SESSION 2006

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la suite u est strictement positive et décroissante de limite nulle, on sait que le signe de la somme $\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est le signe de son premier terme ou encore le signe de R_n est $(-1)^n$. On en déduit que

$$|R_n| + |R_{n+1}| = (-1)^n R_n + (-1)^{n+1} R_{n+1} = (-1)^n (R_n - R_{n+1}) = (-1)^n \times (-1)^n u_n = u_n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| + |R_{n+1}| = u_n.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
|R_n| - |R_{n+1}| &= (-1)^n R_n - (-1)^{n+1} R_{n+1} = (-1)^n (R_n + R_{n+1}) \\
&= (-1)^n \left(\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right) \\
&= (-1)^n \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{n+p} u_{n+p} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{n+p+1} u_{n+p+1} \right) \\
&= (-1)^n \times (-1)^n \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_{n+p} - \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_{n+p+1} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left[u_{n+p} - u_{n+p+1} \right].
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left[u_{n+p} - u_{n+p+1} \right].}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_n - u_{n+1}$. D'après les conditions iii) et iv), on a pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \geq 0$ et $v_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+2} \leq u_n - u_{n+1} = v_n$. Ainsi, la suite v est une suite positive décroissante, de limite nulle.

Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left[u_{p+n} - u_{p+n+1} \right] = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p v_{n+p}$ est du signe de son premier terme $(-1)^0 v_n$ ou encore $|R_n| - |R_{n+1}| \geq 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{la suite } (|R_n|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la suite $(|R_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, d'après la question 1., on a

$$u_n = |R_n| + |R_{n+1}| \leq |R_n| + |R_n| = 2|R_n|,$$

et aussi

$$u_{n-1} = |R_n| + |R_{n-1}| \geq |R_n| + |R_n| = 2|R_n|.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_n}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_{n-1}}{2}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\dfrac{R_n}{(-1)^n u_n/2} = \dfrac{2(-1)^n R_n}{u_n} = \dfrac{2|R_n|}{u_n}$. Mais alors d'après la question précédente

$$1 \leq \frac{R_n}{(-1)^n u_n/2} = \frac{2|R_n|}{u_n} \leq \frac{u_{n-1}}{u_n}.$$

Puisque par hypothèse, $\dfrac{u_{n-1}}{u_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\dfrac{R_n}{(-1)^n u_n/2}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc que

$$\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n u_n}{2}.}$$

5. *Application* : La suite $u = \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ est définie et strictement positive à partir du rang 2, de limite nulle en $+\infty$. De plus, $u_{n+1} = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n} = u_n$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Pour $x > 0$, posons $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ puis } f''(x) = (-\frac{1}{x})\frac{1}{x^2} + (1 - \ln x)(-\frac{2}{x^3}) = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}.$$

f' est négative sur $[e, +\infty[$ et en particulier sur $[3, +\infty[$ et f'' est positive sur $[e^{3/2}, \infty[$ et en particulier sur $[5, +\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $[3, +\infty[$ et convexe sur $[5, +\infty[$.
Pour $n \geq 3$, on a alors $u_n = f(n) \geq f(n+1) = u_{n+1}$. La suite (u_n) décroît à partir du rang 3. D'autre part, par convexité de f sur $[5, +\infty[$, pour $n \geq 5$ on a $\frac{1}{2}(f(n) + f(n+2)) \geq f(\frac{n+n+2}{2}) = f(n+1)$ ce qui s'écrit encore $u_{n+2} + u_n \geq 2u_{n+1}$ ou enfin $u_{n+2} - u_{n+1} \geq u_{n+1} - u_n$.

L'encadrement établi à la question 3. est donc vrai à partir du rang 6 et l'équivalent fourni à la question 4. reste valable. Ainsi,

$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n \frac{\ln n}{2n}.}$$

Exercice 2.

1. Puisque $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, on a $R_b = R_a = +\infty$ et donc

$$\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. Puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et que la suite b ne s'annule pas, la suite $(\gamma_n) = (\dfrac{a_n}{b_n} - 1)$ est définie et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. **3.1.** Soit $m \in \mathbb{N}$. La suite γ est convergente et en particulier bornée. On en déduit l'existence de $\delta_m = \sup\limits_{n\geq m} |\gamma_n|$.

3.2. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, +\infty[$. On a $g(t) \geq b_0 > 0$ et

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| &= \frac{1}{g(t)}|f(t) - g(t)| = \frac{1}{g(t)}\left|\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - b_n)t^n\right| = \frac{1}{g(t)}\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_n b_n t^n\right| \\
&\leq \frac{1}{g(t)}\sum_{n=m+1}^{+\infty}|\gamma_n| b_n t^n + \frac{1}{g(t)}\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n| b_n t^n \leq \frac{\sup\limits_{n\geq m}|\gamma_n|}{g(t)}\sum_{n=m+1}^{+\infty} b_n t^n + \frac{1}{b_{m+1}t^{m+1}}\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n| b_n t^n \\
&\leq \frac{\delta_m}{g(t)}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n + \frac{1}{b_{m+1}t^{m+1}}\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n| b_n t^n = \delta_m + \frac{1}{b_{m+1}t^{m+1}}\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n| b_n t^n.
\end{aligned}$$

3.3. Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (γ_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on peut choisir $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq m$, $|\gamma_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. m est ainsi dorénavant fixé. Par définition de m on a $\delta_m \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et donc

$$\forall t > 0,\ \left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{b_{m+1}t^{m+1}}\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|b_n t^n.$$

Maintenant la fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|b_n t^n$ est un polynôme de degré au plus m et donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{b_{m+1}t^{m+1}}\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|b_n t^n = 0$.

Par suite, il existe un réel strictement positif A tel que, pour $t > A$, $\dfrac{1}{b_{m+1}t^{m+1}}\displaystyle\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|b_n t^n < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $t > A$, on a alors $\left|\dfrac{f(t)}{g(t)} - 1\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0/\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left(t > A \Rightarrow \left|\dfrac{f(t)}{g(t)} - 1\right| < \varepsilon\right)$ et donc que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)} = 1$ ou encore que

$$\boxed{f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t).}$$

4. 4.1 Quand n tend vers $+\infty$, $(n+1)\ln(1+\dfrac{1}{n+1}) \sim \dfrac{n+1}{n+1} = 1$ et donc $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1})}$ tend vers e. Ainsi, les suites a et b définies par $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n!}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{e}{n!}$ sont deux suites strictement positives, équivalentes en $+\infty$. Comme $R_a = +\infty$, on a $R_b = +\infty$ ou encore

$$\boxed{h \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

4.2. De plus, la question 3. permet d'affirmer que quand t tend vers $+\infty$

$$h(t) \sim \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e}{n!}t^n = e \times e^t = e^{t+1}.$$

$$\boxed{h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{t+1}.}$$

5. 5.1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $R_a > 0$. Pour $t \in]-R_a, R_a[$, posons $z(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^n$. Tout d'abord, $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. D'autre part, pour $t \in]-R_a, R_a[$,

$$\begin{aligned}
tz''(t) + (1-t)z'(t) &= t\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n t^{n-2} + (1-t)\sum_{n=1}^{+\infty}na_n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}na_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}na_n t^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}n^2 a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}na_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2 a_{n+1}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty}na_n t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)^2 a_{n+1} - na_n)t^n
\end{aligned}$$

Par suite, par unicité des coefficients d'une série entière, z est solution sur $]-R_a, R_a[$ du problème posé si et seulement si $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^2 a_{n+1} - na_n = 0$.

En résumé, sous l'hypothèse $R_a > 0$, z est solution sur $]-R_a, R_a[$ du problème posé si et seulement si $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \dfrac{n}{(n+1)^2}a_n$. Maintenant, pour une telle suite, il est clair par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0$ et de plus $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{(n+1)^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La règle de d'ALEMBERT permet d'affirmer que $R_a = +\infty$ ce qui valide les calculs précédents.

$$\boxed{\begin{array}{c}(E) \text{ admet une et une seule solution } z \text{ développable en série entière telle que } z(0) = 0 \text{ et } z'(0) = 1 : \\ \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = t + \displaystyle\sum_{n\geq 2}a_n t^n \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \dfrac{n}{(n+1)^2}a_n.\end{array}}$$

Déterminons alors la suite a_n. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on a

$$a_n = \frac{n-1}{n!^2} \times \frac{n-2}{(n-1)!} \times \ldots \times \frac{1}{2^2} \times a_1 = \frac{(n-1)!}{(n!)^2} = \frac{1}{n \times n!}$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n \times n!}.}$$

5.2. Pour tout réel $t > 0$,

$$z'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = \frac{e^t - 1}{t}.$$

$$\boxed{\forall t > 0,\ z'(t) = \frac{e^t - 1}{t}.}$$

5.3 Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n.n!} \sim \dfrac{1}{(n+1)!}$ et la question 3. permet d'affirmer que quand t tend vers $+\infty$,

$$z(t) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} = \frac{e^t - 1 - t}{t} \sim \frac{e^t}{t}.$$

$$\boxed{z(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{e^t}{t}.}$$

Exercice 3.

Question 1.

1.

$$\begin{aligned}
\chi_F &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -X & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -X \end{vmatrix} \\
&= -X \times (-X)^{n-1} + (-1)^{n+1} \times 1 \text{ (en développant suivant la première colonne)} \\
&= (-1)^n (X^n - 1).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_F = (-1)^n (X^n - 1).}$$

Les valeurs propres de F sont les n racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ à savoir les $\lambda_k = e^{2ik\pi/n}$, $1 \leq k \leq n$.

2. F a n valeurs propres simples et est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$. 0 n'est pas valeur propre de F et donc F est inversible.

3. • Puisque F est inversible, F^p existe pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
• G est déjà un groupe monogène. Il reste à vérifier que G est fini, d'ordre n.
• Le polynôme minimal μ_F de F est un diviseur unitaire de $\chi_f = (-1)^n (X^n - 1)$ admettant chaque λ_k pour racine. On en déduit que

$$\mu_F = X^n - 1.$$

En particulier, $F^n = I_n$ et $\forall p \in [\![1, n-1]\!]$, $F^p \neq I_n \quad (*)$.

• On sait alors que le groupe $(G, \times)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et donc

$$\boxed{G \text{ est un groupe cyclique d'ordre } n.}$$

Les entiers p tels que F^p engendre le groupe $(G, \times)$ sont aussi les entiers p tels que $\widehat{p}$ engendre le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ c'est-à-dire les entiers relatifs p premiers à n.

4. D'après ce qui précède, $\text{Vect}(G) = \text{Vect}(F^p)_{0 \leq p \leq n-1}$ ce qui montre déjà que $\dim(\text{Vect}(G)) \leq n$. Montrons que la famille $(F^p)_{0 \leq p \leq n-1}$ est libre.

Mais s'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \lambda_p F^p = 0$, le polynôme $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \lambda_p X^p$ est un polynôme non nul de degré au plus $n-1$ annulateur de F ce qui contredit le fait que $\mu_F = X^n - 1$. Donc la famille $(F^p)_{0 \leq p \leq n-1}$ est libre et finalement

$$\boxed{\text{la famille } (F^p)_{0 \leq p \leq n-1} \text{ est une base de } G \text{ et } \dim(\text{Vect}(G)) = n.}$$

5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à F. Avec la convention $e_{n+1} = e_1$, $e_{n+2} = e_2$, $\ldots$, $e_{2n} = e_n$, on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = e_{i+1},$$

et donc plus généralement

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!],\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ f^p(e_i) = e_{i+p}.$$

En particulier, si $p \in [\![1, n-1]\!]$, les coefficients diagonaux de F^p sont tous nuls et donc $\text{Tr}(F^p) = 0$. D'autre part, $\text{Tr}(F^0) = \text{Tr}(I_n) = n$ et donc

$$\boxed{\forall p \in [\![0, n-1]\!],\ \text{Tr}(F^p) = \left\{\begin{array}{l} n \text{ si } p = 0 \\ 0 \text{ si } 1 \leq p \leq n-1 \end{array}\right.}$$

Question 2.

1. Puisque $\text{Sp}(F) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on sait que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(p(F)) = (p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n))$. Or

$$p(\lambda_n) = p(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} p\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1} &= \left(\sum_{k=0}^{n} X^k\right)' \\ &= \left(\frac{X^{n+1}-1}{X-1}\right)' = \frac{(n+1)X^n(X-1) - (X^{n+1}-1)}{(X-1)^2} \\ &= \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}. \end{aligned}$$

Soit alors $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a $\lambda_k \neq 1$ et $\lambda_k^n = 1$. Donc

$$\begin{aligned} p(\lambda_k) &= \frac{n\lambda_k^{n+1} - (n+1)\lambda_k^n + 1}{(\lambda_k - 1)^2} \frac{n\lambda_k^{n+1} - (n+1)\lambda_k^n + 1}{(\lambda_k - 1)^2} = \frac{n\lambda_k - (n+1) + 1}{(\lambda_k - 1)^2} \frac{n(\lambda_k - 1)}{(\lambda_k - 1)^2} \\ &= \frac{n}{\lambda_k - 1}. \end{aligned}$$

Fianlement,

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n}{\lambda_1 - 1}, \ldots, \frac{n}{\lambda_{n-1} - 1}\right).}$$

2. Le déterminant d'une matrice est le produit de ses valeurs propres (chaque valeur propre étant comptées un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité). Donc

$$\det(A) = \frac{n(n+1)}{2} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n}{\lambda_k - 1} = \frac{n^n(n+1)}{2} \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_k - 1)}.$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_k - X) = (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(X - \lambda_k) = (-1)^{n-1}\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-\lambda_k)}{X-1}$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{X^n - 1}{X-1} = (-1)^{n-1}(X^{n-1} + X^{n_2} + \ldots + X + 1),$$

et donc

$$\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_k - 1) = (-1)^{n-1}(1^{n-1} + 1^{n_2} + \ldots + 1 + 1) = (-1)^{n-1}n.$$

Finalement,

$$\det(A) = \frac{n^n(n+1)}{2} \times \frac{1}{(-1)^{n-1}n} = (-1)^{n-1}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}.$$

$$\boxed{\det(A) = (-1)^{n-1}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}.}$$

Question 3.

1. Déjà, 0 n'est pas valeur propre de A et donc A est inversible.

Posons $\chi_A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ avec $a_n = (-1)^n$ et $a_0 = \det(A) \neq 0$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ ou encore $\sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$. Mais alors

$$A\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_0}A^{k-1}\right) = \left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_0}A^{k-1}\right)A = I_n.$$

Par suite $A^{-1} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_0}A^{k-1}$ et on a montré que A^{-1} est un polynôme en A de degré au plus $n-1$.

$$\boxed{A^{-1} \in \mathrm{Vect}(A^k)_{0\leq k\leq n-1}.}$$

2. A est un polynôme en F et il en est de même de toute puissance de A. Par suite, toute puissance de A est dans $\mathrm{Vect}(G)$ et donc $A^{-1} \in \mathrm{Vect}(G)$. Mais d'après la question 1.4, $\mathrm{Vect}(G) = \mathrm{Vect}(F^k)_{0\leq k\leq n-1}$ et donc

$$\boxed{A^{-1} \in \mathrm{Vect}(F^k)_{0\leq k\leq n-1}.}$$

3. On a vu que $(X-1)^2 p = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$. En évaluant en F, on obtient (puisque $F^n = I_n$)

$$(F - I_n)^2 A = (F - I_n)^2 p(F) = nF^{n+1} - (n+1)F^n + 1 = nF - (n+1)I_n + I_n = n(F - I_n).$$

$$\boxed{(F - I_n)^2 A = n(F - I_n).}$$

4. On en déduit que $(F-I_n)A^{-1}=\dfrac{1}{n}(F-I_n)^2$. Or

$$\begin{aligned}(F-I_n)A^{-1}&=(F-I_n)\left(\sum_{k=0}^{n-1}u_kF^k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}u_kF^{k+1}-\sum_{k=0}^{n-1}u_kF^k\\&=u_{n-1}F^n+\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k-1}-u_k)F^k-u_0I_n=(u_{n-1}-u_0)I_n+\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k-1}-u_k)F^k,\end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{n}(F-I_n)^2=\frac{1}{n}I_n-\frac{2}{n}F+\frac{1}{n}F^2.$$

Comme la famille $(F^k)_{0\leq k\leq n-1}$ est libre, on peut identifier les coefficients et on obtient

$$u_{n-1}-u_0=\frac{1}{n},\ u_0-u_1=-\frac{2}{n},\ u_1-u_2=\frac{1}{n}\ \text{et}\ \forall k\in[\![3,n-1]\!],\ u_{k-1}-u_k=0,$$

et en particulier

$$\boxed{\begin{gathered}u_2=u_3=\ldots=u_{n-1}\\u_2-u_0=\frac{1}{n}\\u_1-u_2=\frac{1}{n}.\end{gathered}}$$

5. D'après la question 1.5, pour $1\leq k\leq n-1$, on a $\mathrm{Tr}(F^k)=0$ et donc par linéarité de la trace

$$\mathrm{Tr}(A^{-1})=\sum_{k=0}^{n-1}u_k\mathrm{Tr}(F^k)=u_0\mathrm{Tr}(I_n)=nu_0.$$

D'autre part, les valeurs propres de A^{-1} étant les inverses des valeurs propres de A, d'après la question 2.1 on a aussi

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(A^{-1})&=\frac{2}{n(n+1)}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k-1}{n}=\frac{2}{n(n+1)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k-\frac{n-1}{n}\\&=\frac{2}{n(n+1)}-\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n}\ (\text{car } 1+\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}=0)\\&=\frac{2}{n(n+1)}-1=-\frac{n^2+n-2}{n(n+1)}=-\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$u_0=\frac{\mathrm{Tr}(A^{-1})}{n}=-\frac{n^2+n-2}{n^2(n+1)}.$$

$$\boxed{u_0=-\frac{n^2+n-2}{n^2(n+1)}.}$$

6. Par suite,

$$u_2=u_0+\frac{1}{n}=-\frac{n^2+n-2}{n^2(n+1)}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n^2(n+1)},$$

et donc

$$u_2=u_3=\ldots=u_{n-1}=\frac{2}{n^2(n+1)}.$$

Ensuite,

$$u_1 = u_2 + \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n} = \frac{n^2+n+2}{n^2(n+1)}.$$

Fianlement,

$$A^{-1} = \frac{1}{n^2(n+1)}\left((-n^2-n+2)I_n + (n^2+n+2)F + \sum_{k=2}^{n-1} F^k\right),$$

ou encore

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{n^2(n+1)}\begin{pmatrix} a & b & 2 & \dots & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 2 \\ 2 & & \ddots & \ddots & b \\ b & 2 & \dots & 2 & a \end{pmatrix} \text{ où } a = -n^2+n+2 \text{ et } b = n^2+n+2.}$$

