

## Epreuve de Mathématiques A MP

## Partie I

1 - Puisque  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$  et  $I$  contient 0, le théorème de CAUCHY permet d'affirmer l'existence et l'unicité de  $\varphi(f)$ . On a alors

$$\begin{aligned} \forall x \in I, (\varphi(f))'(x) + c\varphi(f)(x) &= f(x) \Rightarrow \forall x \in I, e^{cx}(\varphi(f))'(x) + ce^{cx}\varphi(f)(x) = f(x)e^{cx} \\ &\Rightarrow \forall x \in I, (e^{cx}\varphi(f))'(x) = f(x)e^{cx} \\ &\Rightarrow \forall x \in I, e^{cx}\varphi(f)(x) = e^0\varphi(f)(0) + \int_0^x f(t)e^{ct} dt \\ &\Rightarrow \forall x \in I, e^{cx}\varphi(f)(x) = \int_0^x f(t)e^{ct} dt \Rightarrow \forall x \in I, \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x f(t)e^{ct} dt. \end{aligned}$$

$$\forall x \in I, \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x f(t)e^{ct} dt.$$

2 - Par définition  $\varphi(f)$  est dérivable sur  $I$  et  $(\varphi(f))' = -c\varphi(f) + f$ . On en déduit que  $(\varphi(f))'$  est continue sur  $I$  et donc que

$$\varphi(f) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I.$$

Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et  $(f, g) \in (\mathcal{C}^0(I))^2$ . Pour  $x \in I$ ,

$$\varphi(\lambda f + \mu g)(x) = e^{cx} \int_0^x (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{ct} dt = \lambda e^{cx} \int_0^x f(t)e^{ct} dt + \mu e^{cx} \int_0^x g(t)e^{ct} dt = (\lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g))(x),$$

et donc  $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$ . On a montré que

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0(I)).$$

## Partie II

1 - Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I)$ . Puisque  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$ , d'une part  $f$  est bornée sur ce segment et d'autre part  $f$  et  $f^2$  sont intégrables sur ce segment. On en déduit que  $\|f\|_\infty$  et  $\|f\|_1$  et  $\|f\|_2$  existent dans  $\mathbb{R}$ . De plus, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\|f\|_1 = \int_{[a,b]} 1 \times |f| \leq \sqrt{\int_{[a,b]} 1^2} \sqrt{\int_{[a,b]} f^2} = \sqrt{b-a} \|f\|_2,$$

puis

$$\sqrt{b-a} \|f\|_2 = \sqrt{b-a} \sqrt{\int_{[a,b]} f^2} \leq \sqrt{b-a} \sqrt{\int_{[a,b]} \|f\|_\infty^2} = (b-a) \|f\|_\infty.$$

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2 \leq (b-a) \|f\|_\infty.$$

2 - Soient  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  puis  $x \in [a, b]$ . Notons  $J$  l'intervalle  $[x, 0]$  si  $x \leq 0$  et  $[0, x]$  si  $x \geq 0$ .

$$\begin{aligned} |\varphi(f)(x)| &= e^{-cx} \left| \int_0^x f(t)e^{ct} dt \right| \leq e^{-cx} \int_J |f(t)|e^{ct} dt \leq e^{-cx} \int_J \|f\|_\infty e^{ct} dt \\ &= e^{-cx} \frac{1}{c} |1 - e^{cx}| \times \|f\|_\infty = \frac{1}{c} |1 - e^{-cx}| \times \|f\|_\infty \leq \frac{1 + e^{-cx}}{c} \|f\|_\infty \leq \frac{1 + e^{-ca}}{c} \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque la borne supérieure de  $|\varphi(f)|$  sur  $[a, b]$  est le plus petit des majorants de  $|\varphi(f)|$  sur  $[a, b]$ ,

$$\forall x \in [a, b], |\varphi(f)(x)| \leq \frac{1 + e^{c|a|}}{c} \|f\|_\infty \text{ et donc } \|\varphi(f)\|_\infty \leq \frac{1 + e^{c|a|}}{c} \|f\|_\infty.$$

On a montré que

$$\exists M_0 \in \mathbb{R}^+ / \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0 \|f\|_\infty.$$

3 - Soient  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  puis  $x \in [a, b]$ . Notons de nouveau  $J$  l'intervalle  $[x, 0]$  si  $x \leq 0$  et  $[0, x]$  si  $x \geq 0$ .

$$\begin{aligned} |\varphi(f)(x)| &= e^{-cx} \left| \int_0^x f(t)e^{ct} dt \right| \leq e^{-cx} \int_J |f(t)|e^{ct} dt \leq e^{-ca} \int_J |f(t)| \times e^{cb} dt \\ &\leq e^{c(b-a)} \int_a^b |f(t)| dt = e^{c(b-a)} \|f\|_1. \end{aligned}$$

On a montré que

$$\exists A \in \mathbb{R}^+ / \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in [a, b], |\varphi(f)(x)| \leq A \|f\|_1.$$

On en déduit encore que pour  $f \in \mathcal{C}^0(I)$ ,

$$\|\varphi(f)\|_1 = \int_a^b |\varphi(f)(x)| dx \leq \int_a^b A \|f\|_1 dx = (b-a)A \|f\|_1.$$

$$\exists A' \in \mathbb{R}^+ / \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_1 \leq A' \|f\|_1.$$

4 - Soient  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  puis  $x \in [a, b]$ . D'après les questions 1. et 3.,

$$|\varphi(f)(x)| \leq A \|f\|_1 \leq AM_1 \|f\|_2,$$

et donc

$$\exists B \in \mathbb{R}^+ / \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in [a, b], |\varphi(f)(x)| \leq B \|f\|_2.$$

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I)$ .

$$\|\varphi(f)\|_2 = \sqrt{\int_{[a,b]} f^2} \leq \sqrt{\int_{[a,b]} B^2 \|f\|_2^2} = B\sqrt{b-a} \|f\|_2.$$

Donc

$$\exists K \in \mathbb{R}^+ / \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_2 \leq K \|f\|_2.$$

5 - a), b) et c) D'après la question 2.,  $\exists M_0 \in \mathbb{R}^+ / \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0 \|f\|_\infty$  et puisque  $\varphi$  est linéaire,

$$\varphi \text{ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé } (\mathcal{C}^0(I), \|\cdot\|_\infty).$$

De même, les questions 3. et 4. permettent d'affirmer que

$\varphi$  est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{C}^0(I), \|\cdot\|_1)$  et de l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{C}^0(I), \|\cdot\|_2)$ .

### Partie III

1 - Soit  $\lambda > 0$ . Pour  $x \in [0, +\infty[$ ,

$$\varphi(f_\lambda)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{-\lambda t} e^{ct} dt = e^{-cx} \int_0^x e^{(c-\lambda)t} dt.$$

• Si  $\lambda \neq c$ , pour  $x \in [0, +\infty[$ , on a

$$\varphi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{c-\lambda} e^{-cx} [e^{(c-\lambda)t}]_0^x = \frac{1}{c-\lambda} e^{-cx} (e^{(c-\lambda)x} - 1) = \frac{e^{-\lambda x} - e^{-cx}}{c-\lambda}.$$

• Si  $\lambda = c$ , pour  $x \in [0, +\infty[$ , on a

$$\varphi(f_\lambda)(x) = e^{-cx} \int_0^x dt = x e^{-cx}.$$

- Si  $\lambda \neq c$ ,  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $\varphi(f_\lambda)(x) = \frac{e^{-\lambda x} - e^{-cx}}{c-\lambda}$ ,
- Si  $\lambda = c$ ,  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $\varphi(f_\lambda)(x) = x e^{-cx}$ .

2 - Dans tous les cas,  $f_\lambda$  et  $\varphi(f_\lambda)$  sont continues sur  $[0, +\infty[$  et négligeables en  $+\infty$  devant  $\frac{1}{x^2}$ . Par suite,

$$\forall \lambda \in ]0, +\infty[, f_\lambda \in L^1(I) \text{ et } \forall \lambda \in ]0, +\infty[, \varphi(f_\lambda) \in L^1(I).$$

Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ .

$$\|f_\lambda\|_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[ -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\forall \lambda \in ]0, +\infty[, \|f_\lambda\|_1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ .

• Si  $\lambda = c$ ,

$$\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \|\varphi(f_c)\|_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-cx} dx = \left[ \left( -\frac{x}{c} - \frac{1}{c^2} \right) e^{-cx} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{c^2}.$$

• Si  $\lambda \neq c$ , en discutant suivant le fait que  $\lambda > c$  ou  $\lambda < c$ , on a

$$\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \frac{1}{|c-\lambda|} \int_0^{+\infty} |e^{-\lambda x} - e^{-cx}| dx = \frac{1}{|c-\lambda|} \left[ -\left| \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{e^{-cx}}{c} \right| \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{|c-\lambda|} \left| \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{c} \right| = \frac{1}{c\lambda}.$$

ce qui reste vrai quand  $\lambda = c$ .

$$\forall \lambda \in ]0, +\infty[, \|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \frac{1}{c\lambda}.$$

3 - Dans tous les cas  $f_\lambda^2$  et  $\varphi(f_\lambda)^2$  sont continues sur  $[0, +\infty[$  et négligeables en  $+\infty$  devant  $\frac{1}{x^2}$ . Par suite,

$$\forall \lambda \in ]0, +\infty[, f_\lambda \in L^2(I) \text{ et } \forall \lambda \in ]0, +\infty[, \varphi(f_\lambda) \in L^2(I).$$

Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ .

$$\|f_\lambda\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-2\lambda x} dx} = \sqrt{\left[-\frac{e^{-2\lambda x}}{2\lambda}\right]_0^{+\infty}} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}.$$

$$\forall \lambda \in ]0, +\infty[, \|f_\lambda\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}.$$

Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ .

• Si  $\lambda = c$ ,  $\|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \|\varphi(f_c)\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2cx} dx}$ . Deux intégration par parties fournissent

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-2cx} dx &= -\frac{1}{2c} x^2 e^{-2cx} + \frac{1}{c} \int x e^{-2cx} dx = -\frac{1}{2c} x^2 e^{-2cx} - \frac{1}{2c^2} x e^{-2cx} + \frac{1}{2c^2} \int e^{-2cx} dx \\ &= -\frac{1}{2c} x^2 e^{-2cx} - \frac{1}{2c^2} x e^{-2cx} - \frac{1}{4c^3} e^{-2cx} + C, \end{aligned}$$

et donc

$$\|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \sqrt{\left[-\frac{1}{2c} x^2 e^{-2cx} - \frac{1}{2c^2} x e^{-2cx} - \frac{1}{4c^3} e^{-2cx}\right]_0^{+\infty}} = \sqrt{\frac{1}{4c^3}} = \frac{1}{\sqrt{4c^3}}.$$

• Si  $\lambda \neq c$ , on a

$$\begin{aligned} \|\varphi(f_\lambda)\|_2 &= \frac{1}{|c-\lambda|} \sqrt{\int_0^{+\infty} (e^{-\lambda x} - e^{-cx})^2 dx} = \frac{1}{|c-\lambda|} \sqrt{\left[-\frac{e^{-2\lambda x}}{2\lambda} + 2\frac{e^{-(\lambda+c)x}}{\lambda+c} - \frac{e^{-2cx}}{2c}\right]_0^{+\infty}} \\ &= \frac{1}{|c-\lambda|} \sqrt{\frac{1}{2\lambda} - 2\frac{1}{\lambda+c} + \frac{1}{2c}} = \frac{1}{|c-\lambda|} \sqrt{\frac{c(\lambda+c) - 4\lambda c + \lambda(\lambda+c)}{2c\lambda(\lambda+c)}} = \frac{1}{|c-\lambda|} \sqrt{\frac{c^2 - 2\lambda c + \lambda^2}{2c\lambda(\lambda+c)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}}. \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand  $\lambda = c$ .

$$\forall \lambda \in ]0, +\infty[, \|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}}.$$

4 - Soit  $X > 0$ .

$$\int_0^X |\varphi(f)(x)| dx = \int_0^X \left| e^{-cx} \int_0^x f(t) e^{ct} dt \right| dx \leq \int_0^X \left( \int_0^x |f(t)| e^{ct} e^{-cx} dt \right) dx.$$

Cette dernière intégrale est l'intégrale de la fonction continue  $(x, t) \mapsto |f(t)| e^{ct} e^{-cx}$  sur le domaine  $\mathcal{D} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq t \leq x \leq X\}$ . D'après le théorème de FUBINI, on a alors

$$\begin{aligned} \int_0^X |\varphi(f)(x)| dx &\leq \int_0^X e^{ct} |f(t)| \left( \int_t^X e^{-cx} dx \right) dt \\ &= \frac{1}{c} \int_0^X e^{ct} |f(t)| (e^{-ct} - e^{-cX}) dt = \frac{1}{c} \int_0^X |f(t)| (1 - e^{-c(X-t)}) dt \\ &\leq \frac{1}{c} \int_0^X |f(t)| dt \leq \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{c} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $x \mapsto |\varphi(f)(x)|$  est continue et positive sur  $[0, +\infty[$  et la fonction  $X \mapsto \int_0^X |\varphi(f)(x)| dx$  est majorée sur  $[0, +\infty[$  par  $\frac{1}{c} \|f\|_1$ . On en déduit que la fonction  $\varphi(f)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et de plus que  $\|\varphi(f)\|_1 \leq \frac{1}{c} \|f\|_1$ .

$$\forall f \in L^1(I), \varphi(f) \in L^1(I) \text{ et } \|\varphi(f)\|_1 \leq \frac{1}{c} \|f\|_1.$$

On en déduit encore que la restriction de  $\varphi$  à  $L^1(I)$  est un endomorphisme de  $L^1(I)$ , encore noté  $\varphi$ . De plus,  $\varphi$  est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé  $(L^1(I), \|\cdot\|_1)$  et  $\|\varphi\|_1 \leq \frac{1}{c}$  (\*).

Maintenant, pour  $f = f_1$ , on a d'après la question 2.  $\|f_1\|_1 = \frac{1}{1} = 1$  et  $\|\varphi(f)\|_1 = \frac{1}{c \times 1} = \frac{1}{c}$  de sorte que l'inégalité (\*) est une égalité pour la fonction non nulle  $f_1$ . On a montré que

$$\varphi \text{ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé } (L^1(I), \|\cdot\|_1) \text{ et } \|\varphi\|_1 = \frac{1}{c}.$$

5 - Soit  $X > 0$ . Puisque  $f = g' + cg$  et que  $g(0) = \varphi(f)(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^X f(t)g(t) dt &= \int_0^X (g'(t) + cg(t))g(t) dt = \int_0^X g'(t)g(t) dt + c \int_0^X g^2(t) dt = \frac{g^2(X) - g^2(0)}{2} + c \int_0^X g^2(t) dt \\ &= \frac{g^2(X)}{2} + c \int_0^X g^2(t) dt. \end{aligned}$$

Mais alors, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$c \int_0^X g^2(t) dt = -\frac{g^2(X)}{2} + \int_0^X f(t)g(t) dt \leq \int_0^X f(t)g(t) dt \leq \sqrt{\int_0^X g^2(t) dt} \sqrt{\int_0^X f^2(t) dt} \leq \|f\|_2 \sqrt{\int_0^X g^2(t) dt},$$

et, que  $\sqrt{\int_0^X g^2(t) dt}$  soit nul ou pas, on en déduit

$$\forall X > 0, c \sqrt{\int_0^X g^2(t) dt} \leq \|f\|_2.$$

De nouveau, la fonction la fonction  $x \mapsto \varphi(f)^2(x)$  est continue et positive sur  $[0, +\infty[$  et la fonction  $X \mapsto \int_0^X \varphi(f)^2(x) dx$  est majorée sur  $[0, +\infty[$  par  $\frac{1}{c^2} \|f\|_2^2$ . On en déduit que la fonction  $\varphi(f)^2$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  ou encore que  $\varphi(f) \in L^2(I)$  et de plus que  $\|\varphi(f)\|_2 \leq \frac{1}{c} \|f\|_2$ .

$$\forall f \in L^2(I), \varphi(f) \in L^2(I) \text{ et } \|\varphi(f)\|_2 \leq \frac{1}{c} \|f\|_2.$$

On en déduit encore que la restriction de  $\varphi$  à  $L^2(I)$  est un endomorphisme de  $L^2(I)$ , encore noté  $\varphi$ . De plus,  $\varphi$  est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé  $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$  et  $\|\varphi\|_2 \leq \frac{1}{c}$ .

Enfin, pour tout réel  $\lambda > 0$ ,

$$\frac{\|\varphi(f_\lambda)\|_2}{\|f_\lambda\|_2} = \frac{1/\sqrt{2\lambda}}{1/\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}} = \frac{1}{\sqrt{c(c+\lambda)}}.$$

Comme  $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \frac{\|\varphi(f_\lambda)\|_2}{\|f_\lambda\|_2} = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \frac{1}{\sqrt{c(c+\lambda)}} = \frac{1}{c}$ , on a finalement

$\varphi$  est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé  $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$  et  $\|\varphi\|_2 = \frac{1}{c}$ .

## Partie IV

1 - Soit  $f \in G$ .

La fonction  $f$  est développable en série entière sur  $] -R, R[$ . Puisque la fonction  $t \mapsto e^{ct}$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et donc sur  $] -R, R[$ , on en déduit que la fonction  $t \mapsto e^{ct}f(t)$  est développable sur  $] -R, R[$  (au moins) puis que la fonction  $x \mapsto \int_0^x e^{ct}f(t) dt$  est développable sur  $] -R, R[$  et finalement que la fonction  $x \mapsto e^{-cx} \int_0^x e^{ct}f(t) dt$  est développable en série entière sur  $] -R, R[$  (au moins). Ainsi, si  $f \in G$ ,  $\varphi(f) \in G$ .

$\varphi \in \mathcal{L}(G)$ .

2 - Puisque  $\varphi(f)$  est développable en série entière sur  $] -R, R[$ , on sait que  $\varphi(f)$  est dérivable sur  $] -R, R[$  et sur la dérivée de  $\varphi(f)$  s'obtient par dérivation terme à terme. Pour  $x \in ] -R, R[$ , on a alors

$$(\varphi(f))'(x) + c\varphi(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)b_{n+1}x^n + c \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)b_{n+1} + cb_n)x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a alors

$$\begin{aligned} \forall x \in ] -R, R[, (\varphi(f))'(x) + c\varphi(f)(x) = f(x) &\Rightarrow \forall x \in ] -R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)b_{n+1} + cb_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)b_{n+1} + cb_n = a_n \\ &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!b_{n+1}}{c^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!b_n}{c^n} = \frac{(-1)^{n+1} n! a_n}{c^{n+1}}. \end{aligned}$$

Soit alors  $n \in \mathbb{N}^*$ . En tenant compte de  $b_0 = \varphi(f)(0) = 0$ , on a

$$\frac{(-1)^n n! b_n}{c^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{(-1)^{k+1} (k+1)! b_{k+1}}{c^{k+1}} - \frac{(-1)^k k! b_k}{c^k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} k! a_k}{c^{k+1}},$$

et donc

$$b_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} k! (-c)^{n-1-k} a_k.$$

$$b_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} k! (-c)^{n-1-k} a_k.$$

## Partie V

1 - a) Soit  $(f, g) \in (H(I))^2$ . Les fonctions  $fg$  et  $f'g'$  sont continues sur  $I$ . De plus, à partir des inégalités  $(f \pm g)^2 \geq 0$  et  $(f' \pm g')^2 \geq 0$ , on obtient  $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$  et  $|f'g'| \leq \frac{1}{2}(f'^2 + g'^2)$ . Puisque  $f^2, g^2, f'^2$  et  $g'^2$  sont intégrables sur  $I$ , les fonctions  $fg$  et  $f'g'$  le sont également.

$$\forall (f, g) \in (H(I))^2, fg \in H(I) \text{ et } f'g' \in H(I).$$

b) • D'après la question a),  $\phi$  est une application de  $(H(I))^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

- La symétrie, la bilinéarité et la positivité de  $\phi$  sont claires.
- Soit  $f \in H(I)$ .

$$\begin{aligned} \phi(f, f) = 0 &\Rightarrow \int_I f^2 + \int_I f'^2 = 0 \Rightarrow \int_I f^2 = 0 \\ &\Rightarrow f^2 = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow f = 0. \end{aligned}$$

En résumé,  $\phi$  est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive et donc

$\phi$  est un produit scalaire sur  $H(I)$ .

c) Pour  $f \in H(I)$ ,  $\phi(f, f) = \|f\|_H^2$ . Ceci montre que  $\|\cdot\|_H$  est la norme associée au produit scalaire  $\phi$  et en particulier que

$\|\cdot\|_H$  est une norme sur  $H(I)$ .

2 - a) Soit  $f \in L^2(I)$ . Puisque par hypothèse,  $\varphi$  est endomorphisme de  $L^2(I)$ ,  $\varphi(f)$  est encore dans  $L^2(I)$ . Mais alors, puisque  $L^2(I)$  est un espace vectoriel,  $(\varphi(f))' = f - c\varphi(f) \in L^2(I)$ . On en déduit que  $\varphi(f)$  est dans  $H(I)$  et puisque  $\varphi(f)(0) = 0$ ,  $\varphi(f) \in K$ .

$\forall f \in L^2(I)(I), \varphi(f) \in K$ .

Soit  $f \in L^2(I)$ . Puisque  $\varphi$  est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé  $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$ , il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que  $\|\varphi(f)\|_2 \leq \alpha\|f\|_2$ . Mais alors

$$\|(\varphi(f))'\|_2 = \|-c\varphi(f) + f\|_2 \leq c\|\varphi(f)\|_2 + \|f\|_2 \leq (1 + c\alpha)\|f\|_2.$$

On en déduit que

$$\|\varphi(f)\|_H = \sqrt{\|\varphi(f)\|_2^2 + \|(\varphi(f))'\|_2^2} \leq \sqrt{\alpha^2\|f\|_2^2 + (1 + c\alpha)^2\|f\|_2^2} = \sqrt{\alpha^2 + (1 + c\alpha)^2}\|f\|_2.$$

On a montré que

$\exists A > 0 / \forall f \in L^2(I), \|\varphi(f)\|_H \leq A\|f\|_2$ .

b) La restriction de  $\varphi$  à  $L^2(I)$  est encore notée  $\varphi$ .

- D'après la question a),  $\varphi$  est une application linéaire de  $L^2(I)$  dans  $K$ .
- Soit  $f \in L^2(I)$ .

$$f \in \text{Ker}(\varphi) \Rightarrow \varphi(f) = 0 \Rightarrow f = (\varphi(f))' + c\varphi(f) = 0.$$

Donc,  $\varphi$  est injectif.

• Soit  $g \in K$ . Posons  $f = g' + cg$ . Par hypothèse  $g$  est dans  $K$  et donc  $g$  et  $g'$  sont dans  $L^2(I)$ . Il en est de même de  $f$ . De plus, puisque  $g(0) = 0$  et que  $g' + cg = f$ , on a  $g = \varphi(f)$ . On a montré que  $\forall g \in K, \exists f \in L^2(I) / \varphi(f) = g$  et donc  $\varphi$  est surjective.

$\varphi$  est un isomorphisme de  $L^2(I)$  sur  $H(I)$ .

c) D'après la question a),  $\exists A > 0 / \forall f \in L^2(I), \|\varphi(f)\|_H \leq A\|f\|_2$  et puisque  $\varphi$  est linéaire

$\varphi$  est continue de  $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$  dans  $(K, \|\cdot\|_H)$ .

d) D'après la question b),  $\forall g \in K, \varphi^{-1}(g) = g' + cg$ . Mais alors, pour  $g \in K$ ,

$$\|\varphi^{-1}(g)\|_2 = \|g' + cg\|_2 \leq \|g'\|_2 + c\|g\|_2 \leq \|g\|_H + c\|g\|_H = (1 + c)\|g\|_H.$$

Puisque  $\varphi^{-1}$  est linéaire, ceci montre que

$\varphi^{-1}$  est continue de  $(K, \|\cdot\|_H)$  dans  $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$ .

## Partie VI

1 - Puisque  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , on sait que les solutions de l'équation  $y' + cy = f$  (E) constituent un  $\mathbb{R}$ -espace affine de dimension 1. La méthode de LAGRANGE fournit les solutions de cette équation. Ce sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{-cx} + e^{-cx} \int_0^x f(t)e^{ct} dt, C \in \mathbb{R}.$$

Soit  $y$  une telle solution. La fonction  $z : x \mapsto y(x + 2\pi)$  est également solution de l'équation (E) (car pour  $x$  réel,  $\frac{d}{dx}(y(x + 2\pi)) + cy(x + 2\pi) = y'(x + 2\pi) + cy(x + 2\pi) = f(x + 2\pi) = f(x)$ ). Par suite, d'après le théorème de CAUCHY,

$$y \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = z(x) \Leftrightarrow y(0) = z(0) \Leftrightarrow y(2\pi) = y(0) \\ \Leftrightarrow Ce^{-2c\pi} + e^{-2c\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{ct} dt = C \Leftrightarrow C = \frac{e^{-2c\pi}}{1 - e^{-2c\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)e^{ct} dt.$$

L'équation  $y' + cy = f$  admet une solution continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et une seule à savoir la fonction  $\psi(f)$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(f)(x) = \left( \frac{e^{-2c\pi}}{1 - e^{-2c\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)e^{ct} dt \right) e^{-cx} + e^{-cx} \int_0^x f(t)e^{ct} dt.$$

$\psi$  est bien une application de  $E$  dans  $F$ . De la même façon qu'en I.2., on démontre alors que  $\psi$  est linéaire et de la même façon qu'en V.2.b), que  $\psi$  est bijective.

$\psi$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ .

**2** - Soit  $f \in E$ . D'après la question I.2.,  $\varphi(f)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et il en est de même de  $\psi(f)$ . On sait alors que pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$c_k((\psi(f))') = ikc_k(\psi(f)).$$

Par linéarité des coefficients de FOURIER, on a alors pour  $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k(f) = c_k((\psi(f))' + c\psi(f)) = c_k((\psi(f))') + cc_k(\psi(f)) = (c + ik)c_k(\psi(f)) = (c + ik)d_k(f),$$

et donc

$$\forall k \in \mathbb{Z}, d_k(f) = \frac{c_k(f)}{c + ik}.$$

En particulier,  $|d_k(f)| = \frac{|c_k(f)|}{\sqrt{c^2 + k^2}}$ .

**3** - Soit  $f \in E$ . La fonction  $f$  est continue par morceaux et  $2\pi$ -périodique. D'après le théorème de PARSEVAL,  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 < +\infty$  et de plus

$$2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \|f\|_E^2.$$

Soit  $g \in F$ . Pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $c_k(g') = ikc_k(g)$  et donc

$$\int_0^{2\pi} g'^2(t) dt + \int_0^{2\pi} g^2(t) dt = 2\pi \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(g)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |c_k(g)|^2 \right) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2) |c_k(g)|^2.$$

Par suite,

$$\forall g \in F, \|g\|_F = \sqrt{2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2) |c_k(g)|^2}.$$

Mais alors, pour  $f \in E$ , d'après la question 2., on a

$$\|\psi(f)\|_F = \sqrt{2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2) |c_k(\psi(f))|^2} = \sqrt{2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1 + k^2}{c^2 + k^2} |c_k(f)|^2}.$$

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons alors  $u(x) = \frac{1 + x^2}{c^2 + x^2}$ .  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$u'(x) = \frac{2x(c^2 + x^2) - 2x(1 + x^2)}{(c^2 + x^2)^2} = \frac{2x(c^2 - 1)}{(c^2 + x^2)^2}.$$

- Si  $0 \leq c \leq 1$ ,  $u$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  et donc pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\frac{1+k^2}{c^2+k^2} = u(|k|) \leq u(0) = \frac{1}{c^2}$ .
- Si  $c > 1$ ,  $u$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et donc pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\frac{1+k^2}{c^2+k^2} = u(|k|) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 1$ .

Dans tous les cas, on a  $\text{Min} \left\{ 1, \frac{1}{c^2} \right\} \leq \frac{1+k^2}{c^2+k^2} \leq \text{Max} \left\{ 1, \frac{1}{c^2} \right\}$  et donc

$$\|\psi(f)\|_F = \sqrt{2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1+k^2}{c^2+k^2} |c_k(f)|^2} \leq \sqrt{\text{Max} \left\{ 1, \frac{1}{c^2} \right\}} \sqrt{2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2} = \text{Max} \left\{ 1, \frac{1}{c} \right\} \|f\|_E.$$

et de même  $\|\psi(f)\|_F \geq \text{Min} \left\{ 1, \frac{1}{c} \right\} \|f\|_E$ .

$$\forall f \in E, \text{Min} \left\{ 1, \frac{1}{c} \right\} \|f\|_E \leq \|\psi(f)\|_F \leq \text{Max} \left\{ 1, \frac{1}{c} \right\} \|f\|_E.$$

4 - L'inégalité de droite montre alors que  $\psi$  est continue sur  $E$  et l'inégalité de gauche réécrite sous la forme

$$\forall g \in F, \|\psi^{-1}(g)\|_E \leq \frac{1}{\text{Min} \left\{ 1, \frac{1}{c} \right\}} \|g\|_F,$$

montre que  $\psi^{-1}$  est continue sur  $F$ .

$\psi$  est continue sur  $E$  et  $\psi^{-1}$  est continue sur  $F$ .