Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

Partie I.

1) Puisque la matrice F n'est pas nulle, H est l'hyperplan de vecteur normal F.

2) Soit $X = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

$$F|X = \sum_{1\leq i,j\leq n} f_{i,j}x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_{i,i} + \sum_{i=2}^{n} x_{i,1} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i,n}.$$

3) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $p_H(M)$ le projeté orthogonal de M sur l'hyperplan H. D'après le théorème de PYTHAGORE, pour $U \in H$ on a

$$\|M - U\|^2 = \|M - p_H(M)\|^2 + \|p_H(M) - U\|^2.$$

Mais alors $\|M-U\|^2 \geq \|M-p_H(M)\|^2$ avec égalité si et seulement si $U = p_H(M)$. Ceci montre déjà que $\inf\limits_{U\in H}\|M-U\| = \min\limits_{U\in H}\|M-U\| = \|M-p_H(M)\|$. Ensuite, on sait que

$$\|M - p_H(M)\| = p_{\mathrm{Vect}(F)}(M) = \frac{(F|M)}{\|F\|^2}F,$$

et donc

$$d(M,H) = \left\|\frac{F|M}{\|F\|^2}F\right\| = \frac{|(F|M)|}{\|F\|}.$$

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d(M,H) = \frac{|(F|M)|}{\|F\|}.}$$

4) $\|F\| = \sqrt{\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} f_{i,j}^2} = \sqrt{n + 2(n-1)} = \sqrt{3n-2}.$

$$\boxed{\|F\| = \sqrt{3n-2}.}$$

5) **a)** On a déjà

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes C_2, C_3,..., C_{n-1} de B sont nulles et donc $\mathrm{rg}(B) \leq 2$. Les colonnes C_1 et C_n sont linéairement indépendantes et donc $\mathrm{rg}(B) \geq 2$. Finalement

$$\boxed{\mathrm{rg}(B) = 2.}$$

b)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De nouveau les colonnes C'_2, C'_3,..., C'_{n-1} de B^2 sont nulles et les colonnes C'_1 et C'_n sont linéairement indépendantes et donc $\mathrm{rg}(B^2) = 2$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(B^2) = \mathrm{rg}(B) = 2.}$$

c) Notons $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puisque les colonnes C_2, ..., C_{n-1} de B sont nulles, on a $\mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Mais d'autre part, $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = n - \mathrm{rg}(B) = n - 2$ et donc

$$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}).$$

D'autre part, (en identifiant un élément de $\mathbb{R}^n$ et un vecteur colonne) $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \mathrm{Vect}(C_1, C_n) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3 + \dots + e_n, e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1})$. Donc

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \text{ où } u_1 = e_2 + e_3 + \dots + e_n \text{ et } u_2 = e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1}.$$

Montrons alors que $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \lambda u_1 + \mu u_2 \in \mathrm{Ker}(g) &\Leftrightarrow \lambda(e_2 + e_3 + \dots + e_n) + \mu(e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1}) \in \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}) \\ &\Leftrightarrow \mu e_1 + (\lambda + \mu)e_2 + \dots + (\lambda + \mu)e_{n-1} + \lambda e_n \in \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \mu = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$ (1). Mais d'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathbb{R}^n)$ (2). De (1) et (2) on déduit

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}g \oplus \mathrm{Im}g.}$$

d) La famille $\mathcal{B}' = (e_2, \dots, e_{n-1}, u_1, u_2)$, obtenue en réunissant une base de $\mathrm{Ker}(g)$ et une base de $\mathrm{Im}(g)$, est donc une base de $\mathbb{R}^n$. Puisque $\mathrm{Im}(g)$ est stable par g, les images de u_1 et u_2 par g sont des combinaisons linéaires de u_1 et u_2. Par suite la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est du type $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ où B' est une matrice carrée de format 2. D'autre part B est de rang 2 et donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ est de rang 2 ou encore B' est de rang 2 (en éliminant les lignes ou les colonnes de 0). B' est ainsi une matrice de format 2 et de rang 2 et donc une matrice de format 2 inversible.

Enfin, les matrices B et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ sont les matrices de g dans des bases différentes et donc ces matrices sont semblables.

e) $\mathrm{Tr}(B) = 0$ et $\mathrm{Tr}(B^2) = 2$. Maintenant B est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}(B')$.

D'autre part, un calcul par blocs montre que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B'^2 \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{Tr}(B^2) = \mathrm{Tr}(B'^2)$. Ainsi

$$\mathrm{Tr}(B') = 0 \text{ et } \mathrm{Tr}(B'^2) = 2.$$

Maintenant, la matrice B' a deux valeurs propres dans $\mathbb{C}$ notées λ et μ. On sait que $\mathrm{Tr}(B) = \lambda + \mu$ et $\mathrm{Tr}(B^2) = \lambda^2 + \mu^2$. Or

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\lambda \\ 2\lambda^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}.$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } B' \text{ sont simples, égales à } -1 \text{ et } 1.}$$

f) Le polynôme caractéristique de B est celui de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ et donc

$$\chi_B = \det\begin{pmatrix} -XI_{n-2} & 0 \\ 0 & B' - XI_2 \end{pmatrix} = (-X)^{n-2}\chi_{B'} = (-X)^{n-2}(X-1)(X+1).$$

Mais alors

$$\chi_F = \chi_{I_n+B} = \det(I_n + B - XI_n) = \det(B - (X-1)I_n) = \chi_B(X-1) = (-X+1)^{n-2}(X-2)(X).$$

Les valeurs propres de F sont donc 1 d'ordre $n-2$ et 0 et 2 d'ordre 1. Puisque 0 et 2 sont des valeurs propres simples, les sous-espaces propres associés sont de dimension 1. D'autre part, D'après la question a), la matrice $F - I_n$ est de rang 2 et donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension $n-2$.

Les valeurs propres de F sont donc 1 d'ordre $n-2$ et 0 et 2 d'ordre 1.
La dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

6) On a vu que

$$d(P({}^tF), H) = \frac{|(F|P({}^tF))|}{\|F\|} = \frac{|(F|P({}^tF))|}{\sqrt{3n-2}}.$$

Calculons $(F|P({}^tF))$.

$$(F|P({}^tF)) = \mathrm{Tr}\left({}^tF(a_0I_n + \sum_{i=1}^{k} a_i({}^tF)^i)\right) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i({}^tF)^{i+1}\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i\mathrm{Tr}(({}^tF)^{i+1}).$$

On sait alors que $\mathrm{Tr}(({}^tF)^{i+1}) = \mathrm{Tr}(F^{i+1})$ puis que $\mathrm{Tr}(F^{i+1})$ est la somme des valeurs propres de $\mathrm{Tr}(F^{i+1})$. Donc

$$\mathrm{Tr}(F^{i+1}) = 1^{i+1} + \ldots + 1^{i+1} + 0^{i+1} + 2^{i+1} = (n-2) \times 1^{i+1} + 2^{i+1}.$$

Par suite,

$$(F|P({}^tF)) = \sum_{i=0}^{k} a_i((n-2) \times 1^{i+1} + 2^{i+1}) = (n-2)\sum_{i=0}^{k} a_i 1^i + 2\sum_{i=0}^{k} a_i 2^i = (n-2)P(1) + 2P(2).$$

Finalement,

$$\boxed{d(P({}^tF), H) = \frac{|(n-2)P(1) + 2P(2)|}{\sqrt{3n-2}}.}$$

Partie II.

On note $\| \ \|$ la norme sur E.

1) a) Soit $x_0 \in E$. Par définition $d(x_0, H) = \inf_{y\in H}\|x_0 - y\|$. Mais alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y_\varepsilon \in H/\ d(x_0, H) \leq \|x_0 - y_\varepsilon\| < d(x_0, H) + \varepsilon$. En particulier $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists y_n \in H/\ d(x_0, H) \leq \|x_0 - y_n\| < d(x_0, H) + \dfrac{1}{n+1}$. Comme $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de H telle que $\lim_{n\to+\infty}\|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)$.

Il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H telle que $\lim_{n\to+\infty}\|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)$.

b) Il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $\|y_n - x_0\| \leq d(x_0, H) + 1$. Soit $n \geq n_0$.

$$\|y_n\| = \|y_n - x_0 + x_0\| \leq \|y_n - x_0\| + \|x_0\| \leq d(x_0, H) + 1 + \|x_0\|.$$

Mais alors la suite $(y_n)_{n\geq n_0}$ est bornée. Puisque E est de dimension finie, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de cette suite et donc de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente. On note $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ cette sous-suite.

Puisque E est de dimension finie, la forme linéaire h est continue sur E et puisque $H = \mathrm{Ker}(h) = h^{-1}(\{0\})$, H est un fermé de E en tant qu'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.
Puisque $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'éléments de H et que H est fermé, sa limite est dans H.

c) La suite $(\|x_0 - y_{\varphi(n)}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(\|x_0 - y_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc converge et a pour limite $d(x_0, H)$. Renotons $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de H, convergeant vers un certain y_0 de H et vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_0 - z_n\| = d(x_0, H)$.
Mais alors, par continuité de la norme,

$$d(x_0, H) = \lim_{n\to+\infty} \|x_0 - z_n\| = \|x_0 - \lim_{n\to+\infty} z_n\| = \|x_0 - y_0\|.$$

$$\boxed{\forall x_0 \in E,\ \exists y_0 \in H/\ d(x_0, H) = \|x_0 - y_0\|.}$$

2) a) Puisque la forme linéaire h est continue sur E et que $H = \mathrm{Ker}(h) = h^{-1}(\{0\})$, H est un fermé de E en tant qu'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.

b) Supposons h non continue. On sait alors que h n'est pas continue en 0. Par suite $\exists \varepsilon > 0/\ \forall \alpha > 0,\ \exists u_\alpha \in E/\ (\|u_\alpha\| < \alpha$ et $|h(u_\alpha)| = |h(u_\alpha) - h(0)| \geq \varepsilon)$ $(*)$. ε est dorénavant ainsi fixé.

D'après $(*)$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in E$ tel que $\|u_n\| < \dfrac{1}{n+1}$ et $\|h(u_n)\| \geq \varepsilon$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N},\ h(u_n) \neq 0$ et pour chaque n on peut poser $t_n = \dfrac{1}{h(u_n)} u_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $h(t_n) = \dfrac{1}{h(u_n)} h(u_n) = 1$. Mais d'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\|t_n\| = \frac{1}{|h(u_n)|}\|u_n\| \leq \frac{1}{\varepsilon(n+1)},$$

et en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

$$\boxed{\text{Si } h \text{ n'est pas continue sur } E,\ \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}/\ \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0\\ h(t_n) = 1, \text{ pour tout entier } n.\end{array}\right. .}$$

Pour chaque n, on a alors $h(t_n - t_0) = h(t_n) - h(t_0) = 1 - 1 = 0$. Par suite, pour chaque n le vecteur $t_n - t_0$ est dans H ou encore la suite $(t_n - t_0)$ est une suite d'éléments de H. Cette suite est de plus convergente vers $-t_0$. Mais le vecteur $-t_0$ n'est pas dans H car $h(-t_0) = -1 \neq 0$.
En résumé, la suite $(t_n - t_0)$ est une suite convergente d'éléments de H dont la limite n'est pas dans H ce qui montre que H n'est pas fermé. Par contraposition, on a montré que si H est fermé alors h est continue sur E.

$$\boxed{\text{Si } H \text{ est un fermé de } E \text{ alors } h \text{ est continue sur } E.}$$

c) Soit H un hyperplan de E. Tout d'abord $\overline{H} \neq \varnothing$ car $\overline{H}$ contient H et en particulier $0 \in \overline{H}$. Soient alors $(x, y) \in \overline{H}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H, convergentes, de limites respectives x et y. Mais alors la suite $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de H (puisque H est un sous-espace vectoriel de E), convergente, de limite $\lambda x + \mu y$, ce qui montre que $\lambda x + \mu y \in \overline{H}$. On a montré que

$$\boxed{\text{si } H \text{ est un hyperplan de } E,\ \overline{H} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

d) Soient H un hyperplan de E puis h une forme linéaire non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}(h)$.
• Si h est continue sur E, alors H est fermé et donc $\overline{H} = H$.
• Si h n'est pas continue, $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant strictement l'hyperplan H et donc $\overline{H} = E$.

Partie III.

Dans cette partie $\|\ \|$ désigne la norme hilbertienne associée au produit scalaire $(\ |\ )$.

1) Soit $x \in H^\perp$. Alors $\forall y \in H,\ (x|y) = 0$. Soit $z \in E$. Puisque $E = \overline{H}$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $z = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. On sait alors que la forme linéaire $y \mapsto (x|y)$ est continue sur E pour la norme $\|\ \|$ et donc

$$(x|z) = (x|\lim_{n\to+\infty} y_n) = \lim_{n\to+\infty} (x|y_n) = 0.$$

Ainsi un vecteur de $H^\perp$ est orthogonal à tout vecteur de E et finalement

$$\boxed{H^\perp = \{0\}.}$$

2) Mais alors immédiatement

$$\boxed{H \oplus H^\perp = H.}$$

3) Soit $x \in E$. Puisque $\overline{H} = E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in H / \ \|x - y\| < \varepsilon$ ce qui montre immédiatement que $d(x, H) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ d(x, H) = 0.}$$

4) Soit $x \in E$. Si $d(x, H)$ est atteinte, il existe un vecteur $y \in H$ tel que $\|x - y\| = d(x, H) = 0$. Mais alors, $x = y \in H$. Donc

$$\boxed{\text{si } x_0 \notin H,\ d(x, H) \text{ n'est pas atteinte.}}$$

Partie IV.

1) **a)** Soit $x_0 \in E$. Pour tout vecteur t de E on a $|h(t)| \leq \|t\| \times |||h|||$. En particulier, pour $y \in H$,

$$|h(x_0)| = |h(x_0) - h(y)| = |h(x_0 - y)| \leq \|x_0 - y\| \times |||h|||,$$

et finalement, puisque $|||h||| > 0$, $\|x_0 - y\| \geq \dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||}$.

$$\boxed{\forall x_0 \in E,\ \forall y \in H,\ \|x_0 - y\| \geq \dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||}.}$$

b) $\dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||}$ est donc un minorant de $\{\|x_0 - y\|,\ y \in H\}$ et puisque $d(x_0, H)$ est le plus grand des minorants de cet ensemble, on a donc $d(x_0, H) \geq \dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||}$.

$$\boxed{\forall x_0 \in E,\ d(x_0, H) \geq \dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||}.}$$

c) Soit $x_0 \in E$.
- Si $x_0 \in H$, $d(x_0, H) \leq \|x_0 - x_0\| = 0$ et donc $d(x_0, H) = 0$.
- Si $x_0 \notin H$, alors $h(x_0) \neq 0$ et donc $d(x_0, H) \geq \dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||} > 0$. En particulier, $d(x_0, H) \neq 0$.

En résumé

$$\boxed{\forall x_0 \in E,\ (d(x_0, H) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in H).}$$

d) Soit $x_0 \notin H$. Par définition, $h(x_0) \neq 0$.

α) Puisque $|||h||| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|h(x)|}{\|x\|}$, pour tout entier n, il existe $w_n \in E \setminus \{0\}$ tel que $|||h||| - \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq |||h|||$. $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite de vecteurs tous non nuls tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} = |||h|||$.

β) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\lambda_n = \dfrac{h(w_n)}{h(x_0)}$ puis $y_n = w_n - \lambda_n x_0$. Par définition, $w_n = \lambda_n x_0 + y_n$. D'autre part,

$$h(y_n) = \lambda_n h(x_0) - h(w_n) = \frac{h(w_n)}{h(x_0)} h(x_0) - h(w_n) = 0,$$

ce qui montre que $y_n \in H$. Notons que λ_n peut être nul (si $w_n \in H$).

$$\boxed{\forall x_0 \notin H,\ \exists (\lambda_n, y_n) \in \mathbb{R} \times H / \ w_n = \lambda_n x_0 + y_n.}$$

γ) Le résultat est clair si $w_n \in H$. Sinon, $\lambda_n \neq 0$ et donc

$$\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} = \frac{|\lambda_n| \times |h(x_0)|}{\|\lambda_n x_0 + y_n\|} = \frac{\times |h(x_0)|}{\|x_0 + \dfrac{1}{\lambda_n} y_n\|} \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)},$$

car $\dfrac{1}{\lambda_n} y_n \in H$ et donc $\|x_0 + \dfrac{1}{\lambda_n} y_n\| \geq d(x_0, H) > 0$. Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}.}$$

e) Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $|||h||| \leq \dfrac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$ ou encore $d(x_0, H) \leq \dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||}$. En récupérant le résultat de la question 1)b), on a montré que si $x_0 \notin H$, $d(x_0, H) = \dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||}$. Ce résultat est encore valable si $x_0 \in H$ d'après la question 1)c) et finalement

$$\boxed{\forall x_0 \in E,\ d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}.}$$

2) a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, $\dfrac{u_n}{2^{n+1}} \underset{n \to +\infty}{=} o(\dfrac{1}{2^n})$. Comme la série géométrique de terme général $\dfrac{1}{2^n}$ converge, on en déduit que la série de terme général $\dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ est absolument convergente et en particulier convergente.

b) La fonction h est donc effectivement une application de E dans $\mathbb{R}$.
Montrons que h est linéaire. Soient $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$h(\lambda u + \mu v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda u_n + \mu v_n}{2^{n+1}} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{2^{n+1}} = \lambda h(u) + \mu h(v).$$

h est donc une forme linéaire sur E. Montrons que h est continue sur E. Soit $u \in E$.

$$|h(u)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \|u\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \|u\|_\infty.$$

Ainsi, $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} \leq 1$. On en déduit que

$$\boxed{h \text{ est une forme linéaire continue sur } E \text{ et } |||h||| \leq 1.}$$

c) Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$h(v_p) = \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{1 - \dfrac{1}{2^{p+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}}.$$

Comme d'autre part, $\|v_p\|_\infty = 1$, on a donc $\dfrac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} = 1 - \dfrac{1}{2^{p+1}}$. Par suite

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} \frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} = 1.}$$

On sait déjà que $|||h||| \leq 1$. Mais d'autre part, par définition de $|||h|||$, pour tout entier p on a $\dfrac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \leq |||h|||$ et quand p tend vers $+\infty$ on obtient $1 \leq |||h|||$. Finalement

$$\boxed{|||h||| = 1.}$$

d) Soit $u \in E$. On a

$$|h(u)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \|u\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \|u\|_\infty.$$

Supposons de plus que $|||h||| = \dfrac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}$ ou ce qui revient au même telle que $|h(u)| = \|u\|_\infty$. Alors chacune des deux inégalités ci-dessus doit être une égalité ce qui impose à la suite u d'être de signe constant puis à chaque $|u_n|$ d'être égal à $\|u\|_\infty$. En résumé, la suite u est nécessairement constante. Comme u doit avoir une limite nulle en $+\infty$, u est nécessairement la suite nulle. Finalement, il existe pas d'élément u non nul de E tel que $|||h||| = \dfrac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}$.

e) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle et continue sur E et donc un hyperplan fermé de E d'après la question II.2)a).

f) Soit $u \notin H$. Si la distance de u à H est atteinte, alors il existe $v \in H$ (et donc $u - v \neq 0$) telle que

$$\|u - v\|_\infty = d(u, H) = \frac{|h(u)|}{|||h|||} = \frac{|h(u) - h(v)|}{|||h|||} = \frac{|h(u - v)|}{|||h|||}.$$

$u - v$ est alors un vecteur non nul tel que $|||h||| = \dfrac{|h(u - v)|}{\|u - v\|_\infty}$ ce qui contredit le résultat de la question d) et donc

$$\boxed{\text{si } u \notin H,\ d(u, H) \text{ n'est pas atteinte.}}$$

