 \cos^2 t + 25 \sin^2 t} \sin t, 3 \sin t + 3 \frac{16 \cos t \sin t}{9 \cos^2 t + 25 \sin^2 t} \cos t \right) \\ &= \left(\frac{45 \cos^3 t + 45 \cos t \sin^2 t}{9 \cos^2 t + 25 \sin^2 t}, \frac{75 \sin^3 t + 75 \cos^2 t \sin t}{9 \cos^2 t + 25 \sin^2 t} \right) = \left(\frac{45 \cos t (\cos^2 t + \sin^2 t)}{9(1 - \sin^2 t) + 25 \sin^2 t}, \frac{75 \sin t (\sin^2 t + \cos^2 t)}{9(1 - \sin^2 t) + 25 \sin^2 t} \right) \\ &= \left(\frac{45 \cos t}{9 + 16 \sin^2 t}, \frac{75 \sin t}{9 + 16 \sin^2 t} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$P = \left(\frac{45 \cos t}{9 + 16 \sin^2 t}, \frac{75 \sin t}{9 + 16 \sin^2 t} \right).$$

2. (i) Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $X'(t)$ est du signe de $-\sin t$. On en déduit le tableau de variation de la fonction $t \mapsto X(t)$.

t	0	$\pi/2$
$X'(t)$	0	-
X	5	0

(ii) • Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $Y'(t)$ est du signe de $\cos t(3 - 4 \sin t)$. En particulier, $Y'(t)$ s'annule en $\alpha = \text{Arcsin}\left(\frac{3}{4}\right)$.

• Puisque $\frac{1}{4} = \frac{4}{16} \leq \frac{9}{16} \leq \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, on a $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{3}{4} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et puisque la fonction Arcsin est croissante sur $[0, 1]$, on en déduit que

$$\frac{\pi}{4} \leq \text{Arcsin}\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha \leq \frac{\pi}{3}.$$

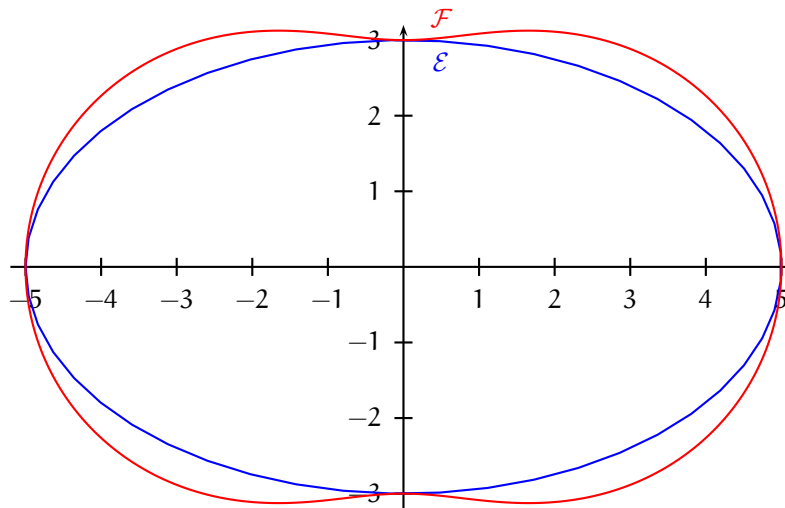
• On a $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ et $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Par suite,

$$X(\alpha) = \frac{45 \times \frac{\sqrt{7}}{4}}{9 + 16 \times \frac{9}{16}} = \frac{5\sqrt{7}}{8} \text{ et } Y(\alpha) = \frac{75 \times \frac{3}{4}}{9 + 16 \times \frac{9}{16}} = \frac{75}{24}.$$

(iii) Tableau de variations de Y .

t	0	α	$\pi/2$
$Y'(t)$	+	0	-
Y	0	$\frac{75}{24}$	3

3.



4. À un instant donné, l'ellipse \mathcal{E}' et l'ellipse \mathcal{E} sont tangentes en un point $M(t)$ et la condition de roulement sans glissement se traduit par le fait que l'ellipse \mathcal{E}' est la symétrique de l'ellipse \mathcal{E} par rapport à sa tangente T_t . Mais alors, le centre O' de \mathcal{E}' est le symétrique du point O par rapport au point P_t . Ainsi, on a toujours

$$\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OP_t} \text{ (voir graphique page suivante).}$$

Donc

O' se déplace sur $\text{hom}_{O,2}(\mathcal{F})$.

