

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

EXERCICE 1

1) a) Soit $P = X^3 - 2X^2 + X = X(X-1)^2$. On sait que les valeurs propres de u sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur de u . P est annulateur de u et les racines de P sont 0 et 1 et donc

si le réel λ est valeur propre de u , alors $\lambda \in \{0, 1\}$.

b) Les valeurs propres de U sont les valeurs propres de u et sont donc éléments de $\{0, 1\}$. Le polynôme caractéristique de U est donc l'un des quatre polynômes

$$-X^3 \text{ ou } -X^2(X-1) \text{ ou } -X(X-1)^2 \text{ ou } -(X-1)^3.$$

c) P_u est l'un des quatre polynômes $-X^3$ ou $-X^2(X-1)$ ou $-X(X-1)^2$ ou $-(X-1)^3$.

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^k par A s'écrit

$$X^k = X(X-1)^2 \times Q_k + a_k X^2 + b_k X + c_k, (*)$$

où Q_k est un polynôme et a_k, b_k et c_k sont des réels. En évaluant en 0 on obtient déjà $c_k = 0$ puis en évaluant en 1, on obtient $a_k + b_k = 1$. On dérive alors les deux membres de l'égalité (*) et on évalue en 1. On obtient $k \times 1^{k-1} = 0 + 2a_k + b_k$. Ainsi, on a $2a_k + b_k = k$ et $a_k + b_k = 1$ puis $a_k = k - 1$ (en retranchant membre à membre) et $b_k = 1 - a_k = 2 - k$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists Q_k \in \mathbb{R}[X] / X^k = X(X-1)^2 Q_k + (k-1)X^2 + (2-k)X$.

Puisque le polynôme $X(X-1)^2$ est annulateur de u , en évaluant en u , on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k = (k-1)u^2 + (2-k)u.$$

2) a) Puisque u est diagonalisable, il existe une base (e'_1, e'_2, e'_3) telle que pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, $u(e'_i) = \lambda_i e'_i$ avec $\lambda_i \in \{0, 1\}$. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, comme $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$, on a $\lambda_i^2 = \lambda_i$ et donc

$$u^2(e'_i) = \lambda_i^2 e'_i = \lambda_i e'_i = u(e'_i).$$

Ainsi, les endomorphismes u et u^2 coïncident sur une base de E et sont donc égaux. Finalement, u est un projecteur. On sait alors que $v = \text{id}_E - u$ est le projecteur associé et que dans ce cas, $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$, $\text{Im}(v) = \text{Ker}(u)$, $\text{Ker}(v) = \text{Im}(u)$ et donc que $\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v) = E$.

Si u est diagonalisable, u et v sont des projecteurs associés et $\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v) = E$.

b) U est alors semblable à l'une des quatre matrices

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) a) $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1 = X(X-2) + 1$ s'écrit encore $(X-1)^2 + X(2-X) = 1$.

$$(X-1)^2 + XB = 1 \text{ où } B = 2 - X.$$

b) En évaluant en u , on obtient

$$(u - \text{id}_E)^2 + (2\text{id}_E - u) \circ u = \text{id}_E.$$

c) L'égalité $u^3 - 2u^2 + u = 0$ s'écrit encore $u \circ (\text{id}_E - u)^2 = (\text{id}_E - u)^2 \circ u = 0$ et donc

$$u \circ v^2 = 0 \text{ et } v^2 \circ u = 0.$$

On en déduit déjà que $\text{Im}(v^2) \subset \text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v^2)$.

Montrons alors que $\text{Ker}(u) \subset \text{Im}(v^2)$. L'égalité de la question b) s'écrit encore $\text{id}_E = v^2 + (2\text{id}_E - u)$ (**). Si maintenant x est un élément de $\text{Ker}(u)$, alors $u(x) = 0$ et en évaluant l'égalité (**) en x , on obtient

$$x = v^2(x) + 0 = v^2(x),$$

ce qui montre que x est dans $\text{Im}(v^2)$. Ainsi, $\text{Ker}(u) \subset \text{Im}(v^2)$ et finalement $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v^2)$. Mais alors

$$\dim(\text{Im}(u)) = 3 - \dim(\text{Ker}(u)) = 3 - \dim(\text{Im}(v^2)) = \dim(\text{Ker}(v^2)),$$

et comme $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v^2)$, on a finalement $\text{Ker}(v^2) = \text{Im}(u)$.

$$\text{Ker}(v^2) = \text{Im}(u) \text{ et } \text{Ker}(u) = \text{Im}(v^2).$$

d) Montrons que $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}((u - \text{id}_E)^2) = \{0\}$. Soit $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$. On a donc $u^2(x) - 2u(x) + x = 0$ et $u(x) = 0$. Mais alors

$$x = 2u(x) - u(u(x)) = 0,$$

et donc $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}((u - \text{id}_E)^2) = \{0\}$. D'autre part, d'après la question c) et le théorème du rang, on a

$$\dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Ker}(v^2)) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(E).$$

En résumé, $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}((u - \text{id}_E)^2) = \{0\}$ et $\dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)) = \dim(E)$ et on a donc montré que

$$E = \text{Ker}(u) + \text{Ker}((u - \text{id}_E)^2).$$

4) a) et b) D'après la question 3)d), on a $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(v^2)$. Comme $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$, on a

$$\dim(\text{Ker}(v^2)) = 2.$$

Soit $x \in E$. Si $x \in \text{Ker}(v)$, alors $v(x) = 0$ puis $v(v(x)) = 0$ et donc $x \in \text{Ker}(v^2)$. Ainsi,

$$\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(v^2).$$

Mais alors, $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v^2) = \{0\}$ et la somme $\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)$ est directe. On en déduit que $\dim(\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)) = 1 + 1 = 2$.

$$\dim(\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)) = 2.$$

c) Soit e_1 un vecteur non nul de $\text{Ker}(u)$. Par suite, puisque $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$, (e_1) est une base de $\text{Ker}(u)$ et

$$u(e_1) = 0.$$

Soient ensuite e_3 un vecteur de $\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$ non dans $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ puis $e_2 = (u - \text{id}_E)(e_3)$. Comme $(u - \text{id}_E)(e_2) = (u - \text{id}_E)^2(e_3) = 0$, e_2 est un élément de $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et vérifie donc

$$u(e_2) = e_2.$$

De plus, $e_2 \neq 0$ car $e_3 \notin \text{Ker}(u - \text{id}_E)$. D'autre part, puisque $e_2 = (u - \text{id}_E)(e_3)$, on a encore

$$u(e_3) = e_2 + e_3.$$

Vérifions que (e_2, e_3) est une base de $\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$. Déjà e_2 est élément de $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et donc de $\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$ d'après la question précédente. e_2 et e_3 sont donc deux vecteurs de $\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$. Ensuite, $\text{card}((e_2, e_3)) = 2 = \dim(\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2))$ et pour vérifier que (e_2, e_3) est une base de $\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$, il suffit de vérifier que cette famille est libre.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \lambda e_2 + \mu e_3 = 0 &\Rightarrow (u - \text{id}_E)(\lambda e_2 + \mu e_3) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda \cdot 0 + \mu e_2 = 0 \Rightarrow \mu = 0 \text{ (car } e_2 \neq 0). \end{aligned}$$

L'égalité $\lambda e_2 + \mu e_3 = 0$ s'écrit alors $\lambda e_2 = 0$ et impose $\lambda = 0$ puisque $e_2 \neq 0$. Ainsi, la famille (e_2, e_3) est libre et est donc une base de $\text{Ker}(u - \text{id}_E)^2$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Puisque (e_1) est une base de $\text{Ker}(u)$, (e_2, e_3) est une base de $\text{Ker}(u - \text{id}_E)^2$ et que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$, \mathcal{B} est une base de E et par construction

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) a) **Premier exemple.** Calculons tout d'abord $U^3 - 2U^2 + U = U(U - I_3)^2$.

$$U(U - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant

$$\chi_U = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2 - 1 + 1) - (X - 1 + 1) + (-1 + 1 + X) = -X^2(X - 1).$$

En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de U , on note que $C_1 \neq 0$ et que C_2 et C_3 sont colinéaires à C_1 . Par suite, $\text{rg}(U) = 1$. Mais alors $\dim(\text{Ker}(U)) = 3 - \text{rg}(U) = 2$ et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. U est donc diagonalisable. D'après la question 2), U est semblable à l'une des quatre matrices D_0, D_1, D_2, D_3 et plus précisément ici, puisque $\text{rg}(U) = 1$,

$$U \text{ est semblable à la matrice } D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Calculons $U^3 - 2U^2 + U = U(U - I_3)^2$.

$$\begin{aligned} U(U - I_3)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\chi_U = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 \\ 1-X & -X & -1 \\ 0 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = -X(X^2 - 2X + 1) = -X(X - 1)^2.$$

Maintenant en notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice $U - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires donc $\text{rg}(U - I_3) \geq 2$ et C_2 et C_3 sont colinéaires et donc $\text{rg}(U - I_3) = 2$. Mais alors, $\dim(\text{Ker}(U - I_3)) = 1$ et on est dans la situation de la question 4). Dans ce cas,

$$U \text{ est semblable à la matrice } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 2

1) a) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in D_t \cap \Gamma &\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ x^3 + t^3x^3 - 3tx^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ x^2((1+t^3)x - 3t) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = 0 \text{ ou } \begin{cases} y = tx \\ (1+t^3)x = 3t \end{cases}. \end{aligned}$$

• **1 er cas.** Si $t = -1$, l'équation $(1+t^3)x = 3t$ n'a pas de solution. Ainsi,

$$D_{-1} \cap \Gamma = \{(0, 0)\}.$$

• **2 ème cas.** Si $t \neq -1$, $1+t^3 \neq 0$ et donc

$$M \in D_t \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}.$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, D_t \cap \Gamma = \{(0, 0), \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)\}.$$

On note enfin que si $t = 0$, les deux points précédents sont confondus.

b) Le plan est la réunion des droites D_t , $t \in \mathbb{R}$ et de l'axe (Oy) .

Il reste à étudier l'intersection de Γ avec l'axe (Oy) . Mais $\begin{cases} x = 0 \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$ ce qui montre que $\Gamma \cap (Oy) = \{(0, 0)\}$. Ce dernier résultat et le résultat de la question a) permet d'affirmer que $\Gamma = \{\varphi(t), t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\} \cup \{(0, 0)\} = \Phi \cup \{(0, 0)\}$. Comme d'autre part, $\varphi(0) = (0, 0)$, $\Phi \cup \{(0, 0)\} = \Phi$ et on a montré que

$$\Gamma = \Phi.$$

c) • **Symétries.** Soit $t \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$. Alors $\frac{1}{t} \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$ et

$$\varphi\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{3/t}{1+1/t^3}, \frac{3/t^2}{1+1/t^3}\right) = \left(\frac{3t^2}{1+t^3}, \frac{3t}{1+t^3}\right) = (\beta(t), \alpha(t)) = s_\Delta(\varphi(t)),$$

où Δ est la droite d'équation $y = x$. Maintenant, quand t décrit $]0, 1]$, $\frac{1}{t}$ décrit $[1, +\infty[$ et la portion de Φ correspondant à $t \in [1, +\infty[$ est la symétrique par rapport à Δ de la portion de Φ correspondant à $t \in]0, 1]$. De même, la portion de Φ correspondant à $t \in]-\infty, -1[$ est la symétrique par rapport à Δ de la portion de Φ correspondant à $t \in]-1, 0[$. Puisque d'autre part, $\varphi(0) = (0, 0)$ est son propre symétrique, il suffit d'étudier et de construire Φ sur $] -1, 1]$, la courbe complète étant ensuite obtenue par réflexion d'axe Δ .

• **Variations conjointes de α et β sur $] -1, 1]$.**

Les fonctions α et β sont dérivables sur $] -1, 1]$ et pour $t \in] -1, 1]$,

$$\alpha'(t) = \frac{3((1+t^3) - t(3t^2))}{(1+t^3)^2} = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \text{ et } \beta'(t) = \frac{3(2t(1+t^3) - t^2(3t^2))}{(1+t^3)^2} = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

Pour $t \in]-1, 1]$, $(1+t^3)^2 > 0$ et $1-2t^3$ est du signe de $-\left(t - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. Donc $\alpha'(t)$ est du signe de $t - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. De même, $2-t^3 > 0$ et $\beta'(t)$ est du signe de t . On en déduit le tableau des variations conjointes des fonctions α et β sur l'intervalle $] -1, 1]$.

t	-1	0	$1/\sqrt[3]{2}$	1
α'		+	0	-
α	$-\infty$	\nearrow	$\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2}$	\searrow $\frac{3}{2}$
β	$+\infty$	\searrow 0	\nearrow $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	\nearrow $\frac{3}{2}$
β'	-	0	+	

• **Etude quand t tend vers -1 par valeurs supérieures.** On a déjà $\lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} \alpha(t) = -\infty$ et $\lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} \beta(t) = +\infty$. De plus, puisque pour $t \in]-1, 1]$, on a $\beta(t) = t\alpha(t)$, on a

$$\lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} = \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} t = -1.$$

Ensuite, pour $t \in]-1, 1]$,

$$\beta(t) - (-\alpha(t)) = \frac{3t^2}{1+t^3} + \frac{3t}{1+t^3} = \frac{3t(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{3t}{t^2-t+1}.$$

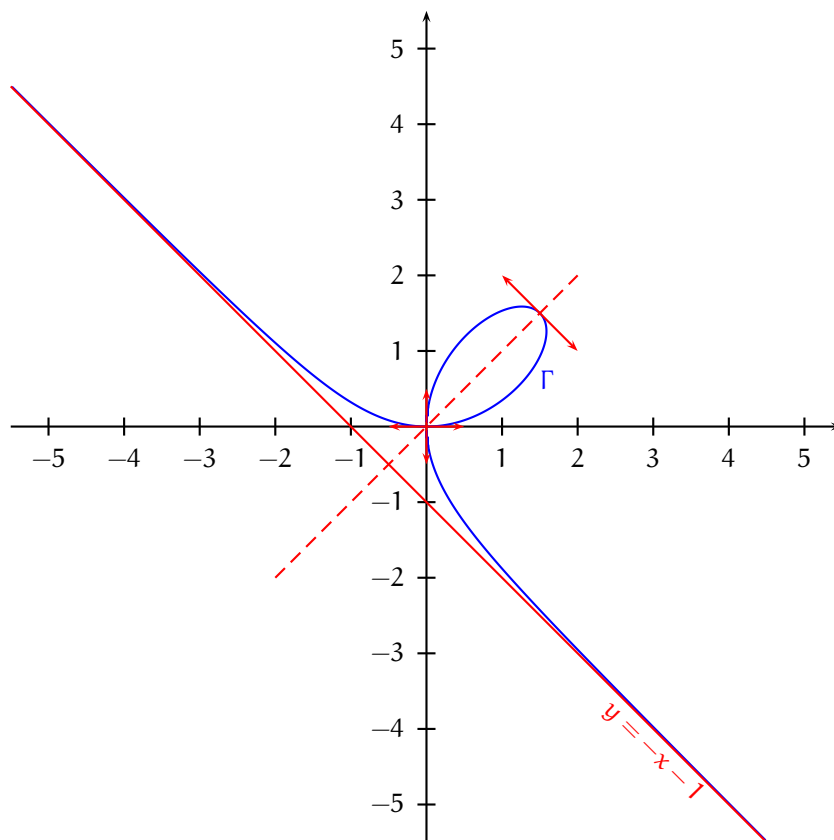
On en déduit que $\lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} (\beta(t) + \alpha(t)) = \frac{-3}{3} = -1$ et donc que la droite D d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à Γ quand t tend vers -1 par valeurs supérieures. Enfin, pour $t \in]-1, 1]$,

$$\beta(t) - (-\alpha(t) - 1) = \frac{3t}{t^2-t+1} + 1 = \frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1} = \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} > 0.$$

Ainsi, la portion de Γ obtenue quand t décrit $] -1, 1]$ est strictement au-dessus de D.

- **Etude pour $t = 0$.** On a $\frac{d\vec{\varphi}}{dt}(0) = (3, 0)$ et la tangente au point $\varphi(0) = (0, 0)$ est dirigée par le vecteur e_1 .
- **Etude pour $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.** On a $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \left(\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. De plus, $\alpha'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 0$ et $\beta'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \neq 0$. Donc la tangente en $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ est dirigée par e_2 .
- **Etude pour $t = 1$.** On a $\varphi(1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ puis $\varphi'(1) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$. La tangente au point $\varphi(1)$ a donc un coefficient directeur égal à -1.

d) Tracé de Γ .



e) Soit M un point du plan dont les coordonnées cartésiennes sont notées (x, y) et un couple de coordonnées polaires est noté $[r, \theta]$.

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ &\Leftrightarrow r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta - 3r^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) - 3 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow r = \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \text{ (car } \theta = 0 \text{ par exemple refournit } r = 0) \end{aligned}$$

On note alors que la fonction r est 2π -périodique puis que pour $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta + \sin^3 \theta = 0 &\Leftrightarrow (\cos \theta)^3 = (-\sin \theta)^3 \Leftrightarrow \cos \theta = -\sin \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = \theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = -\theta - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{7\pi}{4}. \end{aligned}$$

Une représentation polaire de Γ est $r = \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$, $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$.

f) On a déjà vu que Γ était symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2) a) Γ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de S tels que $z = 0$ ou encore

$\Gamma = S \cap (\text{Oxy}).$

b) Travaillons plutôt en dimension 2 dans le plan (xOy).

Soit $M(x, y)$ un point du plan (xOy). Un vecteur normal à la droite Δ est le vecteur $\vec{n} = (1, -1)$. Le projeté orthogonal de M sur Δ est de la forme $M + \lambda \vec{n} = (x + \lambda, y - \lambda)$. De plus

$$(x + \lambda, y - \lambda) \in \Delta \Leftrightarrow x + \lambda = y - \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{y - x}{2}.$$

Dans ce cas, $(x + \lambda, y - \lambda) = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x + y}{2}\right)$.

Le projeté orthogonal de $M = (x, y, 0)$ sur Δ est le point $p_{\Delta}(M) = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x + y}{2}, 0\right)$.

Par suite, en posant $\lambda = \frac{x + y}{2}$,

$$d(M, \Delta) = Mp_{\Delta}(M) = \|(x + \lambda, y - \lambda, 0) - (x, y, 0)\| = |\lambda| \times \|(1, -1, 0)\| = \frac{|x + y|}{2} \times \sqrt{2} = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}}.$$

Si $M = (x, y, 0)$, $d(M, \Delta) = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}}$.

c) Le projeté orthogonal de M sur Δ est $p_{\Delta}(M) = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x + y}{2}, 0\right)$ et le projeté orthogonal de N sur Δ , qui est encore le projeté orthogonal de $(X, Y, 0)$ sur Δ , est $p_{\Delta}(N) = \left(\frac{X + Y}{2}, \frac{X + Y}{2}, 0\right)$. Par suite

$$\begin{aligned} \begin{cases} P_{\Delta}(M) = p_{\Delta}(N) \\ OM = ON \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = X + Y \\ x^2 + y^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = X + Y \\ (x + y)^2 - 2xy = X^2 + Y^2 + Z^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = X + Y \\ xy = \frac{1}{2}((X + Y)^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = X + Y \\ xy = \frac{1}{2}(2XY - Z^2) \end{cases} \end{aligned}$$

Maintenant, $x^3 + y^3 - 3xy = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3xy = (x + y)^3 - 3xy(x + y + 1)$ et donc

$$\begin{aligned} N \in \Sigma &\Leftrightarrow \exists M \in \Gamma / \begin{cases} p_{\Delta}(N) = p_{\Delta}(M) \\ ON = OM \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ X + Y = x + y \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x + y = X + Y \\ xy = \frac{1}{2}(2XY - Z^2) \\ (x + y)^3 - 3xy(x + y + 1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} (X + Y)^3 - \frac{3}{2}(2XY - Z^2)(X + Y + 1) = 0 \\ x + y = X + Y \\ xy = \frac{1}{2}(2XY - Z^2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(X + Y)^3 - 3(2XY - Z^2)(X + Y + 1) = 0 \\ \text{L'équation } \alpha^2 - (X + Y)\alpha + \frac{1}{2}(2XY - Z^2) = 0 \text{ d'inconnue } \alpha \text{ a deux solutions réelles} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(X + Y)^3 - 3(2XY - Z^2)(X + Y + 1) = 0 \\ (X + Y)^2 - 2(2XY - Z^2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(X + Y)^3 - 3(2XY - Z^2)(X + Y + 1) = 0 \\ (X - Y)^2 + 2Z^2 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 2(X + Y)^3 - 3(2XY - Z^2)(X + Y + 1) = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de Σ est $2(x + y)^3 - 3(2xy - z^2)(x + y + 1) = 0$.

d) Soit $M = (x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ un point de S .

Puisque F est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , on sait qu'une équation du plan tangent à S en M_0 est

$$z = z_0 + \frac{\partial F}{\partial x}((x_0, y_0))(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}((x_0, y_0))(y - y_0) = (x_0^3 + y_0^3 - 3x_0y_0) + 3(x_0^2 - y_0)(x - x_0) + 3(y_0^2 - x_0)(y - y_0) \\ = 3(x_0^2 - y_0)x + 3(y_0^2 - x_0)y - 2x_0^3 - 2y_0^3 + 3x_0y_0.$$

Une équation du plan P_0 tangent à S en $M_0 = (x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ est
 $z = 3(x_0^2 - y_0)x + 3(y_0^2 - x_0)y - 2x_0^3 - 2y_0^3 + 3x_0y_0.$

De plus,

$$P_0 \parallel (xOy) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - y_0 = 0 \\ y_0^2 - x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0^2 \\ x_0^4 - x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = 0 \text{ ou } x_0 = y_0 = 1 \Leftrightarrow M_0 = (0, 0, 0) \text{ ou } M_0 = (1, 1, -1).$$

P_0 est horizontal si et seulement si $M_0 = (0, 0, 0)$ ou $M_0 = (1, 1, -1)$.

EXERCICE 3

1) a) Rappelons le **théorème de dérivation sous le signe somme (formule de LEIBNIZ)**.

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} et $f : (x, t) \mapsto f((x, t))$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$ et dérivable par rapport à x . On suppose que :

- pour tout x de I , les fonctions $t \mapsto f((x, t))$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}((x, t))$ sont continues par morceaux et intégrables sur J ;
- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}((x, t))$ est continue;
- il existe une fonction positive φ , continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout élément (x, t) de $I \times J$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}((x, t)) \right| \leq \varphi(t).$$

Alors, la fonction $g : x \mapsto \int_J f((x, t)) dt$ est de classe C^1 sur I et

$$\forall x \in I, g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}((x, t)) dt.$$

Soit alors a un réel strictement positif donné. Considérons $f : [-a, a] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ (ainsi, $I = [-a, a]$ et $J = [0, \frac{\pi}{2}]$). f admet sur $[-a, a] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ une dérivée partielle par rapport à x et pour $((x, t)) \in [-a, a] \times [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}((x, t)) = \sin(t)e^{x \sin(t)}.$$

- pour tout réel $x \in [-a, a]$, les fonctions $t \mapsto e^{x \sin(t)}$ et $t \mapsto \sin(t)e^{x \sin(t)}$ sont continues sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ et en particulier

- continues par morceaux et intégrables sur ce segment ;
- pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $x \mapsto \sin(t)e^{x \sin(t)}$ est continue sur $[-a, a]$;
- pour $(x, t) \in [-a, a] \times [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}((x, t)) \right| = |\sin(t)|e^{x \sin(t)} \leq |\sin(t)|e^{|x \sin(t)|} \leq e^a = \varphi(t),$$

où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (car constante).

D'après le théorème de LEIBNIZ, pour tout réel $a > 0$ g est de classe C^1 sur $[-a, a]$ et donc g est de classe C^1 sur \mathbb{R} . De plus, la dérivée de g s'obtient par dérivation sous le signe somme.

g est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(t)e^{x \sin(t)} dt.$

b) La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car deux fois dérivable et de dérivée seconde négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ ($\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], -\sin(t) \leq 0$). On sait alors que son graphe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ est au-dessous de sa tangente en $(0, 0)$ et au-dessus de la corde joignant les points $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$. On a montré que

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], t \geq \sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}.$$

c) Soit $x \in]-\infty, 0[$. Pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ et donc $e^{x \sin(t)} \leq e^{2tx/\pi}$. Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x \sin(t)} dt \leq \int_0^{\pi/2} 2e^{2tx/\pi} dt = \left[\frac{\pi}{2x} e^{2tx/\pi} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2x} (e^{2x} - 1).$$

Soit $x \in]0, +\infty[$. Pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ et donc $e^{x \sin(t)} \geq e^{2tx/\pi}$. Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x \sin(t)} dt \geq \int_0^{\pi/2} 2e^{2tx/\pi} dt \frac{\pi}{2x} (e^x - 1) \leq \frac{\pi e^x}{2x}.$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[, g(x) \leq \frac{\pi e^x}{2x} \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, g(x) \geq \frac{\pi}{2x} (e^{2x} - 1).$$

d) • **Etude en $-\infty$.** Pour $x < 0$, on a $0 \leq g(x) \leq \frac{\pi e^x}{2x}$ et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi e^x}{2x} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

• **Etude en $+\infty$.** Pour $x > 0$, on a $\frac{g(x)}{x} \geq \frac{\pi e^x}{2x^2}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi e^x}{2x^2} = +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ et en particulier, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

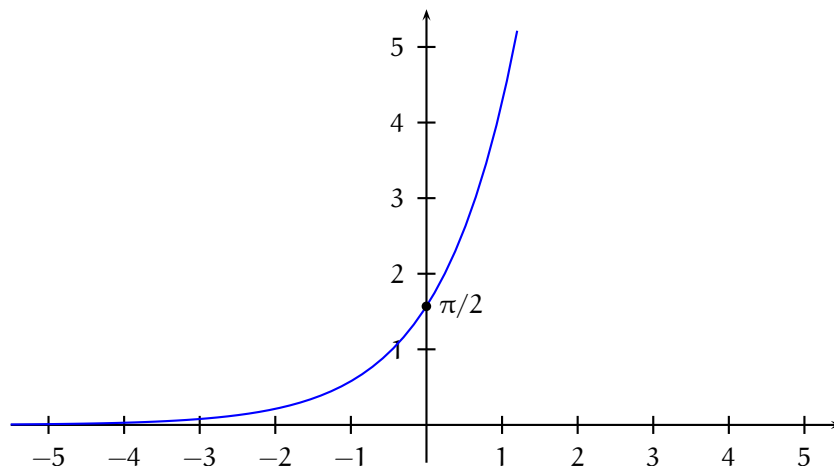
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty.$$

e) Pour tout réel x et tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(t)e^{x \sin(t)} \geq 0$. Par suite, pour tout réel x , on a

$$g'(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(t)e^{x \sin(t)} dt \geq 0.$$

g est donc croissante sur \mathbb{R} .

Allure du graphe de g .



2) a) Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Pour tout réel x , on a

$$f(x, t) = e^{x \sin(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{n!} x^n.$$

b) **Théorème d'intégration terme à terme.** Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , définies, continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I de \mathbb{R} . On suppose que la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers une fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, continue par morceaux sur I .

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)| dt < +\infty$, alors

- la série numérique de terme général $\int_I f_n(t) dt$ converge;
- f est intégrable sur I ;
- $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $t \in I = [0, \frac{\pi}{2}]$, posons $f_n(t) = \frac{\sin^n t x^n}{n!}$. La série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers la fonction $t \mapsto e^{x \sin(t)}$ qui est continue par morceaux sur I . De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)| dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \frac{\pi}{2} e^{|x|} < +\infty.$$

D'après un théorème d'intégration terme à terme, la série numérique de terme général $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n t x^n}{n!} dt$ converge et de plus

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x \sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^n t x^n}{n!} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt.$$

Ainsi, la fonction g est développable en série entière sur \mathbb{R} et de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{W_n}{n!} = \frac{1}{n!} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt.$$

c) Comme à la question 1)a), g' est de classe C^1 sur \mathbb{R} d'après le théorème de LEIBNIZ ou encore g est de classe C^2 sur \mathbb{R} et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g''(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial x} (\sin(t) e^{x \sin(t)}) dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) e^{x \sin(t)} dt.$$

Par suite, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x(g''(x) - g(x)) = x \int_0^{\pi/2} (\sin^2(t) - 1) e^{x \sin(t)} dt = x \int_0^{\pi/2} -\cos^2(t) e^{x \sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} (-\cos(t)) \times (x \cos(t) e^{x \sin(t)}) dt.$$

Maintenant, les deux fonctions $t \mapsto -\cos(t)$ et $t \mapsto e^{x \sin(t)}$ sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} x(g''(x) - g(x)) &= \int_0^{\pi/2} (-\cos(t)) \times (x \cos(t) e^{x \sin(t)}) dt \\ &= \left[-\cos(t) e^{x \sin(t)} dt \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(t) e^{x \sin(t)} dt \\ &= 1 - g'(x). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}, x(g''(x) - g(x)) + g'(x) = 1.$$

d) On sait que la somme d'une série entière est indéfiniment dérivable sur son intervalle ouvert de convergence et que les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Par suite, pour x réel,

$$\begin{aligned} x(g''(x) - g(x)) + g'(x) &= x \left(\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1) + n)a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \frac{W_n}{n!} x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{W_n}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{W_n}{(n-1)!} x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{W_n}{n!} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{W_{n+1}}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{W_{n-1}}{(n-1)!} x^n = W_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)W_{n+1} - nW_{n-1}}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, x(g''(x) - g(x)) + g'(x) = 1 &\Rightarrow W_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1)W_{n+1} - nW_{n-1}}{n!} \\ &\Rightarrow W_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}. \end{aligned}$$

On a montré que

$$W_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}.$$

Retrouvons ce résultat à l'aide d'une intégration par parties.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux fonctions $t \mapsto -\cos(t)$ et $t \mapsto \sin^n(t)$ sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin(t) \sin^n(t) dt \\ &= [-\cos(t) \sin^n(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos(t)) \times (n \cos(t) \sin^{n-1}(t)) dt = n \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^{n-1}(t) dt \\ &= n \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t)) \sin^{n-1}(t) dt = n(W_{n-1} - W_{n+1}). \end{aligned}$$

Ainsi, $W_{n+1} = n(W_{n-1} - W_{n+1})$ puis $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$ et finalement on retrouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}.$$

e) Soit $h(x) = \sum b_n x^n$ une série entière dont le rayon R est supposé a priori strictement positif. Pour $x \in]-R, R[$, on a

$$\begin{aligned} x(g''(x) - g(x)) + g'(x) &= x \left(\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)b_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 b_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} x^n = b_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^2 b_{n+1} - b_{n-1}) x^n \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on a alors

$$\begin{aligned}
 & \text{h solution de (E) sur }]-\mathbb{R}, \mathbb{R}[\Leftrightarrow \forall x \in]-\mathbb{R}, \mathbb{R}[, b_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^2 b_{n+1} - b_{n-1}) x^n = 1 \\
 & \Leftrightarrow b_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^2 b_{n+1} - b_{n-1} = 0 \\
 & \Leftrightarrow b_1 = 1 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*, b_{2p} = \frac{1}{(2p)^2} \times \frac{1}{(2(p-1))^2} \times \dots \times \frac{1}{(2 \times 1)^2} \times b_0 \\
 & \text{et } \forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(2p+1)^2} \times \frac{1}{(2p-1)^2} \times \dots \times \frac{1}{3^2} \times b_1 \\
 & \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, b_{2p} = \frac{1}{2^{2p} (p!)^2} b_0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, b_{2p+1} = \frac{((2p) \times (2(p-1)) \times \dots \times 2)^2}{((2p+1) \times (2p) \times (2p-1) \times \dots \times 3 \times 2)^2} \\
 & \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, b_{2p} = \frac{1}{2^{2p} (p!)^2} b_0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, b_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{((2p+1)!)^2}.
 \end{aligned}$$

En résumé, sous l'hypothèse $R > 0$,

$$\text{h est solution de (E) sur }]-\mathbb{R}, \mathbb{R}[\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, b_{2p} = \frac{1}{2^{2p} (p!)^2} b_0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, b_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{((2p+1)!)^2}.$$

Il reste à déterminer le rayon de convergence des séries entières obtenues. Tout d'abord, pour tout réel x et tout entier naturel p ,

$$|b_{2p} x^{2p}| = |b_0| \frac{1}{2^{2p} (p!)^2} x^{2p} \leq |b_0| \frac{(x^2)^p}{p!}.$$

Comme la série de terme général $|b_0| \frac{(x^2)^p}{p!}$ est une série convergente (de somme $|b_0| e^{x^2}$), la série de terme général $b_{2p} x^{2p}$ converge pour tout réel x (et tout choix de b_0).

Soit maintenant un réel x non nul donné. Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{b_{2p+1} x^{2p+1}}{b_{2p-1} x^{2p-1}} \right| = \frac{2^{2p+2}}{2^{2p}} \times \frac{((p+1)!)^2}{(p!)^2} \times \frac{((2p-1)!)^2}{((2p+1)!)^2} \times x^2 = \frac{4x^2 (p+1)^2}{(2p(2p+1))^2} = \frac{x^2 (p+1)^2}{p^2 (2p+1)^2}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. La règle de d'ALEMBERT permet alors d'affirmer que la série de terme général $b_{2p} x^{2p}$ converge pour tout réel x . Finalement, toutes les séries entières obtenues ont un rayon de convergence infini ce qui valide les calculs précédents sur \mathbb{R} .

Les solutions de (E) développables en série entière sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2p} (p!)^2} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p} (p!)^2}{((2p+1)!)^2} x^{2p+1}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Parmi ces solutions, g est la solution telle que $g(0) = a_0 = \frac{W_0}{0!} = \frac{\pi}{2}$. Comme $h(0) = \lambda$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2p} (p!)^2} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p} (p!)^2}{((2p+1)!)^2} x^{2p+1}.$$

f) Sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* , l'équation (E) s'écrit encore

$$y'' + \frac{1}{x} y' - y = \frac{1}{x}.$$

Comme les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto -1$ sont continues sur \mathbb{R}_+^* , on sait que les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* sont de la forme

$$x \mapsto f_0 + \lambda f_1 + \mu f_2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

où f_0 est une solution particulière de (E) sur \mathbb{R}_+^* et f_1 et f_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée $xy'' + y' - xy = 0$.

3) Soient $a < 0$ puis $x \in [a, 0]$. Pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\frac{2t}{\pi} \leq \sin(t) \leq t,$$

et donc

$$e^{xt} \leq e^{x \sin(t)} \leq e^{2xt/\pi} \text{ (puisque } x \leq 0\text{)}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$\int_0^{\pi/2} e^{xt} dt \leq g(x) \leq \int_0^{\pi/2} e^{2xt/\pi} dt,$$

et donc

$$\forall x \in [a, 0[, \frac{e^{\pi x/2} - 1}{x} \leq g(x) \leq \frac{\pi e^x - 1}{2x}.$$

Maintenant, les deux membres extrêmes de cet encadrement sont des fonctions intégrables sur $[a, 0[$ car continues sur $[a, 0[$ et prolongeables par continuité en 0 (ces deux fonctions tendent vers $\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers 0). Par intégration, on obtient

$$\forall a \in]-\infty, 0[, \int_a^0 \frac{e^{\pi x/2} - 1}{x} dx \leq \int_a^0 g(x) dx \leq \frac{\pi}{2} \int_a^0 \frac{e^x - 1}{x} dx.$$

Maintenant, la fonction g est (continue et) positive sur $] -\infty, 0]$. Par suite, g est intégrable sur $] -\infty, 0]$ si et seulement si la fonction $a \mapsto \int_a^0 g(x) dx$ est majorée sur \mathbb{R}^- .

Mais la fonction $x \mapsto \frac{\pi e^x - 1}{2x} = \frac{1 - e^{-x}}{-x}$ est continue et positive sur $] -\infty, 0]$, prolongeable par continuité en 0 et négligeable en $-\infty$ devant $\frac{1}{x^2}$ d'après les théorèmes de croissances comparées. On en déduit que la fonction $x \mapsto \frac{\pi e^x - 1}{2x}$ est intégrable sur $] -\infty, 0]$ puis que

$$\forall a < 0, \int_a^0 g(x) dx \leq \frac{\pi}{2} \int_a^0 \frac{e^x - 1}{x} dx \leq \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{e^x - 1}{x} dx < +\infty,$$

et donc

$$g \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^-.$$

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi_x : t \mapsto f((x, t)) = e^{x \sin(t)}$ est 2π -périodique et de classe C^1 sur \mathbb{R} . D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de la fonction φ_x converge simplement (et même normalement) sur \mathbb{R} vers la fonction φ_x .

b) Pour $k \in \mathbb{Z}$, $d_k(x)$ est le coefficient de Fourier complexe d'indice k de la fonction φ_x . Puisque la fonction φ_x est 2π -périodique et continue par morceaux sur \mathbb{R} , la formule de Parseval nous permet d'écrire

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |d_k(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi_x(t)|^2 dt.$$

c) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Pour $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(x, t)e^{-ikt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^n(t)x^n e^{-ikt}}{n!}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$\left| \frac{\sin^n(t)x^n e^{-ikt}}{n!} \right| \leq \frac{|x|^n}{n!}.$$

Comme la série numérique de terme général $\frac{|x|^n}{n!}$ converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $t \mapsto \frac{\sin^n(t)x^n e^{-ikt}}{n!}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. On peut donc intégrer terme à terme et on obtient

$$d_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^n(t)x^n}{n!} \right) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^{2\pi} \sin^n(t) e^{-ikt} dt.$$

d) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} (2i)^n \int_0^{2\pi} \sin^n(t) e^{-ikt} dt &= \int_0^{2\pi} (e^{it} - e^{-it})^n e^{-ikt} dt \\ &= \sum_{p=0}^n C_n^p \int_0^{2\pi} (e^{it})^p (e^{-it})^{n-p} e^{-ikt} dt = \sum_{p=0}^n C_n^p \int_0^{2\pi} e^{i(2p-k-n)t} dt. \end{aligned}$$

Or, $\int_0^{2\pi} e^{i(2p-k-n)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 2p - n \\ 2\pi & \text{si } k = 2p - n \end{cases}$. Donc,

1er cas. Si k n'est pas élément de $\{-n, -(n-2), -(n-4), \dots, n-4, n-2, n\}$, toutes les intégrales $\int_0^{2\pi} e^{i(2p-k-n)t} dt$ sont nulles et dans ce cas, $\int_0^{2\pi} \sin^n(t) e^{-ikt} dt = 0$.

2ème cas. Si $k \in \{-n, -(n-2), -(n-4), \dots, n-4, n-2, n\}$, on peut poser $k = 2p_0 - n$ pour un certain $p_0 \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a alors

$$\int_0^{2\pi} \sin^n(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{p=0}^n C_n^p \int_0^{2\pi} e^{i((n-k)-2p)t} dt = \frac{C_n^{p_0}}{(2i)^n} \int_0^{2\pi} e^{i(2p_0-n-k)t} dt = \frac{2\pi C_n^{p_0}}{(2i)^n}.$$

Déterminons alors une expression de $d_k(x)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}$ donné,

$$\int_0^{2\pi} \sin^n(t) e^{-ikt} dt \neq 0 \Leftrightarrow \exists p \in \llbracket 0, n \rrbracket / n = 2p - k (*).$$

La condition (*) impose $-k \leq n \leq 2n - k$ et donc $n \geq k$. La condition (*) impose aussi à n d'avoir la parité de k ce qui montre que n est de la forme $k + 2m$, $m \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, si $n = k + 2m$, $m \in \mathbb{N}$, alors $p = \frac{n+k}{2} = k+m$ est un entier naturel vérifiant $0 \leq p = k+m \leq k+2m = n$ et donc (*) est vérifiée.

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d_k(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^{2\pi} \sin^n(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{k+2m}}{(k+2m)!} \int_0^{2\pi} \sin^{k+2m}(t) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{k+2m}}{(k+2m)!} \frac{2\pi C_{k+2m}^{k+m}}{(2i)^{k+2m}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{k+2m}}{(k+m)! m! (2i)^{k+2m}}. \end{aligned}$$

Si maintenant $k \in \mathbb{Z}^*$,

$$d_k(x) = \overline{d_{-k}(x)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{-k+2m}}{(-k+m)! m! (-2i)^{-k+2m}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Si } k \in \mathbb{Z}^+, d_k(x) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!(k+m)!} \left(\frac{x}{2i} \right)^{k+2m}, \\ \text{Si } k \in \mathbb{Z}^-, d_k(x) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!(-k+m)!} \left(\frac{-x}{2i} \right)^{-k+2m}. \end{aligned}$$