Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

Partie I

1. Les solutions de l'équation différentielle $\mathcal{E}_0$ sur l'intervalle I forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Les deux fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont deux solutions indépendantes de $\mathcal{E}_0$ sur I. On en déduit que l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_0$ sur I est $\{x \mapsto A\cos x + B\sin x,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$.

2. (erreur d'énoncé : I doit contenir tous les $n\pi$, $n \in \mathbb{N}$) Soit g une solution de $\mathcal{E}_0$ sur I. Il existe deux réels A et B tels que, pour tout x de I, $g(x) = A\cos x + B\sin x$. La suite $(g(n\pi))_{n\in\mathbb{N}} = A((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $A = 0$. De même, la suite $(g(\frac{2n+1}{2}\pi))_{n\in\mathbb{N}} = B((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $B = 0$.

3. (on suppose que $+\infty$ est une des bornes de I) Si g a une limite finie quand x tend vers $+\infty$, alors les deux suites $(g(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(\frac{2n+1}{2}\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. D'après 2., on en déduit que $A = B = 0$ et donc que g est nulle.

Partie II

1. Il est clair que $V \subset C^\infty(\mathbb{R})$ et que $V = \text{Vect}(h_{e_1}, h_{e_2}, h_{e_3}, h_{e_4})$. Donc,

$$\boxed{V \text{ est sous-espace vectoriel de } C^\infty(\mathbb{R}).}$$

2. Notons Φ l'application qui, à l'élément v de $\mathbb{R}^4$, associe h_v. Φ est une application de $\mathbb{R}^4$ dans V.

- Φ est par définition surjective.
- Soient $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ et $(v, v') = ((a,b,c,d),(a',b',c',d')) \in (\mathbb{R}^4)^2$. Alors, pour tout réel x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\Phi(\lambda v + \lambda' v'))(x) &= ((\lambda a + \lambda' a')x + (\lambda b + \lambda' b'))\cos x + ((\lambda c + \lambda' c')x + (\lambda d + \lambda' d'))\sin x \\ &= \lambda((ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x) + \lambda'((a'x+b')\cos x + (c'x+d')\sin x) \\ &= (\lambda\Phi(v) + \lambda'\Phi(v'))(x)\end{aligned}$$

Donc, Φ est linéaire.

- Soit $v = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

$$\Phi(v) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x = 0.$$

La suite $(\Phi(v)(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $((an\pi + b)(-1)^n)$. Si $a \neq 0$, cette suite diverge et ne peut être la suite nulle. Par suite, $a = 0$. Pour les mêmes raisons, $b = 0$ puis, par l'étude de la suite $(\Phi(v)(\frac{2n+1}{2}\pi))_{n\in\mathbb{N}}$, $c = d = 0$. Finalement, $v = 0$.
Ainsi, $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$. Φ est injective, et finalement

$$\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}^4 \text{ sur } V.}$$

Par un isomorphisme, l'image d'une base est une base. Ainsi, comme $\mathcal{B} = (h_{e_1}, h_{e_2}, h_{e_3}, h_{e_4})$ est l'image par Φ de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } V.}$$

3. **(i)** Avec la formule de LEIBNIZ, pour $x \in \mathbb{R}$ on obtient

$$\begin{aligned} h_v''(x) + h_v(x) &= -(ax+b)\cos x - (cx+d)\sin x + 2(-a\sin x + c\cos x) + (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x \\ &= -2a\sin x + 2c\cos x. \end{aligned}$$

Ainsi, l'image par ψ d'un élément de V est un élément de V, et ψ est bien une application de V dans V. La dérivation étant linéaire,

$$\boxed{\psi \text{ est un endomorphisme de } V.}$$

(ii) Soit $v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Puisque $(h_{e_1}, h_{e_2}, h_{e_3}, h_{e_4})$ est une famille libre,

$$h_v \in \mathrm{Ker}(\psi) \Leftrightarrow h_v'' + h_v = 0 \Leftrightarrow -2ah_{e_4} + 2ch_{e_2} = 0 \Leftrightarrow a = c = 0.$$

Donc,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\psi) = \{bh_{e_2} + dh_{e_4},\ (b, d) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(h_{e_2}, h_{e_4}) = \{x \mapsto A\cos x + B\sin x,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

En particulier, $\dim(\mathrm{Ker}(\psi)) = 2$ puis, d'après le théorème du rang $\mathrm{rg}(\psi) = 4 - 2 = 2$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(\psi) = 2.}$$

(iii) Comme $\psi(V) \subset \mathrm{Vect}(h_{e_2}, h_{e_4})$ et que $\dim(\psi(V)) = 2$, on en déduit qu'une base de $\mathrm{Im}(\psi)$ est (h_{e_2}, h_{e_4}).

Ensuite, puisque $\psi(h_{e_1}) = -2h_{e_4}$, $\psi(h_{e_2}) = 0$, $\psi(h_{e_3}) = 2h_{e_1}$ et $\psi(h_{e_4}) = 0$, la matrice cherchée est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On retrouve le fait qu'une base de $\mathrm{Im}(\psi)$ est (h_{e_2}, h_{e_4}).

4. Pour $v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $\psi(h_v) = h_{e_2} \Leftrightarrow 2c = 1$ et $-2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $c = \frac{1}{2}$. Les solutions de $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$ qui sont éléments de V sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{2}x\sin x + b\cos x + d\sin x$, $(b, d) \in \mathbb{R}^2$.
Mais on sait que les solutions de $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2. On a donc trouvé toutes les solutions de $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (\mathcal{E}_1) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto \frac{1}{2}x\sin x + A\cos x + B\sin x,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2.}$$

Partie III

1. Soit x un réel positif.

1a. Pour $t \geq 0$, $e^{-tx} \leq 1$ et donc $F(x, t) \leq \dfrac{1}{1 + t^2}$.

1b. La fonction $t \mapsto F(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$, positive et majorée par la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1 + t^2}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$.
On en déduit que la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc que l'intégrale proposée converge.

2. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et F une application de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que
- pour tout réel x de I, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est continue par morceaux sur J,
- pour tout réel t de J, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est continue sur I,
- il existe une fonction φ définie sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que $\forall (x, t) \in I \times J$, $|F(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors, la fonction $G : x \mapsto \int_J F(x,t)\,dt$ est définie et continue sur I. C'est le cas ici.

3. 3a. F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ et de plus

$$\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = \frac{-te^{-tx}}{1+t^2}.}$$

3b. Pour $t \in [0,+\infty[$, on a $(t-1)^2 \geq 0$, ce qui fournit $0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2} \leq 1$. On en déduit que $0 \leq \frac{te^{-tx}}{1+t^2} \leq e^{-tx} \leq e^{-t\varepsilon}$.

(i) Soit $x \geq \varepsilon$.

La fonction $t \mapsto \frac{-te^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Cette fonction est majorée en valeur absolue par la fonction $t \mapsto e^{-t\varepsilon}$ et est ainsi négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ (car $\varepsilon > 0$). La fonction $t \mapsto \frac{-te^{-tx}}{1+t^2}$ est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ est convergente.

(ii) La fonction F est définie sur $[0,+\infty[\times[\varepsilon,+\infty[$.

Pour tout réel x de $[\varepsilon,+\infty[$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.

F admet sur $[0,+\infty[\times[\varepsilon,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x vérifiant :

- pour tout réel x de $[\varepsilon,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
- pour tout réel t de $[0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[\varepsilon,+\infty[$,
- pour $(t,x) \in [0,+\infty[\times[\varepsilon,+\infty[$, $\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-t\varepsilon} = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), G est dérivable sur $[\varepsilon,+\infty[$ et pour $x \geq \varepsilon$,

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\,dt.$$

3c. Le travail précédent est valable pour tout $\varepsilon > 0$ et donc, G est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x > 0,\ G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\,dt.}$$

4. F admet une dérivée partielle seconde par rapport à x. et pour $(t,x) \in [0,+\infty[\times[\varepsilon,+\infty[$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}$. Mais alors, $\left|\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq e^{-t\varepsilon} = \varphi(t)$. Comme en 3., G est deux fois dérivable sur $[\varepsilon,+\infty[$, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. G est donc deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x > 0,\ G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.}$$

5. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$G''(x) + G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Ainsi,

$$\boxed{G \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

6. 6a. D'après 3., G est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée négative sur $]0,+\infty[$. G est donc décroissante sur $[0,+\infty[$.

6b. G est décroissante et positive sur $[0, +\infty[$. G admet donc une limite en $+\infty$ qui est un réel positif. De plus, pour $x > 0$,

$$0 \leq G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x}.$$

Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0.}$$

Partie IV

1. (erreur d'énoncé : on suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ ou encore que $u_0 > 0$) La fonction f est positive et donc la suite $((-1)^n f(u_n))$ est de signe alterné.
La suite (u_n) est croissante et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc la suite $(f(u_n))$ est décroissante.
La suite (u_n) tend vers $+\infty$ et la fonction f tend vers 0 en $+\infty$. Donc, la suite $(f(u_n))$ tend vers 0.

En résumé, la suite $((-1)^n f(u_n))$ est de signe alternée et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. D'après le critère spécial aux séries alternées,

$$\boxed{\text{la série de terme général } (-1)^n f(u_n) \text{ converge.}}$$

2. Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(t)\sin t \sim g(t)$. Par hypothèse, g a une limite réelle quand t tend vers 0 par valeurs supérieures et il en est de même de la fonction $t \mapsto f(t)\sin t$.

Mais alors, pour $x > 0$ donné, la fonction $t \mapsto f(t)\sin t$ est continue sur $]0, x]$ et se prolonge par continuité en 0. On en déduit que la fonction $t \mapsto f(t)\sin t$ est intégrable sur $]0, x]$.

3. **3a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$, puisque f est décroissante sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, $f((n+1)\pi) \leq f(t) \leq f(n\pi)$ et donc $|\sin t| f((n+1)\pi) \leq |\sin t| f(t) \leq |\sin t| f(n\pi)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$f((n+1)\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,dt \leq w_n \leq f(n\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,dt.$$

Maintenant, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,dt = \int_0^{\pi} |\sin t|\,dt = \int_0^{\pi} \sin t\,dt = 2$ ce qui démontre le résultat.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2f((n+1)\pi) \leq w_n \leq f(n\pi)).}$$

3b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ par la fonction continue $2f$ est un intervalle. Plus précisément, la fonction $2f$ étant décroissante sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, $2f([n\pi, (n+1)\pi])$ est l'intervalle $[2f((n+1)\pi), 2f(n\pi)]$. En particulier, comme $w_n \in [2f((n+1)\pi), 2f(n\pi)]$, il existe $u_n \in [n\pi, (n+1)\pi]$ tel que $w_n = 2f(u_n)$.

3c. Sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, le signe de $\sin t$ est $(-1)^n$ ou encore $|\sin t| = (-1)^n \sin t$. D'où le résultat.

4. **4a.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2(n+1)\pi} f(t)\sin t\,dt - \int_0^{2n\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} f(t)\sin t\,dt &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(t)\sin t\,dt + \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} f(t)\sin t\,dt \\
&= (-1)^{2n} w_{2n} + (-1)^{2n+1} w_{2n+1} = w_{2n} - w_{2n+1} \\
&= 2(f(u_{2n}) - f(u_{2n+1})) \geq 0,
\end{aligned}$$

car $u_{2n} \leq (2n+1)\pi \leq u_{2n+1}$.

$$\boxed{\text{La suite } \left(\int_0^{2n\pi} f(t)\sin t\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

4b. De même, pour tout entier n, $\displaystyle\int_0^{(2n+3)\pi} f(t)\sin t\ dt - \int_0^{(2n+1)\pi} f(t)\sin t\ dt = 2(-f(u_{2n+1}) + f(u_{2n+2})) \leq 0$.

$$\boxed{\text{La suite } \left(\int_0^{(2n+1)\pi} f(t)\sin t\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

4c. Pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^{(2n+1)\pi} f(t)\sin t\ dt - \int_0^{2n\pi} f(t)\sin t\ dt = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(t)\sin t\ dt = (-1)^{2n} w_{2n} = w_{2n}.$$

Or, $0 \leq w_{2n} \leq 2f(2n\pi)$. Comme $2f(2n\pi)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{(2n+1)\pi} f(t)\sin t\ dt - \int_0^{2n\pi} f(t)\sin t\ dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, les deux suites $\left(\displaystyle\int_0^{2n\pi} f(t)\sin t\ dt\right)$ et $\left(\displaystyle\int_0^{(2n+1)\pi} f(t)\sin t\ dt\right)$ sont adjacentes. Elles convergent donc et ont même limite.

5. Posons $I_n = I(0, n\pi) = \displaystyle\int_0^{n\pi} f(t)\sin t\ dt$. D'après la question IV.4., les deux suites (I_{2n}) et (I_{2n+1}) convergent et ont même limite. On sait alors que la suite (I_n) converge.

Soient x et y deux réels positifs tels que $x \leq y$. Si $x > 0$, $I_f(x, y)$ existe car la fonction $t \mapsto f(t)\sin t$ est continue sur le segment $[x, y]$. $I_f(0, y)$ existe également d'après la question IV.2.

Puisque $\displaystyle\int_x^y \sin t f(t)\ dt = \int_0^y \sin t f(t)\ dt - \int_0^x \sin t f(t)\ dt$, la fonction $y \mapsto I_f(x, y)$ a une limite réelle quand y tend vers $+\infty$ si et seulement si la fonction $y \mapsto I(0, y)$ a une limite réelle quand y tend vers $+\infty$.

Pour $y \geq 0$, on a

$$I_f(0, y) = \int_0^{E(\frac{y}{\pi})\pi} f(t)\sin t\ dt + \int_{E(\frac{y}{\pi})\pi}^{y} f(t)\sin t\ dt.$$

D'après le début de la question, $\int_0^{E(\frac{y}{\pi})\pi} f(t)\sin t\ dt$ a une limite réelle quand y tend vers $+\infty$. D'autre part,

$$\left|\int_{E(\frac{y}{\pi})\pi}^{y} f(t)\sin t\ dt\right| \leq \int_{E(\frac{y}{\pi})\pi}^{y} |\sin t| \times f(t)\ dt \leq \int_{E(\frac{y}{\pi})\pi}^{y} 1.f\left(E(\frac{y}{\pi})\pi\right)\ dt = f\left(E(\frac{y}{\pi})\pi\right)(y - E(\frac{y}{\pi})\pi) \leq \pi f\left(E(\frac{y}{\pi})\pi\right).$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ et il en est de même de $\displaystyle\int_{E(\frac{y}{\pi})\pi}^{y} f(t)\sin t\ dt$. Finalement,

$$\boxed{\text{la fonction } y \mapsto I_f(0, y) \text{ a une limite réelle quand } y \text{ tend vers } +\infty.}$$

6. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ vérifie les hypothèses a., b., c. et d. du début de la partie IV et d'après la question IV.5., pour tout réel positif x I_x existe.

Partie V

1. a., b. et c. sont clairs et d'autre part, $t \times h_x(t) = \dfrac{t}{t+x}$ tend vers 0 quand t tend vers 0, ce qui montre d..

2. On pose $u = x + t$ ou en core $t = u - x$. On obtient $H(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\ du$.

3. Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$.

$$\int_x^y \frac{\cos t}{t}\,dt = \int_{x+\frac{\pi}{2}}^{y+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u-\frac{\pi}{2})}{u-\frac{\pi}{2}}\,du = \int_{x+\frac{\pi}{2}}^{y+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u-\frac{\pi}{2}}\,du.$$

Cette dernière expression a une limite réelle quand y tend vers $+\infty$. On en déduit que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ existe.

D'après la question V.2., on a alors

$$\boxed{\forall x > 0,\ H(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt.}$$

Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ est définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Puisque $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \int 1x\frac{\sin t}{t}\,dt$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $\frac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt\right) = -\dfrac{\sin x}{x}$.

De même, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ est définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt\right) = -\dfrac{\cos x}{x}$.

On en déduit que H est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
H'(x) &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt + \cos x\left(-\frac{\sin x}{x}\right) - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt - \sin x\left(-\frac{\cos x}{x}\right)\\
&= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt.
\end{aligned}$$

Mais alors, H est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
H''(x) &= -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \sin x\left(-\frac{\sin x}{x}\right) + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt - \cos x\left(-\frac{\cos x}{x}\right)\\
&= -H(x) + \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Ainsi, H est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0,+\infty[$.

4. Les deux expressions $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (restes d'intégrales convergentes). Puisque $|H(x)| \leq \left|\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| + \left|\int x{+}\infty\frac{\cos t}{t}\,dt\right|$, on en déduit que $H(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

5. D'après la question V.3., H est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0,+\infty[$. D'après la question III.5., G est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0,+\infty[$. Il en résulte que $G - H$ est solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur $]0,+\infty[$.
D'après la question III.6b., G tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et d'après la question V.4., H tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Ainsi, la fonction $G - H$ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$, à savoir 0.
D'après I.3., $G - H$ est la fonction nulle, ou encore

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.}$$

