Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

Partie A : Etude de la fonction f.

1) Solution d'une équation différentielle.

a) Notons I l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$. Pour $x \in I$, on a $e^x - 1 \neq 0$. Par suite, sur I, l'équation différentielle (E) équivaut à l'équation différentielle :

$$y' + \frac{e^x}{e^x-1}y = \frac{1}{e^x-1} \quad (E').$$

Maintenant, les deux fonctions $a\ :\ x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x-1}$ et $b\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{e^x-1}$ sont continues sur I en tant que quotient de fonctions continues sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. On sait alors que les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1.

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (e^x-1)f'(x) + e^x f(x) = 1\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ ((e^x-1)f)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (e^x-1)f(x) = x+\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x+\lambda}{e^x-1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[\text{ ou }]0,+\infty[\text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto \frac{x+\lambda}{e^x-1},\ \lambda \in \mathbb{R}.}$$

b) Soit f une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Les restrictions de f à $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ sont solutions de (E) sur ces intervalles. Donc, nécessairement, il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $\forall x < 0,\ f(x) = \dfrac{x+\lambda_1}{e^x-1}$ et $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{x+\lambda_2}{e^x-1}$. Enfin, quand $x = 0$ dans l'égalité (E), on obtient $f(0) = 1$. En résumé, si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\lambda_1}{e^x-1} \text{ si } x < 0\\ 1 \text{ si } x = 0\\ \dfrac{x+\lambda_2}{e^x-1} \text{ si } x > 0 \end{cases}.$$

Réciproquement, une telle fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$ et même sur $\mathbb{R}$ si elle est dérivable en 0. En résumé, une telle fonction est solution si et seulement si elle est dérivable en 0.

Si $\lambda_1 \neq 0$, $\dfrac{x+\lambda_1}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\lambda_1}{e^x-1}$ et en particulier $\dfrac{x+\lambda_1}{e^x-1}$ n'a pas de limite réelle en 0 à gauche de sorte que f n'est pas dérivable en 0. Donc, $\lambda_1 = 0$. De même, $\lambda_2 = 0$.

Si maintenant $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} \text{ si } x \neq 0\\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Or, quand x tend vers 0,

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{1}{1+\dfrac{x}{2}+o(x)} = 1 - \frac{x}{2} + o(x) = f(0) - \frac{x}{2} + o(x).$$

Dans ce cas, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et est par suite dérivable en 0. Mais alors f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{(E) \text{ admet une solution et une seule sur } \mathbb{R} \text{ à savoir la fonction } x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}.}$$

2) Etude de f en 0.

a) Quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x-1} &= \frac{x}{x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)} = \frac{1}{1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+o(x^2)} \\ &= 1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2) = 1-\frac{x}{2}+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)x^2+o(x^2) \\ &= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2). \end{aligned}$$

En tenant compte de $f(0) = 1$, on a donc

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2).}$$

b) • f admet en 0 un développement limité d'ordre 0 à savoir $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+o(1)$. f est donc continue en 0.

• f admet en 0 un développement limité d'ordre 1 à savoir $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\dfrac{x}{2}+o(x)$. f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

• f admet en 0 un développement limité d'ordre 2 mais on sait que l'existence d'un tel développement n'impose pas à f d'être deux fois dérivable en 0.

c) On sait déjà que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. Plus précisément, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}.$$

Maintenant, quand x tend vers 0

$$\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{(1+x+\dfrac{x^2}{2})-1-x(1+x)+o(x^2)}{(x+o(x))^2} = \frac{-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \frac{-\dfrac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)} = -\frac{1}{2}+o(1) = f'(0)+o(1).$$

Ainsi, la fonction f' est continue en 0 et donc

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

d) Une équation deT est $y = f(0)+f'(0)x$ ou encore $y = 1-\dfrac{1}{2}x$. De plus, quand x tend vers 0, d'après la question a) on a

$$f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right) = \frac{x^2}{12}+o(x^2).$$

Par suite, l'expression $f(x)-\left(1-\dfrac{1}{2}x\right)$ est du signe de $\dfrac{x^2}{12}$ au voisinage de 0 et donc positive au voisinage de 0. Ainsi,

$$\boxed{T \text{ admet pour équation cartésienne } y = 1-\frac{1}{2}x \text{ et } (C) \text{ est au-dessus de } T \text{ au voisinage de } 0.}$$

3) Variations de f.

a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour x réel,

$$g'(x) = xe^x+e^x-e^x = xe^x.$$

g'est donc strictement négative sur $]-\infty, 0[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

g admet en 0 un minimum local strict égal à 0 et donc

$$\boxed{g \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}^* \text{ et s'annule en } 0.}$$

b) Le signe de f' sur $\mathbb{R}^*$ est le signe de $-g$ et donc, en tenant compte de $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$$

c) En $+\infty$, $f(x) \sim \dfrac{x}{e^x}$ et donc, d'après un théorème de croissances comparées,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

En $-\infty$, $f(x) \sim \dfrac{x}{-1} = -x$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

• Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, la droite (Ox) est asymptote à (C) en $+\infty$. De plus, puisque f tend vers 0 en $+\infty$ en décroissant strictement, f est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On en déduit que (C) est strictement au-dessus de la droite (Ox) sur $\mathbb{R}$.

• Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, quand x tend vers $-\infty$, on a

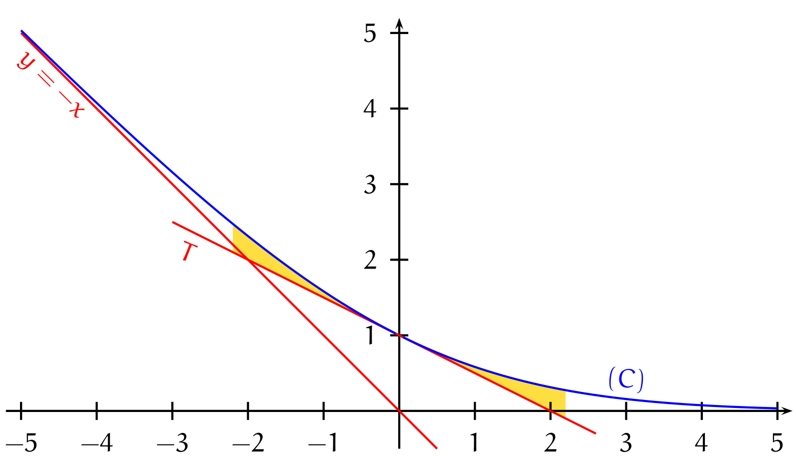
$$f(x) = \frac{-x}{1-e^x} = -x(1 + e^x + o(e^x)) = -x - xe^x + o(xe^x) = -x + o(1).$$

On en déduit que la droite (D_2) d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) en $-\infty$. Ensuite, pour x réel non nul donné

$$f(x) - (-x) = \frac{x}{e^x - 1} + x = \frac{xe^x}{e^x - 1} = e^x f(x) > 0,$$

et comme d'autre part $f(0) > -0$, on a montré que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > -x$. (C) est strictement au-dessus de (D_2) sur $\mathbb{R}$.

d) Allure de (C).



4) Expression hyperbolique de f.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \times \frac{2}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\left(\frac{2}{e^x - 1} + 1 - 1\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 1\right)$$
$$= \frac{x}{2}\left(\frac{e^{x/2}(e^{x/2} + e^{-x/2})}{e^{x/2}(e^{x/2} - e^{-x/2})} - 1\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{2\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1\right).$$

Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1\right).}$$

b) i) On a déjà $f_1(0) = 0 = \frac{0}{2}t(\frac{0}{2})$. Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_1(x) = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1\right) - 1 + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 - \frac{1}{\frac{x}{2}} + 1\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{\frac{x}{2}}\right) = \frac{x}{2}t\left(\frac{x}{2}\right).$$

Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{x}{2}t\left(\frac{x}{2}\right).}$$

ii) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, puisque la fonction th est impaire,

$$f_1(-x) = \frac{-x}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}(-x/2)} - \frac{1}{-x/2}\right) = \frac{-x}{2} \times -\left(\frac{1}{\operatorname{th}(x/2)} - \frac{1}{x/2}\right) = f_1(x).$$

et donc

$$\boxed{f_1 \text{ est paire.}}$$

iii) Soit x_0 un réel strictement positif. D'après la question 2)d), on sait que T est au-dessus de (C). Soient alors $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ 0 \leq x \leq x_0 \text{ et } 1 - \frac{x}{2} \leq y \leq f(x)\}$ et $\mathscr{D}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ -x_0 \leq x \leq 0 \text{ et } 1 - \frac{x}{2} \leq y \leq f(x)\}$.
L'aire de $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) est $\int_0^{x_0} f_1(x)\ dx$ (resp. $\int_{-x_0}^{0} f_1(x)\ dx$). Puisque f_1 est paire, on sait que ces intégrales sont égales. Par suite, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont même aire.

5) Intégrale impropre associée à f.

a) f est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, d'après un théorème de croissances comparées,

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{e^x} = o(\frac{1}{x^2}) \text{ (puisque } \lim_{x \to +\infty} x^3 e^x = 0).$$

On en déduit que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc que I existe.

b) L'application $t \mapsto e^{-t}$ est un C^1-difféomorphisme décroissant de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$.
On peut donc poser $u = e^{-t}$. On a alors $t = \ln u$ et aussi $dt = \frac{du}{u}$ et on obtient :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\ dt = \int_1^0 \frac{\ln u}{\frac{1}{u} - 1} \times \frac{du}{u} = \int_1^0 \frac{\ln u}{1 - u}\ du = \int_0^1 \frac{\ln u}{u - 1}\ du.$$

$$\boxed{I = \int_0^1 \frac{\ln u}{u - 1}\ du.}$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $u \mapsto u^k \ln u$ est continue sur $]0,1]$ et est négligeable devant $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ en 0. On en déduit que la fonction $u \mapsto u^k \ln u$ est intégrable sur $]0,1]$ et donc que I_k existe.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Les deux fonction $u \mapsto \dfrac{u^{k+1}}{k+1}$ et $u \mapsto \ln u$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$-\int_\varepsilon^1 u^k \ln u \, du = -\left[\frac{u^{k+1}\ln u}{k+1}\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{u^k}{k+1}\, du = \frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}(1-\varepsilon^{k+1}).$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $I_k = \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_k = \frac{1}{(k+1)^2}.}$$

d) théorème d'intégration terme à terme :
Soit I un intervalle quelconque. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur I, intégrables sur I telle que la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I |f_n(x)|\, dx < +\infty$, alors

- f est intégrable sur I,
- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_I f_n$ converge,
- $\displaystyle\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n$.

(Remarque : la condition $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I |f_n(x)|\, dx < +\infty$ implique l'intégrabilité de chaque f_n.)

e) Soit $u \in]0,1[$. Posons $g(u) = \dfrac{\ln u}{u-1}$. On a

$$g(u) = -\frac{\ln u}{1-u} = -\ln u \sum_{k=0}^{+\infty} u^k = \sum_{k=0}^{+\infty} -u^k \ln u.$$

Pour $u \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}$, posons $g_k(u) = -u^k \ln u$. La série de fonctions de terme général g_k converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction g qui est continue sur $]0,1[$. Chaque g_k est intégrable sur $]0,1[$ d'après la question c) et toujours d'après cette question

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 |g_k(u)|\, du = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 g_k(u)\, du = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty.$$

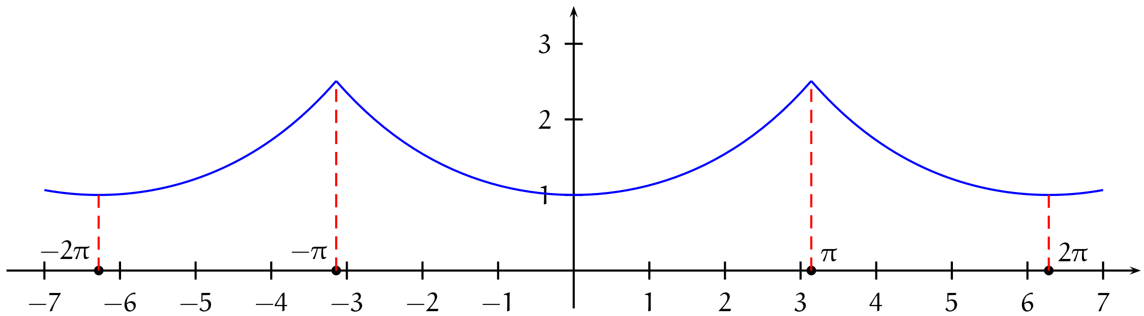
On peut donc intégrer terme à terme et on obtient $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln u}{u-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 g_k(u)\, du = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

$$\boxed{I = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.}$$

Partie B : Développement en série entière de f.

1) Un développement en série de Fourier.

a) Allure du graphe de g_a.



g_a est continue sur $]-\pi,\pi]$. De plus, par 2π-périodicité,

$$g_a(-\pi^+) = \mathrm{ch}(a(-\pi)) = \mathrm{ch}(a\pi) = g_a(\pi) = g_a(-\pi).$$

g_a est donc continue à droite en $-\pi$ et par suite continue sur $[-\pi,\pi]$. De nouveau par 2π-périodicité,

$$\boxed{g_a \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Une double intégration par parties (licite) fournit

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mathrm{ch}(at)\cos(nt)\;dt &= \left[\frac{\mathrm{sh}(at)}{a}\cos(nt)\;dt\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\mathrm{sh}(at)}{a}\times(-n\sin(nt))\;dt = (-1)^n\frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a} + \frac{n}{a}\int_0^\pi \mathrm{sh}(at)\sin(nt)\;dt\\ &= (-1)^n\frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a} + \frac{n}{a}\left(\left[\frac{\mathrm{ch}(a\pi)}{a}\sin(nt)\;dt\right] - \int_0^\pi \frac{\mathrm{ch}(a\pi)}{a}\times(n\cos(nt))\;dt\right)\\ &= (-1)^n\frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a} - \frac{n^2}{a^2}\int_0^\pi \mathrm{ch}(at)\cos(nt)\;dt.\end{aligned}$$

On en déduit que $\left(1+\dfrac{n^2}{a^2}\right)\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{ch}(at)\cos(nt)\;dt = (-1)^n\frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a}$ et donc que

$$\int_0^\pi \mathrm{ch}(at)\cos(nt)\;dt = (-1)^n\frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a}\times\frac{a^2}{n^2+a^2} = (-1)^n\frac{a\,\mathrm{sh}(a\pi)}{n^2+a^2}.$$

$$\boxed{\forall a\in\mathbb{R}^*,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^\pi \mathrm{ch}(at)\cos(nt)\;dt = (-1)^n\frac{a\,\mathrm{sh}(a\pi)}{n^2+a^2}.}$$

c) La fonction g_a est paire. Par suite, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n(g_a)=0$. Puis, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g_a(t)\cos(nt)\;dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{ch}(at)\cos(nt)\;dt = (-1)^n\frac{2a\,\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi(n^2+a^2)}.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ a_n(g_a) = (-1)^n\frac{2a\,\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi(n^2+a^2)} \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n(g_a)=0.}$$

d) Théorème de convergence simple d'une série de Fourier (théorème de Dirichlet).
Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, la série de Fourier de f en x converge et a pour somme $\dfrac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+))$. En particulier, si f est continue en x, la somme de la série de Fourier de f en x est $f(x)$.

Théorème de convergence normale d'une série de Fourier.
Soit f une fonction 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

La fonction g_a est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la série de FOURIER de g_a converge normalement et donc simplement vers g_a sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout réel t, on a

$$g_a(t) = \frac{a_0(g_a)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g_a)\cos(nt) = \frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi a} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{a\,\mathrm{sh}(a\pi)}{a^2+n^2}\cos(nt).$$

Quand $t=\pi$, on obtient en particulier

$$\mathrm{ch}(a\pi) = \frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi a} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{a\,\mathrm{sh}(a\pi)}{a^2+n^2}\times(-1)^n = \frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi a} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a\,\mathrm{sh}(a\pi)}{a^2+n^2}.$$

Comme $a \neq 0$, on a encore $\mathrm{sh}(a\pi) \neq 0$ et après division des deux membres par $\mathrm{sh}(a\pi)$, on obtient

$$\frac{1}{\mathrm{th}(a\pi)} - \frac{1}{\pi a} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}.$$

e) Soient alors $x \in \mathbb{R}^*$ puis $a = \dfrac{x}{\pi}(\neq 0)$. L'égalité précédente s'écrit maintenant

$$t(x) = \frac{1}{\mathrm{th}\,x} - \frac{1}{x} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{x}{\pi}}{\frac{x^2}{\pi^2}+n^2} = 2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+\pi^2n^2}.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+\pi^2n^2} = t(x).}$$

2) Etude d'une sétrie entière.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, posons $f_n(t) = \dfrac{1}{t^2+n^2\pi^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on a alors

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{n^2\pi^2}.$$

Comme la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2\pi^2}$ converge, on a montré que

$$\boxed{\text{la série de fonctions de somme } m \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}.}$$

b) • Théorème de comparaison série-intégrale : étant donné une fonction f continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles positives décroissante, la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$ est convergente. En particulier, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

• D'après le cours, pour $p \geq 2$, $\zeta(p)$ existe.

• Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^p}$ est continue, positive et décroissante sur $]0,+\infty[$, pour k entier naturel élément de $[\![2,n]\!]$, on a

$$\frac{1}{k^p} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^p} \leq \frac{1}{(k-1)^p}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p} \leq \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^p} \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)^p},$$

ou encore

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\right) - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t^p} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p}.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (n,p) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^2,\ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\right) - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t^p} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p}.}$$

Quand n tend vers $+\infty$ à p fixé, on obtient $\zeta(p) - 1 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^p} \leq \zeta(p)$ avec

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^p} = \left[-\frac{1}{(p-1)t^{p-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{p-1}.$$

Par suite, $\zeta(p) - 1 \leq \dfrac{1}{p-1} \leq \zeta(p)$. Comme d'autre part $\zeta(p) = 1 + \dfrac{1}{2^p} + \ldots \geq 1$, on a montré que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ 1 \leq \zeta(p) \leq 1 + \frac{1}{p-1}.}$$

Puisque $1 + \dfrac{1}{p-1}$ tend vers 1 quand p tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} \zeta(p) = 1.}$$

c) Soit $t \in]-\pi, \pi[$. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\alpha_{2k} t^{2k}\right| = \frac{\zeta(2k+2)|t|^{2k}}{\pi^{2k+2}} \leq \frac{\left(1 + \dfrac{1}{2k+1}\right)|t|^{2k}}{\pi^{2k+2}} \leq \frac{2|t|^{2k}}{\pi^{2k+2}} = \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{t^2}{\pi^2}\right)^k.$$

Puisque $t \in]-\pi, \pi[$, on a $0 \leq \dfrac{t^2}{\pi^2} < 1$ et la série géométrique de terme général $\dfrac{2}{\pi^2}\left(\dfrac{t^2}{\pi^2}\right)^k$ converge. On en déduit que la série de terme général $\alpha_{2k} t^{2k}$ converge absolument et donc converge.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \text{ de }]-\pi, \pi[, \text{ la série entière } \sum \alpha_{2k} t^{2k} \text{ converge.}}$$

d) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $t \in]-\pi, \pi[$.

$$\begin{aligned}
S_N(t) &= \sum_{k=0}^{N} \alpha_{2k} t^{2k} = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{(-1)^k t^{2k}}{\pi^{2k+2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k+2}}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k t^{2k}}{\pi^{2k+2}} \frac{1}{n^{2k+2}}\right) \text{ (somme d'un nombre fini de séries convergentes)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} \left(\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{-t^2}{\pi^2 n^2}\right)^k\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} \frac{1 - \left(\dfrac{-t^2}{\pi^2 n^2}\right)^{N+1}}{1 - \left(\dfrac{-t^2}{\pi^2 n^2}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^N \left(\dfrac{t^2}{\pi^2 n^2}\right)^{N+1}}{t^2 + n^2 \pi^2}.
\end{aligned}$$

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \forall t\in]-\pi,\pi[,\ S_N(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^N\left(\dfrac{t^2}{\pi^2n^2}\right)^{N+1}}{t^2+n^2\pi^2}.$$

Soient $N\in\mathbb{N}$ et $t\in]-\pi,\pi[$.

$$\begin{aligned}
|S_N(t)-m(t)| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^N\left(\dfrac{t^2}{\pi^2n^2}\right)^{N+1}}{t^2+n^2\pi^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{t^2+n^2\pi^2}\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^N\left(\dfrac{t^2}{\pi^2n^2}\right)^{N+1}}{t^2+n^2\pi^2}\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\dfrac{t^2}{\pi^2n^2}\right)^{N+1}}{t^2+n^2\pi^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{t^2}{\pi^2n^2}\right)^{N+1}\frac{1}{t^2+n^2\pi^2} \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{t^2}{\pi^2}\right)^{N+1}\frac{1}{t^2+n^2\pi^2} = \left(\frac{t^2}{\pi^2}\right)^{N+1} m(t).
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in]-\pi,\pi[,\ |S_N(t)-m(t)|\leq\left(\frac{t^2}{\pi^2}\right)^{N+1}m(t).$$

e) Soit $t\in]-\pi,\pi[$. On a toujours $0\leq\dfrac{t^2}{\pi^2}<1$ et donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\dfrac{t^2}{\pi^2}\right)^{N+1}m(t)=0$. On en déduit que $\lim\limits_{N\to+\infty}|S_N(t)-m(t)|=0$ et comme d'autre part, $\lim\limits_{N\to+\infty}S_N(t)=h(t)$, on a montré que

$$\forall t\in]-\pi,\pi[,\ h(t)=m(t).$$

3) Développement en série entière de f.

a) Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'origine à valeurs dans $\mathbb{R}$. f est développable en série entière si et seulement il existe $r>0$ et il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que : 1) f est définie sur $]-r,r[$, 2) la série entière $\sum a_nt^n$ converge sur $]-r,r[$, 3) $\forall t\in]-r,r[,\ f(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$.

b) D'après les questions B)1)e) et B)2)e), pour $x\in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$,

$$t(x)=2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+n^2\pi^2}=2xm(x)=2xh(x)=2x\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{2k}x^{2k}.$$

Puisque $t(0)=0$, les égalités précédentes sont encore valables pour $x=0$. On a montré que

$$\forall x\in]-\pi,\pi[,\ t(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}2\alpha_{2k}x^{2k+1}$$

et en particulier, la fonction t est développable en série entière en 0.

c) Soit $x\in]-2\pi,2\pi[$. Alors $\dfrac{x}{2}\in]-\pi,\pi[$, et d'après la question A)4)b) et la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1-\frac{x}{2}+f_1(x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}t\left(\frac{x}{2}\right)=1-\frac{x}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha_{2k}}{2^{2k+1}}x^{2k+2} \\
&= 1-\frac{x}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\zeta(2k+2)}{\pi^{2k+2}2^{2k+1}}x^{2k+2} \\
&= 1-\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\zeta(2n)}{\pi^{2n}2^{2n-1}}x^{2n}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall x \in]-2\pi, 2\pi[,\ f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n x^{2n} \text{ où } \beta_n = \dfrac{((-1)^{n-1}\zeta(2n)}{\pi^{2n}2^{2n-1}} \\ \text{et en particulier, la fonction } f \text{ est développable en série entière en } 0.\end{array}}$$

d) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, f est de classe C^∞ sur $]-\pi, \pi[$ en tant que fonction développable en série entière sur cet intervalle. Finalement

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

D'autre part, on sait que le coefficient de x^k dans le développement de ff en série entière est $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Donc, $f(0) = 1$, $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$ et enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(2n)}(0) = (2n)! \times \beta_n = \dfrac{((-1)^{n-1}(2n)!\zeta(2n)}{\pi^{2n}2^{2n-1}}$.

$$\boxed{f(0) = 1,\ f'(0) = -\frac{1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(2n+1)}(0) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(2n)}(0) = \frac{((-1)^{n-1}(2n)!\zeta(2n)}{\pi^{2n}2^{2n-1}}.}$$

e) D'après la question A)2)a), quand x tend vers 0, on a $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)$. On en déduit en particulier que $\dfrac{f''(0)}{2} = \dfrac{1}{12}$ et donc que $f''(0) = \dfrac{1}{6}$. D'autre part, $f''(0) = \dfrac{(-1)^0 \times 2! \times \zeta(2)}{\pi^2 \times 2^1}$. On en déduit que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

D'après la question A)5)e), on a aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

