SESSION 2005

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice 1

1. • φ est une application de $(\mathbb{R}_n[X])^2$ dans $\mathbb{R}$.
• Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$.

$$\varphi(Q, P) = \sum_{i=1}^{n+1} Q(x_i)P(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} P(x_i)Q(x_i) = \varphi(P, Q).$$

Donc, φ est symétrique.
• Soient $(P_1, P_2, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2 Q) = \sum_{i=1}^{n+1}(\lambda_1 P_1(x_i)+\lambda_2 P_2(x_i))Q(x_i) = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n+1} P_1(x_i)Q(x_i)+\lambda_2 \sum_{i=1}^{n+1} P_2(x_i)Q(x_i) = \lambda_1\varphi(P_1, Q)+\lambda_2\varphi(P_2, Q).$$

Donc φ est linéaire par rapport à sa première variable et par symétrie, φ est bilinéaire.

• Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\varphi(P, P) = \sum_{i=1}^{n+1}(P(x_i))^2 \geq 0$. De plus, si $\varphi(P, P) = 0$, alors $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $P(x_i) = 0$. Mais alors le polynôme P, de degré au plus n, s'annule en les $n+1$ réels deux à deux distincts x_1, ..., x_{n+1} et est donc le polynôme nul. Ainsi, φ est une forme définie positive.

En résumé, φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur $\mathbb{R}_n[X]$ et donc

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$$

2. (a) Pour $k \in [\![1, n+1]\!]$, on a $\deg(P_k) = n+1-k$ et en particulier, $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus, les P_k sont de degrés deux à deux distincts et donc la famille $(P_k)_{1\leq k\leq n+1}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $\text{card}(P_k)_{1\leq k\leq n+1} = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) < +\infty$, on a montré que

$$\boxed{\text{la famille } (P_k)_{1\leq k\leq n+1} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

(b) • On sait que la famille $(L_i)_{1\leq i\leq n+1}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{i=1}^{n+1} P(x_i)L_i.$$

• Pour $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, on a $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Par suite, pour $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$,

$$\varphi(L_i, L_j) = \sum_{k=1}^{n+1} L_i(x_k)L_j(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta_{i,j}.$$

Donc, la famille $(L_i)_{1\leq i\leq n+1}$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}_n[X], \varphi)$ (1).
• Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$.

$$P_i = \sum_{j=1}^{n+1} P_i(x_j)L_j.$$

Mais pour $j \geq i+1$, on a $P_i(x_j) = 0$ et donc

$$P_i = \sum_{j=1}^{i} P_i(x_j)L_j \in \text{Vect}(L_j)_{1\leq j\leq i}.$$

Mais alors, par récurrence, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $\text{Vect}(P_1, \ldots, P_i) = \text{Vect}(L_1, \ldots, L_i)$ (2).

- Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$.

$$\varphi(P_i, L_i) = \sum_{j=1}^{n+1} P_i(x_j)L_i(x_j) = \sum_{j=1}^{n+1} P_i(x_j)\delta_{i,j} = P_i(x_i) = \prod_{k=i+1}^{n+1}(x_k - x_i) > 0 \text{ car } x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n+1}.$$

Donc, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $\varphi(P_i, L_i) > 0$ (3).

(1), (2) et (3) permettent alors d'affirmer que

$$\boxed{\text{la famille } (L_i)_{1\leq i\leq n+1} \text{ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la famille } (P_i)_{1\leq i\leq n+1} \text{ pour le produit scalaire } \varphi.}$$

3. (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Puisque $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire φ, on a

$$X^k = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi(X_k, L_i)L_i.$$

Mais

$$\varphi(X_k, L_i) = \sum_{j=1}^{n=1} x_j^k L_i(x_j) = \sum_{j=1}^{n=1} x_j^k \delta_{i,j} = x_i^k.$$

Finalement

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ X^k = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^k L_i.}$$

(b) (i) D'après ce qui précède,

$$\det_{\mathcal{B}'}(1, X, \ldots, X^n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_1^3 & \ldots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \Delta_{n+1}.$$

Posons $(-1)^n P_1 = Q = \prod_{k=2}^{n+1}(X - x_k) = X^n + \lambda_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \lambda_1 X + \lambda_0$. Remplaçons la colonne C_{n+1} de Δ_{n+1} par $C_{n+1} + \lambda_{n-1}C_n + \ldots + \lambda_1 C_2 + \lambda_0 C_1$. Cette transformation ne modifie pas la valeur du déterminant et on a

$$\det_{\mathcal{B}'}(1, X, \ldots, X^n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & Q(x_1) \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} & Q(x_2) \\ 1 & x_3 & \ldots & x_3^{n-1} & Q(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} & Q(x_{n+1}) \end{vmatrix} = Q(x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & 1 \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} & 0 \\ 1 & x_3 & \ldots & x_3^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant le dernier déterminant suivant sa dernière colonne, on obtient

$$\det_{\mathcal{B}'}(1, X, \ldots, X^n) = \prod_{i=2}^{n+1}(x_1 - x_i) \times (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n+1}(x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(ii) En tenant compte de $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$, on obtient alors par récurrence

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}'}(1, X, \ldots, X^n) = \prod_{1\leq i<j\leq n+1}(x_j - x_i).}$$

(c) Soit $\mathcal{C}$ une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}_n[X], \varphi)$. On sait que la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale et donc

$$|\det_{\mathcal{C}}(1, X, \ldots, X^n)| = |\det_{\mathcal{C}}\mathcal{B}' \times \det_{\mathcal{B}'}(1, X, \ldots, X^n)| = |\pm 1 \times \det_{\mathcal{B}'}(1, X, \ldots, X^n)| = |\det_{\mathcal{B}'}(1, X, \ldots, X^n)|.$$

$$\boxed{\text{Pour toute base orthonormée } \mathcal{C},\ |\det_{\mathcal{C}}(1, X, \ldots, X^n)| = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i).}$$

(d) Soit $\mathcal{D} = (Q_i)_{0 \leq i \leq n}$ l'orthonormalisée de la base $(1, X, \ldots, X^n)$. La matrice de $(1, X, \ldots, X^n)$ dans $\mathcal{D}$ est triangulaire supérieure.
(e) Puisque $\mathcal{D}$ est orthonormée, les coefficients diagonaux de cette matrice sont les $\varphi(X^i, Q_i)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)\right)^2 &= (\det_{\mathcal{D}}(1, X, \ldots, X^n))^2 \\
&= \left(\prod_{p=0}^{n} \varphi(X^p, Q_p)\right)^2 = \prod_{p=0}^{n} \varphi(X^p, Q_p)^2 \\
&\leq \prod_{p=0}^{n} \varphi(X^p, X^p)^2 \times \varphi(Q_p, Q_p)^2 = \prod_{p=0}^{n} \varphi(X^p, X^p)^2 = \prod_{p=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^{2p}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)\right)^2 \leq \prod_{p=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^{2p}\right).}$$

Exercice 2

1. (a) • La fonction r est 2π-périodique. De plus, pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, $1 - \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$.
La fonction r est paire et donc, pour $\theta \in [-\pi, 0[$,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

Donc on étudie et on construit la portion de $\mathcal{P}$ correspondant à $\theta \in]0, \pi]$, la courbe complète étant alors obtenue par réflexion d'axe (Ox).

• La fonction $\theta \mapsto 1 - \cos\theta$ est strictement croissante et strictement positive sur $]0, \pi]$. Donc la fonction r est strictement décroissante sur $]0, \pi]$ et strictement positive sur $]0, \pi]$.

• Quand θ tend vers 0 par valeurs supérieures, $r(\theta)$ tend vers $+\infty$. De plus

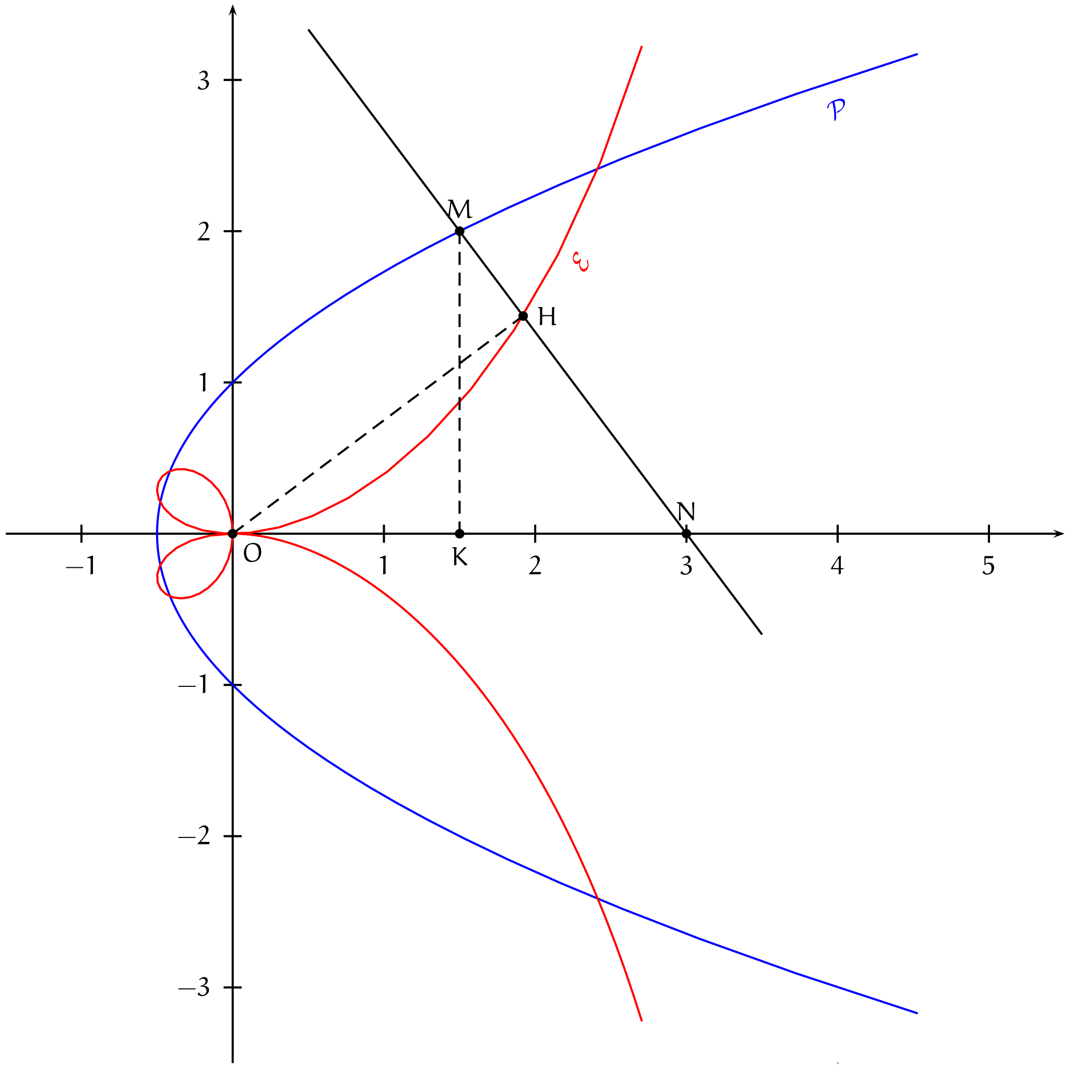
$$y(\theta)\sin\theta = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \operatorname{cotan}\frac{\theta}{2},$$

et $y(\theta)\sin\theta$ tend vers $+\infty$ quand θ tend vers 0 par valeurs supérieures. On en déduit que $\mathcal{P}$ admet une branche parabolique de direction (Ox) quand θ tend vers 0 par valeurs supérieures.

• Pour $\theta \in]0, \pi]$, $r'(\theta) = \dfrac{-\sin\theta}{(1 - \cos\theta)^2}$. Donc la tangente en $M(\pi)$ est dirigée par le vecteur

$$r'(\pi)\overrightarrow{u}_\pi + r(\pi)\overrightarrow{v}_\pi = r(\pi)(-\overrightarrow{j}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{j}.$$

On en déduit le tracé de la courbe $\mathcal{P}$.



(b) Soit M un point du plan dont les coordonnées cartésiennes sont notées (x, y) et un couple de coordonnées polaires est noté $[r, \theta]$.

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow r = \frac{1}{1-\cos\theta} \Leftrightarrow r - r\cos\theta = 1 \Leftrightarrow r^2 = (1 + r\cos\theta)^2 \text{ (car } r \geq 0)$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1+x)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

$\mathcal{P}$ est donc une parabole de sommet $S(-\frac{1}{2}, 0)$, d'axe focal (Ox) et tournée vers les x positifs. Le paramètre p de $\mathcal{P}$ vaut 1 et donc le foyer F a pour coordonnées $(0, 0)$ et la directrice (D) a pour équation $x = -1$.

$\mathcal{P}$ est une parabole de sommet $S(-\frac{1}{2}, 0)$ et d'axe focal (Ox),
de foyer $F(0, 0)$ et de directrice (D) : $x = -1$.

2. (a) Soient $\theta \in [-\pi, 0[\cup]0, \pi]$ puis M le point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $\left(\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}, \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$.

Le point K a alors pour coordonnées $\left(\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}, 0\right)$ puis le point N a pour coordonnées $\left(\frac{2\cos\theta}{1-\cos\theta}, 0\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $\left(\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}, -\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$.

Une équation de la droite (MN) est alors $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\left(x - \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}\right) + \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}\left(y - \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right) = 0$ ou encore

$$\sin\theta((1-\cos\theta)x - \cos\theta) + \cos\theta((1-\cos\theta)y - \sin\theta) = 0$$

ou enfin

$$\sin\theta(1-\cos\theta)x+\cos\theta(1-\cos\theta)y-2\sin\theta\cos\theta=0.$$

Un vecteur normal à la droite (MN) est le vecteur $\overrightarrow{n}=(\sin\theta,\cos\theta)$.
Le point H est donc de la forme $H=O+\lambda\overrightarrow{n}=(\lambda\sin\theta,\lambda\cos\theta)$ avec

$$\sin\theta(1-\cos\theta)\lambda\sin\theta+\cos\theta(1-\cos\theta)\lambda\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta=0,$$

et donc

$$\lambda=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\sin(2\theta)}{1-\cos\theta}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{les coordonnées de } H \text{ sont } \left(\frac{\sin(2\theta)}{1-\cos\theta}\sin\theta,\frac{\sin(2\theta)}{1-\cos\theta}\cos\theta\right).}$$

(b) Soit $\theta\in[-\pi,0[\cup]0,\pi]$. $\overrightarrow{OH}=\dfrac{\sin(2\theta)}{1-\cos\theta}(\sin\theta,\cos\theta)$. Maintenant,

- si $\theta\in]-\pi,-\dfrac{\pi}{2}[\cup]0,\dfrac{\pi}{2}[$, alors $\dfrac{\sin(2\theta)}{1-\cos\theta}>0$ et on a $\cos\varphi=\sin\theta$ et $\sin\varphi=\cos\theta$.
- si $\theta\in]-\dfrac{\pi}{2},0[\cup]\dfrac{\pi}{2},\pi[$, alors $\dfrac{\sin(2\theta)}{1-\cos\theta}<0$ et on a $\cos\varphi=-\sin\theta$ et $\sin\varphi=-\cos\theta$.
- Si $\theta\in\{-\pi,-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2},\pi\}$, $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{0}$ et φ n'est pas défini.

(c) Notons (Γ_1) (resp. (Γ_2)) l'ensemble des points $H\left(\dfrac{\sin(2\theta)}{1-\cos\theta}\sin\theta,\dfrac{\sin(2\theta)}{1-\cos\theta}\cos\theta\right)$ avec $\theta\in[-\pi,0[\cup]0,\pi]$ et $\sin(2\theta)>0$ (resp. $\sin(2\theta)<0$). On a alors $\mathcal{E}=(\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)\cup\{O\}$.
- si $\theta\in]-\pi,-\dfrac{\pi}{2}[\cup]0,\dfrac{\pi}{2}[$, on peut prendre $\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ et H a pour coordonnées $\left(\dfrac{\sin(2\varphi)}{1-\sin\varphi}\cos\varphi,\dfrac{\sin(2\varphi)}{1-\sin\varphi}\sin\varphi\right)$. De plus, θ décrit $]-\pi,-\dfrac{\pi}{2}[\cup]0,\dfrac{\pi}{2}[$ si et seulement si φ décrit $]0,\dfrac{\pi}{2}[\cup]\pi,\dfrac{3\pi}{2}[$. (Γ_1) est donc la courbe d'équation polaire $r=r_1=\dfrac{\sin(2\varphi)}{1-\sin\varphi}$, $\varphi\in]0,\dfrac{\pi}{2}[\cup]\pi,\dfrac{3\pi}{2}[$.
- si $\theta\in]-\dfrac{\pi}{2},0[\cup]\dfrac{\pi}{2},\pi[$, on peut prendre $\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\theta+\pi$ et H a pour coordonnées $\left(\dfrac{-\sin(2\varphi)}{1+\sin\varphi}\cos\varphi,\dfrac{-\sin(2\varphi)}{1+\sin\varphi}\sin\varphi\right)$. De plus, θ décrit $]-\dfrac{\pi}{2},0[\cup]\dfrac{\pi}{2},\pi[$ si et seulement si φ décrit $]-\dfrac{\pi}{2},0[\cup]\dfrac{\pi}{2},\pi[$. (Γ_2) est donc la courbe d'équation polaire $r=r_1=\dfrac{-\sin(2\varphi)}{1+\sin\varphi}$, $\varphi\in]-\dfrac{\pi}{2},0[\cup]\dfrac{\pi}{2},\pi[$.

Enfin, pour $\varphi\in]-\dfrac{\pi}{2},0]\cup]\dfrac{\pi}{2},\pi[$, on a $r_2(\varphi)=-r_1(\varphi+\pi)$. Ainsi, le point de coordonnées polaires $[r_2(\varphi),\varphi]$ est aussi le point de coordonnées polaires $[-r_1(\varphi+\pi),\varphi]=[r_1(\varphi+\pi),\varphi+\pi]$ de sorte que Γ_2 est la courbe d'équation polaire $r=r_1(\varphi')$ où $\varphi'=\varphi+\pi$ décrit $]\dfrac{\pi}{2},\pi[\cup]\dfrac{3\pi}{2},2\pi[$. Finalement, en tenant compte des cas où $H=0$

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est la courbe d'équation polaire } r=\frac{\sin(2\varphi)}{1-\sin\varphi},\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},2\pi].}$$

3. • r est 2π-périodique et on étudiera la courbe sur $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[\cup]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]$ (qui est symétrique par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$).
- Si $\varphi\in]0,\dfrac{\pi}{2}[\cup]\pi,\dfrac{3\pi}{2}[$, $\sin(2\varphi)>0$ et donc $r(\varphi)>0$ et si $\varphi\in]-\dfrac{\pi}{2},0[\cup]\dfrac{\pi}{2},\pi[$, $\sin(2\varphi)<0$ et donc $r(\varphi)<0$.

Enfin $r(\varphi)=0\Leftrightarrow\varphi\in\{-\dfrac{\pi}{2},0,\pi,\dfrac{3\pi}{2}\}$.
- Pour $\varphi\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[\cup]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]$,

$$r(\pi-\varphi)=\frac{\sin(2\pi-2\varphi)}{1-\sin(\pi-\varphi)}=-\frac{\sin(2\varphi)}{1-\sin\varphi}=-r(\varphi),$$

et donc

$$M(\pi-\varphi) = [r(\pi-\varphi), \pi-\varphi] = [-r(\varphi), \pi-\varphi] = [r(\varphi), -\varphi] = s_{(Ox)}(M(\varphi)).$$

On étudie et on construit la portion de la courbe $\mathcal{E}$ obtenue quand φ décrit $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox).

• **Etude quand φ tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures.** Déjà, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} r(\varphi) = +\infty$ et donc quand φ tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures, $\mathcal{E}$ admet une direction asymptotique d'angle polaire $\frac{\pi}{2}$.

Pour $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, posons $h = \varphi - \frac{\pi}{2}$ ou encore $\varphi = \frac{\pi}{2} + h$. Alors

$$r(\varphi)\sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\pi+2h)}{1-\sin(\frac{\pi}{2}+h)}\sin h = -\frac{\sin(2h)}{1-\cos h}\sin h = -\frac{\sin(2h)}{2\sin^2\frac{h}{2}}2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2} = -\frac{\sin(2h)\cos\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{2h}{\frac{h}{2}} = -4.$$

et donc

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} r(\varphi)\sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) = -4.$$

On en déduit que $\mathcal{E}$ admet une droite asymptote d'équation $x(-\sin\frac{\pi}{2}) + y(\cos\frac{\pi}{2}) = -4$ ou encore $x = 4$.

4. Voir graphique plus haut.

Exercice 3

1. (a) Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}C \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$.

- C'est clair pour $k = 1$.
- Soit $k \geq 1$. Si $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}C \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}C \\ 0 & B^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & A^kC + kA^{k-1}CB \\ 0 & B^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & A^kC + kA^{k-1}AC \\ 0 & B^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^kC \\ 0 & B^{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Soit alors $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{C}[X]$,

$$P(M) = \sum_{k=0}^{m} a_k M^k = a_0\begin{pmatrix} A^0 & 0 \\ 0 & B^0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{m} a_k \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}C \\ 0 & B^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m} a_k A^k & \sum_{k=1}^{m} kA^{k-1}C \\ 0 & \sum_{k=0}^{m} a_k B^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & D \\ 0 & P(B) \end{pmatrix},$$

où $D = \sum_{k=1}^{m} kA^{k-1}C$. On a montré que

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}[X],\ \exists D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) /\ P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & D \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}.}$$

(b) Puisque M est diagonalisable, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ à racines simples tels que $P(M) = 0$. Pour ce polynôme P, la matrice $\begin{pmatrix} P(A) & D \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$ est nulle et en particulier $P(A) = P(B) = 0$. On a montré que

$$\boxed{\exists P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}/\ P \text{ à racines simples et } P(A) = P(B) = 0.}$$

(c) Mais alors

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont diagonalisables.}}$$

2. (a) $MN = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & CB \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $NM = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AC \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et puisque $AC = CB$, on a

$$\boxed{MN = NM.}$$

(b) Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ de matrices respectives M et N dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C}^n$.
• Puisque M est diagonalisable, f est diagonalisable et puisque A et B sont diagonalisables, N est diagonalisable et il en est de même de g.
• Notons λ_1, ..., λ_p les valeurs propres deux à deux distinctes de f et E_{λ_1}, ..., E_{λ_p} les sous-espaces propres associés. Puisque f est diagonalisable, on a $\mathbb{C}^n = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$.
• Puisque g commute avec f, on sait que les E_{λ_i} sont stables par g. La restriction g_i de g à E_{λ_i} est donc un endomorphisme de E_{λ_i}. Maintenant, g est diagonalisable et donc il existe $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ à racines simples tels que $Q(g) = 0$. Mais alors, pour chaque i, $Q(g_i) = 0$ ce qui montre que chaque g_i est diagonalisable. Pour chaque i, notons $\mathscr{B}_i$ une base de vecteurs propres de g_i puis posons $\mathscr{B}' = \mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_p$. Puisque $\mathbb{C}^n = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et par construction, les vecteurs de $\mathscr{B}'$ sont tous des vecteurs propres de f et de g.
• Soit R la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$. Les formules de changement de bases montrent que RMR^{-1} et RNR^{-1} sont des matrices diagonales respectivement notées $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

On a montré que

$$\boxed{\exists R \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C}),\ \exists (D, D') \in (\mathscr{D}_n(\mathbb{C}))^2/; M = R^{-1}DR \text{ et } N = R^{-1}D'R.}$$

(c) Mais alors, $\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M - N = R^{-1}(D - D')R$. Ainsi la matrice $\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice diagonale et donc

$$\boxed{\text{la matrice } \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable.}}$$

3. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls. Cette matrice admet donc 0 pour unique valeur propre. Etant diagonalisable, cette matrice est semblable à la matrice $D = \text{diag}(0, \ldots, 0) = 0$. Comme une matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle, on a montré que

$$\boxed{C = 0.}$$

