Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice 1.

1. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0. Soit f une fonction dérivable sur J. On note $\mathcal{E}_h$ l'équation différentielle : $xy' + \alpha y = 0$.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } \mathcal{E}_h \text{ sur } J &\Leftrightarrow \forall x \in J,\ xf'(x) + \alpha f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in J,\ f'(x) + \frac{\alpha}{x} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in J,\ e^{\alpha \ln|x|} f'(x) + \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln|x|} f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in J,\ (e^{\alpha \ln|x|} f)'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in J,\ (|x|^\alpha f)'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \ \forall x \in J,\ |x|^\alpha f(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \ \forall x \in J,\ f(x) = C|x|^{-\alpha}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } \mathcal{E}_h \text{ sur } J \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto C|x|^{-\alpha},\ C \in \mathbb{R}.}$$

2. **2a)** D'après la question 1,

$$\boxed{\text{les solutions de } (\mathcal{E}_h) \text{ sur I sont les fonctions de la forme } x \mapsto \begin{cases} C_1 x^{-\alpha} \text{ si } x > 0 \\ C_2(-x)^{-\alpha} \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.}$$

2b) Puisque $\alpha > 0$, $|x|^{-\alpha}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0. Donc si $C_1 \neq 0$ ou $C_2 \neq 0$, une solution de $\mathcal{E}_h$ sur I n'a pas une limite finie en 0 ou encore une solution non nulle de $(\mathcal{E}_h)$ sur I n'a pas une limite finie en 0. D'autre part, la fonction nulle sur I est une solution de $\mathcal{E}_h$ admettant une limite finie en 0. Finalement

$$\boxed{(E_h) \text{ admet une et une seule solution ayant une limite finie en } 0, \text{ la fonction nulle sur I.}}$$

3. Soient a et b deux réels.
• Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, l'équation $\mathcal{E}$ s'écrit $y' + \dfrac{\alpha}{x} y = \dfrac{F(x)}{x}$. Or les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{F(x)}{x}$ sont **continues** sur l'**intervalle** $]-\infty, 0[$. D'après le théorème de Cauchy, pour tout couple $(x_0, y_0) \in]-\infty, 0[\times\mathbb{R}$, il existe une et une seule solution de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty, 0[$ prenant la valeur y_0 en x_0. En particulier, il existe une et une seule solution f_1 de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty, 0[$ telle que $f_1(-1) = a$.
• De même, il existe une et une seule solution f_2 de $\mathcal{E}$ sur $]0, +\infty[$ telle que $f_2(1) = b$.
• Finalement, il existe une et une seule solution f de $\mathcal{E}$ sur I telle que $f(-1) = a$ et $f(1) = b$ à savoir la fonction $f\ :\ x \mapsto \begin{cases} f_1(x) \text{ si } x < 0 \\ f_2(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathcal{E} \text{ admet une et une seule solution sur I telle que } f(-1) = a \text{ et } f(1) = b.}$$

4. Soient g et h deux solutions de l'équation différentielle $\mathcal{E}$ sur I ayant une limite finie en 0. Alors $g - h$ est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}_h$ sur I ayant une limite finie en 0. D'après la question 2a), $g - h$ est la fonction nulle sur I et donc $g = h$. Ceci montre l'unicité d'une solution de $\mathcal{E}$ ayant une limite finie en 0.

5. 5a) On sait que f est dérivable sur $]-R,R[$ et que sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Pour $x\in]-R,R[$, on a

$$\begin{aligned}xf'(x)+\alpha f(x)&=x\sum_{i=1}^{+\infty}ia_ix^{i-1}+\alpha\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha_ix^i=\sum_{i=0}^{+\infty}ia_ix^i+\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha a_ix^i\\&=\sum_{i=0}^{+\infty}(i+\alpha)a_ix^i.\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière,

$$\begin{aligned}f\text{ est solution de }\mathcal{E}\text{ sur }]-R,R[&\Leftrightarrow\forall x\in]-R,R[,\ \sum_{i=0}^{+\infty}(i+\alpha)a_ix^i=\sum_{i=0}^{+\infty}\beta_ix^i\\&\Leftrightarrow\forall i\in\mathbb{N},\ (i+\alpha)a_i=\beta_i\Leftrightarrow\forall i\in\mathbb{N},\ a_i=\frac{\beta_i}{i+\alpha}.\end{aligned}$$

Maintenant $a_i=\dfrac{1}{i+\alpha}\beta_i\underset{i\to+\infty}{\sim}\dfrac{\beta_i}{i}$ et on sait alors que le rayon de convergence de la série entière associée à la suite $(\dfrac{\beta_i}{i})$ est le même que le rayon de convergence de la série entière associée à la suite (β_i) (série entière primitive) à savoir $+\infty$. On en déduit que

$$\boxed{R=+\infty.}$$

5b) D'après la question précédente, sous l'hypothèse $R>0$, f est solution de $\mathcal{E}$ sur $]-R,R[$ si et seulement si $\forall x\in]-R,R[$, $f(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\beta_i}{i+\alpha}x^i$. Ceci montre déjà l'unicité d'une solution de $\mathcal{E}$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Mais comme $R=+\infty$, la fonction $x\mapsto\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\beta_i}{i+\alpha}x^i$ est effectivement solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ ce qui démontre l'existence d'une solution de $\mathcal{E}$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

5c) La fonction g admet une limite finie en 0 et donc l'équation $\mathcal{E}$ admet exactement une solution sur I qui a une limite finie en 0.

6. 6a) Soit $x\in]0,+\infty[$. La fonction $t\mapsto t^{\alpha-1}e^t$ est continue sur $]0,x]$, positive et équivalente en 0 à $t^{\alpha-1}$ qui est intégrable au voisinage de 0 puisque $\alpha-1>-1$. On en déduit que la fonction $t\mapsto t^{\alpha-1}e^t$ est intégrable sur $]0,x]$ et donc que

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\text{ l'intégrale }\int_0^x t^{\alpha-1}e^t\,dt\text{ est convergencte.}}$$

6b) La fonction $t\mapsto t^{\alpha-1}e^t$ est continue sur $]0,+\infty[$. On en déduit que la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_1^x t^{\alpha-1}e^t\,dt$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée la fonction $x\mapsto x^{\alpha-1}e^x$. Puisque $\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}e^t\,dt=\int_0^1 t^{\alpha-1}e^t\,dt+\int_1^x t^{\alpha-1}e^t\,dt$, il en est de même de la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}e^t\,dt$. Mais alors h est dérivable sur $]0,+\infty($ et pour $x>0$,

$$xh'(x)+\alpha h(x)=x\frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}\int_0^x t^{\alpha-1}e^t\,dt+x\frac{1}{x^\alpha}x^{\alpha-1}e^x+\alpha\frac{1}{x^\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1}e^t\,dt=e^x=F(x).$$

$$\boxed{\text{La fonction }h\text{ est solution de l'équation }\mathcal{E}\text{ sur }]0,+\infty[.}$$

6c) Soit $x>0$. En posant $t=ux$, on obtient

$$h(x)=\int_0^x\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}e^t\,\frac{dt}{x}=\int_0^1 u^{\alpha-1}e^{ux}\,du.$$

Par suite, pour $x > 0$,

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}e^0\ du \leq h(x) \leq \int_0^1 u^{\alpha-1}e^x\ du,$$

ou encore

$$\frac{1}{\alpha} \leq h(x) \leq \frac{e^x}{\alpha}.$$

Les deux membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $\frac{1}{\alpha}$ quand x tend vers 0 et donc, d'après le théorème des gendarmes, h a une limite réelle quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = \frac{1}{\alpha}.}$$

6d) Ici, on a pour tout réel x $F(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$. On a vu dans les questions précédentes que $\mathcal{E}$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$ admettant une limite finie en 0 à savoir la fonction $x \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{(i+\alpha)i!}$. Comme h a une limite finie en 0, on a montré que

$$\boxed{\forall x > 0,\ h(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{(i+\alpha)i!}.}$$

Exercice 2.

1. 1a) La fonction f est une fonction polynomiale et donc la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

1b) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. $\frac{\partial f}{\partial x}((x_0, y_0)) = 3x_0^2 - 3(1 + y_0^2) = 3(x_0^2 - y_0^2 - 1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}((x_0, y_0)) = -3x_0(2y_0) = -6x_0y_0$.

$$\boxed{\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}((x_0, y_0)) = 3(x_0^2 - y_0^2 - 1) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}((x_0, y_0)) = -6x_0y_0.}$$

1c) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}((x_0, y_0)) = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}((x_0, y_0)) = 0\end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x_0^2 - y_0^2 - 1 = 0\\ x_0y_0 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x_0 = 0\\ -y_0^2 - 1 = 0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}y_0 = 0\\ x_0^2 - 1 = 0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y_0 = 0\\ x_0^2 = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y_0 = 0\\ x_0 = 1\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}y_0 = 0\\ x_0 = -1\end{array}\right. .\end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ admet exactement deux points critiques, les points } (1, 0) \text{ et } (-1, 0).}$$

1d) Pour $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ posons $u((h, k)) = f((1 + h, k))$. Ainsi, pour $(h, k) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}u((h, k)) &= (1 + h)^3 - 3(1 + h)(1 + k^2) = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3 - 3h - 3k^2 - 3k^2h\\ &= -2 + 3h^2 - 3k^2 + h^3 - 3k^2h.\end{aligned}$$

Montrons alors que l'expression $h^3 - 3k^2h$ est négligeable devant $\|(h, k)\|_\infty^2$ quand (h, k) tend vers $(0, 0)$. Pour $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|h^3 - 3k^2h| = |h||h^2 - 3k^2| \leq |h|(h^2 + 3k^2) \leq \|(h, k)\|_\infty(\|(h, k)\|_\infty^2 + 3\|(h, k)\|_\infty^2) = 4\|(h, k)\|_\infty^3,$$

et donc $|h^3 - 3k^2h| \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} \|(h,k)\|_\infty^2 \varepsilon((h,k))$ où $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon((h,k)) = 0$. Finalement

$$\boxed{u((h,k)) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} -2 + 3h^2 - 3k^2 + \|(h,k)\|_\infty^2 \varepsilon((h,k)) \text{ où } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon((h,k)) = 0.}$$

En particulier $u((h,0)) + 2 = 3h^2 + h^2\varepsilon((h,0)) = h^2(3 + \varepsilon((h,0)))$. Cette expression est du signe de $3h^2$ quand h est au voisinage de 0 et donc pour h petit et non nul, $u((h,0)) + 2 > 0$. De même, $u((0,k)) + 2 = -3k^2 + k^2\varepsilon((0,k))$ et donc pour k petit et non nul, $u((0,k)) + 2 < 0$. Finalement, dans tout voisinage de $(0,0)$ la fonction $(h,k) \mapsto u((h,k)) - u((0,0))$ n'est pas de signe constant et donc

$$\boxed{\text{le point } (1,0) \text{ n'est pas un extremum local de } f.}$$

1e) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((-x,y)) = -f((x,y))$. On en déduit que

$$\boxed{\text{le point } (-1,0) \text{ n'est pas un extremum local de } f.}$$

1f) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On sait que si f présente un extremum local en un point de $\mathbb{R}^2$, ce point est nécessairement un point critique de f. Mais alors, les questions 1c), 1d) et 1e) montrent que

$$\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local.}}$$

2. **2a)** La fonction g est continue sur D qui est un compact de $\mathbb{R}^2$ (D est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ et borné et donc compact puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$). On en déduit que la fonction g admet sur D un minimum a et un maximum A.

2b) Si A n'est pas atteint sur le cercle C, A est atteint dans l'intérieur de D qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, en un point qui est un extremum local de g et donc de f. Puisque f n'admet pas d'extremum local

$$\boxed{A \text{ est atteint sur le cercle } C.}$$

2c) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$g((\cos t, \sin t)) = \cos^3 t - 3\cos t(1 + \sin^2 t) = \cos t(\cos^2 t - 3 - 3\sin^2 t) = \cos t(\cos^2 t - 3 - 3 + 3\cos^2 t) = 2\cos t(2\cos^2 t - 3)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $h(t) = 2\cos t(2\cos^2 t - 3)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $t \in \mathbb{R}$,

$$h'(t) = 2[(-\sin t)(2\cos^2 t - 3) + \cos t(-4\sin t\cos t)] = -2\sin t(2\cos^2 t - 3 + 4\cos^2 t) = -6\sin t(2\cos^2 t - 1).$$

Ainsi, h est 2π-périodique, paire, décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, croissante sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ et croissante sur $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$. On en déduit que $A = h(\frac{3\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$. De plus A est atteint au point $(\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et au point $(\cos\frac{-3\pi}{4}, \sin\frac{-3\pi}{4}) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

$$\boxed{A \text{ est atteint aux points } (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ et } (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\ A = 2\sqrt{2}.}$$

2d) Pour $(x,y) \in D$, $(-x,y) \in D$ et $g((-x,y)) = -g(x,y)$. Donc

$$\boxed{a \text{ est atteint au point } (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ et } (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ et} a = -2\sqrt{2}.}$$

Exercice 3.

1. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. La i-ème composante de $J_n v$ est égale $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{n}$ ou encore 1. Donc

$$\boxed{J_n v = v.}$$

2. Les colonnes de la matrice J_n sont égales et non nulles. Donc J_n est une matrice de rang 1 ou encore l'image de J_n est une droite vectorielle. Puisque $v = J_n v$, v est dans l'image de J_n et puisque v n'est pas nul, la famille (v) est une base de l'image de J_n. Finalement

$$\boxed{\mathrm{Im}(J_n) = \mathrm{Vect}(v).}$$

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(J_n)) = n - \dim(\mathrm{Im}(J_n)) = n - 1$.

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(J_n)) = n - 1.}$$

3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colone j de la matrice J_n^2 est

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n},$$

et donc

$$\boxed{J_n^2 = J_n.}$$

4. La matrice J_n est symétrique réelle et est donc diagonalisable. En particulier, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de J_n est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.

D'après la question 3., le polynôme $X^2 - X$ est annulateur de J_n et on sait que les valeurs propres de J_n sont à choisir parmi les racines de ce polynôme c'est-à-dire 0 et 1. La question 2 montre que 0 est valeur propre de J_n et que le sous-espace propre associé, à savoir $\mathrm{Ker}(J_n)$, est de dimension $n - 1$. On en déduit que 0 est valeur propre de J_n d'ordre $n - 1$. Il manque une valeur propre qui ne peut être que 1, nécessairement valeur propre simple.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } J_n \text{ sont } 0 \text{ d'ordre } n-1 \text{ et } 1 \text{ d'ordre } 1.}$$

5. **(a)** Supposons $M = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\det(M + xJ_n) = \det(xJ_n) = x^n \det(J_n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \geq 2 \\ x \text{ si } n = 1 \end{cases}.$$

Donc

$$\boxed{\text{si } M = 0,\ \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \mathbb{R} \text{ si } n \geq 2 \text{ et } \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{0\} \text{ si } n = 1.}$$

(b) Supposons $M = I_n$. $\det(M + 0.J_n) = \det(I_n) \neq 0$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\det(M + xJ_n) = 0 \Leftrightarrow x^n \det(J_n + \frac{1}{x} I_n) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \in \mathrm{Sp}(J_n) \Leftrightarrow -\frac{1}{x} = 0 \text{ ou } -\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

Donc

$$\boxed{\text{si } M = I_n,\ \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{-1\}.}$$

(c) **(i)** Supposons M inversible. On a vu que 1 est valeur propre de la matrice J_n et que le sous-espace propre associé est une droite vectorielle. Puisque d'autre part, $J_n v = v$ et que $v \neq 0$, le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre 1 est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(v)$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ puis $w \in \mathrm{Ker}(M + xJ_n)$. Par suite, $Mw = -xJ_n w = J_n(-xw) \in \mathrm{Im}(J_n)$. Puisque $\mathrm{Im}(J_n)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur v, Mw est colinéaire à v. Par suite, il existe un réel k tel que $Mw = kv$ ou encore il existe un réel k tel que $w = kM^{-1}v$ et finalement w est colinéaire à $M^{-1}v$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. $(M + xJ_n)w = Mw + xJ_n w = v + xJ_n M^{-1}v = \begin{pmatrix} 1 + x\dfrac{\sigma}{n} \\ 1 + x\dfrac{\sigma}{n} \\ \vdots \\ 1 + x\dfrac{\sigma}{n} \end{pmatrix}$. Par suite

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (M + xJ_n)w = 0 \Leftrightarrow 1 + x\frac{\sigma}{n} = 0.}$$

Le début de la question (i) montre que $\mathrm{Ker}(M + xJ_n) \subset \mathrm{Vect}(M^{-1}v)$ et en particulier que $\dim(\mathrm{Ker}(M + xJ_n)) \leq 1$. Par suite, en notant que le vecteur $M^{-1}v$ n'est pas nul puisque M est inversible et $v \neq 0$, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\det(M + xJ_n) = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(M + xJ_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(M + xJ_n) = \mathrm{Vect}(M^{-1}v) \Leftrightarrow M^{-1}v \in \mathrm{Ker}(M + xJ_n) \\ &\Leftrightarrow 1 + x\frac{\sigma}{n} = 0.\end{aligned}$$

Maintenant, si $\sigma = 0$, l'équation $1 + x\dfrac{\sigma}{n} = 0$ n'admet pas de solution et si $\sigma \neq 0$, l'équation $1 + x\dfrac{\sigma}{n} = 0$ admet une unique solution, le réel $-\dfrac{n}{\sigma}$.

$$\boxed{\text{Si } \sigma = 0,\ \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \varnothing \text{ et si } \sigma \neq 0,\ \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \left\{-\frac{n}{\sigma}\right\}.}$$

(d) (i) $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ n'est pas vide car 0 est solution de l'équation $\mathcal{E}$.

(ii) Soit x un réel.

$$x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \det(M + bJ_n + xJ_n) = 0 \Leftrightarrow \det(M + (b + x)J_n) = 0 \Leftrightarrow b + x \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}.$$

On en déduit que l'application $x \mapsto b + x$ réalise une bijection de $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ ou encore

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = b + \mathcal{S}_{\mathcal{F}}.}$$

(iii) Si pour tout réel b, la matrice $M + bJ_n$ n'est pas inversible alors $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \mathbb{R}$. Sinon, il existe un réel b tel que la matrice $M + bJ_n$ soit inversible. Dans ce cas, l'équation $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ admet au plus une solution d'après la question 5. et il en est de même de l'équation $\mathcal{S}_E$ d'éaprès la question (ii). La question (i) montre que $\mathcal{S}_E$ contient toujours le nombre 0 et finalement $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{0\}$.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ n'est pas inversible, } \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{0\}.}$$

6. a) En notant C_1, C_2,…,C_n les colonnes de la matrice M, on a

$$\det(M + xJ_n) = \det(C_1 + \frac{x}{n}v, \dots, C_n + \frac{x}{n}v).$$

Par n-linéarité, ce déterminant est somme de 2^n déterminants. Certains de ces déterminants contiennent au moins deux fois la colonne $\dfrac{x}{n}v$ et sont donc nuls. Il ne reste alors plus que $n + 1$ déterminants :

$$\det(M + xJ_n) = \det(C_1, \dots, C_n) + \sum_{j=1}^{n} \det(C_1, \dots, C_{j-1}, \frac{x}{n}v, C_{j+1}, C_n) = \det M + \frac{x}{n}\sum_{j=1}^{n} \det(C_1, \dots, C_{j-1}, v, C_{j+1}, C_n).$$

On a montré que la fonction $f\ :\ x \mapsto \det(M + xJ_n)$ est une fonction affine.

Plus précisément, soit $i \in [\![1,n]\!]$. En développant $\det(C_1,\ldots,C_{j-1},\nu,C_{j+1},C_n)$ suivant sa j-ème colonne, on obtient

$$\det(C_1,\ldots,C_{j-1},\nu,C_{j+1},C_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,j},$$

où $\Delta_{i,j}$ désigne le cofacteur du coefficient de M situé ligne i et colonne j. Finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \det M + \frac{x}{n} \sum_{1\leq i,j\leq n} \Delta_{i,j}.}$$

b) On retrouve ainsi les résultats de la question 5 :
• Si M est inversible, alors $\alpha \neq 0$ et donc l'équation $f(x) = 0$ admet soit exactement une solution si $\beta \neq 0$, soit pas de solution si $\beta = 0$.
• Si M n'est pas inversible, alors $\alpha = 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution si $\beta \neq 0$ à savoir 0 et admet tout réel pour solution si $\beta = 0$.

