

## Epreuve de Mathématiques A PSI

## Questions de cours.

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Le rang de  $A$  est la dimension du sous-espace de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  engendré par les colonnes de  $A$ .
2. Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $E$  étant de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Tout supplémentaire de  $\text{Ker}(f)$  dans  $E$  est isomorphe à  $\text{Im}(f)$  et donc  $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$ .
3. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de format  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
 $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ .  
Deux matrices semblables ont en particulier même rang mais deux matrices ayant même rang ne sont pas nécessairement semblables.
4. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  (resp.  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ). Un polynôme annulateur de  $f$  (resp. de  $A$ ) est un polynôme  $P$  tel que  $P(f) = 0$  (resp.  $P(A) = 0$ ).

## Problème.

## Partie 1 : Quelques calculs préliminaires.

1. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & -3 & 3 \\ -3 & 3-X & -4 \\ -3 & 4 & -5-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2 + 2X + 1) + 3(3X + 3) - 3(3X + 3) = -(X+1)^2(X-2).$$

$$\chi_A = -(X+1)^2(X-2) \text{ et donc } \text{Sp}(A) = (-1, -1, 2).$$

Soit  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ .

$$\bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A + I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 3z = 0 \\ -3x + 4y - 4z = 0 \\ -3x + 4y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x + y \\ -3x + 4y - 4(-x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}. \text{ Donc}$$

$$\text{Ker}(A + I_3) = \text{Vect}(e'_1) \text{ où } e'_1 = (0, 1, 1).$$

$$\bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - 2I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 3z = 0 \\ -3x + y - 4z = 0 \\ -3x + 4y - 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases}. \text{ Donc}$$

$$\text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Vect}(e'_3) \text{ où } e'_3 = (-1, 1, 1).$$

2.  $(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 9 \\ -9 & 9 & -9 \\ -9 & 9 & -9 \end{pmatrix}$ . Donc  $\text{Ker}((A + I_3)^2)$  est le plan d'équation  $x - y + z = 0$ . Ce plan ne contient pas le vecteur  $e'_3$  car  $-1 - 1 + 1 \neq 0$ . Donc  $\text{Ker}((A + I_3)^2) \cap \text{Ker}(A - 2I_3) = \{0\}$ . Comme d'autre part  $\dim(\text{Ker}((A + I_3)^2)) + \dim(\text{Ker}(A - 2I_3)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{C}^3)$ , on a montré que

$$\text{Ker}((A + I_3)^2) \oplus \text{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{C}^3.$$

3. Cherchons  $e'_2 = (x, y, z)$  tel que  $Ae'_2 = e'_1 - e'_2$  ou encore tel que  $(A + I_3)e'_2 = e'_1$ .

$$(A + I_3)e'_2 = e'_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 3z = 0 \\ -3x + 4y - 4z = 1 \\ -3x + 4y - 4z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x + y \\ -3x + 4y - 4(-x + y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = -1 + y \end{cases},$$

et on peut prendre  $e'_2 = (1, 0, -1)$ .

Puisque  $(A + I_3)^2 e'_1 = (A + I_3) \times 0 = 0$ ,  $e'_1$  est dans  $\text{Ker}((A + I_3)^2)$ . Ainsi,  $e'_1$  et  $e'_2$  sont deux vecteurs non colinéaires du plan  $\text{Ker}((A + I_3)^2)$  et donc  $(e'_1, e'_2)$  est une base de ce plan. Mais alors, puisque  $\text{Ker}((A + I_3)^2) \oplus \text{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{C}^3$ ,  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $\mathbb{C}^3$ .

Si on note  $f$  l'endomorphisme de matrice  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}^3$ , la matrice de  $f$  dans la base  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou encore}$$

$$A \text{ est semblable à la matrice } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

## Partie 2 : Quelques propriétés de la matrice $J(0)$ .

1. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  de matrice  $J(0)$  dans la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ . On a donc  $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $f(e_i) = e_{i+1}$  et  $f(e_n) = 0$ . Par suite,

$$\text{rg}(J(0)) = \text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{rg}(e_2, \dots, e_n, 0) = \text{rg}(e_2, \dots, e_n) = n - 1.$$

$$\text{rg}(J(0)) = n - 1.$$

2.

2.1. Pour  $i \geq n + 1$ , posons  $e_i = 0$ . On a alors  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(e_i) = e_{i+1}$  et plus généralement  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f^k(e_i) = e_{i+k}$ . On en déduit en particulier que pour  $k \geq n$ , on a  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f^k(e_i) = 0$  et donc  $f^k = 0$ . En écrivant les matrices correspondantes, on a montré que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (J(0))^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow k + 1 \text{ et } \forall k \geq n, (J(0))^k = 0.$$

2.2. En particulier,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $(J(0)^k)^n = (J(0)^n)^k = 0^k = 0$  et toutes les puissances non nulles de  $J(0)$  sont nilpotentes.

3.

$$\alpha(J(0)) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{(J(0))^k}{k!} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(J(0))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(J(0))^k}{k!},$$

et donc

$$\alpha(J(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \frac{1}{2!} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \dots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \frac{1}{2!} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \dots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ . Soit  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $A^p = 0$  et  $B^q = 0$ . Puisque les matrices A et B commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$(\lambda A + \mu B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} \lambda^k \mu^{p+q-1-k} A^k B^{p+q-1-k}.$$

Dans cette somme, si  $k \geq p$ , on a  $A^k = 0$  et donc  $\binom{p+q-1}{k} \lambda^k \mu^{p+q-1-k} A^k B^{p+q-1-k} = 0$ . Si  $k \leq p-1$  de sorte que  $p+q-1-k \geq p+q-1-(p-1) = q$  et donc  $B^{p+q-1-k} = 0$  puis  $\binom{p+q-1}{k} \lambda^k \mu^{p+q-1-k} A^k B^{p+q-1-k} = 0$ . Finalement tous les termes de la somme sont nuls et donc  $(\lambda A + \mu B)^{p+q-1} = 0$ . On a montré que

toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est nilpotente.

5. Le résultat précédent se généralise par récurrence à une combinaison linéaire d'un nombre fini quelconque de matrices nilpotentes commutant deux à deux. Or, U est une combinaison linéaire des matrices  $J(0), (J(0))^2, \dots, (J(0))^{n-1}$  qui sont toutes nilpotentes d'après 2.2. et commutent deux à deux. Donc U est nilpotente.

La dernière colonne de U est nulle et donc  $\text{rg}(U) \leq n-1$ . Soit alors  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que  $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0$  (\*) où les  $C_i$  sont les colonnes de U.

L'équation (\*) s'écrit comme un système à  $n-1$  équations et  $n-1$  inconnues dont le déterminant est égal à 1 car la matrice correspondante est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux tous égaux à 1. Ce déterminant n'étant pas nul, le système admet l'unique solution  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ .

Ainsi, les  $n-1$  premières colonnes de U sont linéairement indépendantes et U est de rang au moins  $n-1$ . Finalement, U est de rang  $n-1$ .

U est une matrice nilpotente de rang  $n-1$ .

### Partie 3 : Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

1. Soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ . Pour  $x \in E$ ,

$$x \in \text{Ker}(u^i) \Rightarrow u^i(x) = 0 \Rightarrow u^j(u^i(x)) = 0 \Rightarrow u^{i+j}(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(u^{i+j}).$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \text{Ker}(u^i) \subset \text{Ker}(u^{i+j}).$$

2. D'après la question précédente,  $\forall m \in \mathbb{N}, \text{Ker}(u^m) \subset \text{Ker}(u^{m+1})$ . On en déduit que la suite  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante. Si maintenant  $\forall m \in \mathbb{N}, t_{m+1} \neq t_m$  alors la suite  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est une suite strictement croissante d'entiers naturels. On en déduit par récurrence que  $\forall m \in \mathbb{N}, t_m \geq m$ . En particulier,  $t_{n+1} \geq n+1 > n$  ce qui est impossible puisque  $\text{Ker}(u^{n+1})$  est un sous-espace de E qui est de dimension n.

Donc,  $\exists m \in \mathbb{N} / t_{m+1} = t_m$ . Mais alors  $\{m \in \mathbb{N}, t_m = t_{m+1}\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ . D'après une propriété fondamentale de  $\mathbb{N}$ ,  $\{m \in \mathbb{N}, t_m = t_{m+1}\}$  admet un plus petit élément. On en déduit l'existence de r.

3. (i) D'après la question précédente, pour chaque  $m \in \mathbb{N}$ , on a  $t_m = t_{m+1}$  ou  $t_m < t_{m+1}$ .

Mais alors, par définition de r,  $\forall m < r, t_m < t_{m+1}$ . On en déduit que  $\text{Ker}(u^m) \subsetneq \text{Ker}(u^{m+1})$ .

(ii) Par définition de  $r$ ,  $\text{Ker}(u^r) \subset \text{Ker}(u^{r+1})$  et  $\dim(\text{Ker}(u^r)) \subset \dim(\text{Ker}(u^{r+1}))$ . On en déduit que  $\text{Ker}(u^r) = \text{Ker}(u^{r+1})$ .

(iii) Montrons par récurrence que  $\forall m \geq r$ ,  $\text{Ker}(u^m) = \text{Ker}(u^{m+1})$ .

• C'est vrai pour  $m = r$ .

• Soit  $m \geq r$ . Supposons que  $\text{Ker}(u^m) = \text{Ker}(u^{m+1})$  et montrons que  $\text{Ker}(u^{m+1}) = \text{Ker}(u^{m+2})$ .

On a déjà  $\text{Ker}(u^{m+1}) \subset \text{Ker}(u^{m+2})$ . Inversement pour  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(u^{m+2}) &\Rightarrow u^{m+2}(x) = 0 \Rightarrow u^{m+1}(u(x)) = 0 \Rightarrow u(x) \in \text{Ker}(u^{m+1}) \\ &\Rightarrow u(x) \in \text{Ker}(u^m) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &\Rightarrow u^m(u(x)) = 0 \Rightarrow u^{m+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(u^{m+1}), \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\text{Ker}(u^{m+1}) = \text{Ker}(u^{m+2})$  et finalement que  $\text{Ker}(u^{m+1}) = \text{Ker}(u^{m+2})$ .

On a montré par récurrence que  $\forall m \geq r$ ,  $\text{Ker}(u^m) = \text{Ker}(u^{m+1})$ .

#### Partie 4 : Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$ .

1. Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ .

1.1.  $\text{Im}(w) = \{v^q(y), y \in \text{Im}(v^p)\} = \{v^q(v^p(x)), x \in E\} = \{v^{p+q}(x), x \in E\} = \text{Im}(v^{p+q})$ .

$$\text{Im}(w) = \text{Im}(v^{p+q}).$$

1.2.  $\text{Ker}(w) = \text{Ker}(v^q) \cap \text{Im}(v^p) \subset \text{Ker}(v^q)$ .

$$\text{Ker}(w) \subset \text{Ker}(v^q).$$

1.3. D'après le théorème du rang,  $\dim(\text{Ker}(w)) + \dim(\text{Im}(w)) = \dim(\text{Im}(v^p))$ . Puisque  $\text{Ker}(w) \subset \text{Ker}(v^q)$  et que  $\text{Im}(w) = \text{Im}(v^{p+q})$ , on en déduit que  $\dim(\text{Im}(v^p)) \leq \dim(\text{Ker}(v^q)) + \dim(\text{Im}(v^{p+q}))$  ou encore  $n - \dim(\text{Ker}(v^p)) \leq \dim(\text{Ker}(v^q)) + n - \dim(\text{Ker}(v^{p+q}))$  ou enfin  $\dim(\text{Ker}(v^{p+q})) \leq \dim(\text{Ker}(v^p)) + \dim(\text{Ker}(v^q))$ .

$$\dim(\text{Ker}(v^{p+q})) \leq \dim(\text{Ker}(v^p)) + \dim(\text{Ker}(v^q)).$$

1.4.  $v$  est de rang  $n - 1$  et donc  $\dim(\text{Ker}(v)) = 1$ .

La question précédente fournit alors en particulier

$$\forall i \in \mathbb{N}, \dim(\text{Ker}(v^{i+1})) \leq \dim(\text{Ker}(v^i)) + \dim(\text{Ker}(v)) = \dim(\text{Ker}(v^i)) + 1.$$

Par récurrence sur  $i$ , on en déduit alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \dim(\text{Ker}(v^i)) \leq i.$$

1.5 Si maintenant il existe  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\dim(\text{Ker}(v^{i_0})) < i_0$  alors, puisque  $\text{Ker}(v^n) = E$ ,

$$n = \dim(\text{Ker}(v^n)) = \dim(\text{Ker}(v^{(n-i_0)+i_0})) \leq \dim(\text{Ker}(v^{n-i_0})) + \dim(\text{Ker}(v^{i_0})) < (n - i_0) + i_0 = n,$$

ce qui est absurde. Donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \dim(\text{Ker}(v^i)) = i.$$

2. En particulier,  $\dim(\text{Ker}(v^{n-1})) = n - 1 < n$  et donc  $\text{Ker}(v^{n-1}) \neq E$  ou encore

$$v^{n-1} \neq \theta.$$

3. Soit  $e \in E$  tel que  $v^{n-1}(e) \neq 0$ . Montrons que la famille  $(e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$  est libre. Supposons par l'absurde que cette famille soit liée et donc qu'il existe  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$  tel que  $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v^i(e) = 0$ . Soit  $p = \text{Min}\{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_i \neq 0\}$ . On a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v^i(e) = 0 \Rightarrow \sum_{i=p}^{n-1} \lambda_i v^i(e) = 0 \Rightarrow v^{n-1-p} \left( \sum_{i=p}^{n-1} \lambda_i v^i(e) \right) = 0 \Rightarrow \lambda_p v^{n-1}(e) = 0.$$

Cette dernière égalité est absurde car  $\lambda_p \neq 0$  et  $v^{n-1}(e) \neq 0$  et on a montré que la famille  $(e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$  est libre. Enfin, puisque  $\text{card}(e, v(e), \dots, v^{n-1}(e)) = n = \dim(E)$ , on a montré que la famille  $(e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$  est une base de  $E$ .

Il existe  $e \in E$  tel que la famille  $(e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$  soit une base de  $E$ .

4. Puisque  $v^n(e) = 0$ , on a immédiatement

$$\text{Mat}_{(v^i(e))_{0 \leq i \leq n-1}}(v) = J(0).$$

5. D'après la question précédente, si  $v$  est un endomorphisme nilpotent de rang  $n - 1$ , il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $v$  est  $J(0)$ . Réciproquement, comme  $J(0)$  est une matrice nilpotente de rang  $n - 1$  d'après la partie 2, un endomorphisme de matrice  $J(0)$  dans une certaine base est nilpotent de rang  $n - 1$ .

Les endomorphismes nilpotents de rang  $n - 1$  sont les endomorphismes de matrice  $J(0)$  dans une certaine base.

Ainsi, deux matrices nilpotentes de rang  $n - 1$  sont semblables à la matrice  $J(0)$  et donc

deux matrices nilpotentes de rang  $n - 1$  sont semblables.

**Partie 5 : Résolution de l'équation  $J(\mu) = \alpha(X)$  d'inconnue  $X \in M_n(\mathbb{C})$ .**

1. Soit  $P \in GL_n(\mathbb{C})$ . Pour  $M \in M_n(\mathbb{C})$  et  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $P^{-1} \left( \sum_{k=0}^p \frac{M^k}{k!} \right) P = \sum_{k=0}^p P^{-1} \frac{M^k}{k!} P = \sum_{k=0}^p \frac{(P^{-1}MP)^k}{k!}$ .

Maintenant, l'application  $f : M \mapsto P^{-1}MP$  est un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{C})$ . Puisque  $M_n(\mathbb{C})$  est un  $\mathbb{C}$ -espace de dimension finie, on en déduit que  $f$  est continue sur  $M_n(\mathbb{C})$  et donc, pour  $M \in M_n(\mathbb{C})$ ,

$$\begin{aligned} P^{-1} \alpha(M) P &= f(\alpha(M)) = f \left( \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{M^k}{k!} \right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} f \left( \sum_{k=0}^p \frac{M^k}{k!} \right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} P^{-1} \left( \sum_{k=0}^p \frac{M^k}{k!} \right) P \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{(P^{-1}MP)^k}{k!} = \alpha(P^{-1}MP). \end{aligned}$$

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \forall P \in GL_n(\mathbb{C}), P^{-1} \alpha(M) P = \alpha(P^{-1}MP).$$

2. Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  puis  $z = x + iy$ .

$$e^z = i \Leftrightarrow e^x \times e^{iy} = 1 \times e^{i\pi/2} \Leftrightarrow e^x = 1 \text{ et } y \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $e^z = i$  est  $i \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \right)$ .

$$e^z = -1 \Leftrightarrow e^x \times e^{iy} = 1 \times e^{i\pi} \Leftrightarrow e^x = 1 \text{ et } y \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $e^z = -1$  est  $i(\pi + 2\pi\mathbb{Z})$ .

Le module de  $-3 - 4i$  est 5 et un argument de  $-3 - 4i$  est  $\theta = \pi + \text{Arctan} \frac{4}{3}$ . Par suite

$$e^z = -3 - 4i \Leftrightarrow e^x \times e^{iy} = 5 \times e^{i\theta} \Leftrightarrow e^x = 5 \text{ et } y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \ln 5 \text{ et } y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $e^z = -3 - 4i$  est  $\{\ln 5 + i\theta + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  où  $\theta = \pi + \text{Arctan} \frac{4}{3}$ .

3. Soit  $\mu \in \mathbb{C}$ .

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|e^z| = e^{\text{Re}(z)} \neq 0$  et donc si  $\mu = 0$ , l'équation  $e^z = \mu$  n'a pas de solution.

Soit  $\mu \in \mathbb{C}^*$ . Posons  $\mu = re^{i\theta}$  où  $r \in ]0, +\infty[$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Pour  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,

$$e^z = \mu \Leftrightarrow e^x \times e^{iy} = r \times e^{i\theta} \Leftrightarrow e^x = r \text{ et } y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \ln r \text{ et } y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z}.$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall \mu \in \mathbb{C}^*, e^z = \mu \Leftrightarrow z = \ln |\mu| + i \arg(\mu) + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z},$$

où  $\arg(\mu)$  désigne un argument de  $\mu$ .

4.

$$4.1 \alpha(sI_n) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{(sI_n)^k}{k!} = \left( \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{s^k}{k!} \right) I_n = e^s I_n = \mu I_n.$$

$$\alpha(sI_n) = \mu I_n.$$

4.2. Puisque les matrices  $sI_n$  et  $J(0)$  commutent,  $\alpha(J(s)) = \alpha(sI_n) \times \alpha(J(0)) = \mu \alpha(J(0))$ .

$$\alpha(J(s)) = \mu \alpha(J(0)).$$

4.3. Puisque  $\mu \neq 0$ ,  $\mu[\alpha(J(0)) - I_n] = \mu U$  est nilpotente de rang  $n - 1$  d'après la question 5. de la partie 2.

4.4. La matrice  $\mu[\alpha(J(0)) - I_n] = \alpha(J(s)) - \mu I_n$  est nilpotente de rang  $n - 1$ . D'autre part, la matrice  $J(\mu) - \mu I_n = J(0)$  est nilpotente de rang  $n - 1$ . D'après la question 5. de la partie 4, ces deux matrices sont semblables. Il existe donc  $Q \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $Q^{-1}(\alpha(J(s)) - \mu I_n)Q = J(\mu) - \mu I_n$  ou encore telle que  $Q^{-1}\alpha(J(s))Q = J(\mu)$ .

$$\exists Q \in GL_n(\mathbb{C}) / Q^{-1}\alpha(J(s))Q = J(\mu).$$

5. D'après la question 1.,  $J(\mu) = Q^{-1}\alpha(J(s))Q = \alpha(Q^{-1}J(s)Q)$  et une solution de l'équation  $\alpha(X) = J(\mu)$  dans  $M_n(\mathbb{C})$  est  $X = Q^{-1}J(s)Q$ .

6. Comme à la question 1., l'application  $M \mapsto {}^tM$  est continue sur  $M_n(\mathbb{C})$  en tant qu'endomorphisme de cet espace. Donc, pour  $M \in M_n(\mathbb{C})$ ,

$${}^t\alpha(M) = {}^t \left( \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{M^k}{k!} \right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^p \frac{{}^tM^k}{k!} \right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^p \frac{({}^tM)^k}{k!} \right) = \alpha({}^tM).$$

Par suite,  ${}^tJ(\mu) = \alpha({}^t(Q^{-1}J(s)Q))$  et une solution de l'équation  $\alpha(X) = J(\mu)$  est  ${}^t(Q^{-1}J(s)Q)$ .

## 7. Applications

7.1.  $T = {}^t(J(i))$ . D'après la question 2., le complexe  $s = i\frac{\pi}{2}$  est tel que  $e^s = \mu$  où  $\mu = i$ . On peut donc choisir

$X_1 = {}^t \left( Q^{-1}J\left(i\frac{\pi}{2}\right)Q \right)$  où  $Q$  est une matrice inversible telle que  $Q^{-1} \left( \alpha \left( J\left(i\frac{\pi}{2}\right) \right) - iI_2 \right) Q = J(0)$ .

On a  $\alpha \left( J\left(i\frac{\pi}{2}\right) \right) - iI_2 = i(\alpha(J(0)) - I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} = V$ . Comme nous l'avons étudié dans la partie 4., si on prend

$e'_1 = e = e_1$  et  $e'_2 = v(e) = ie_2$ , la matrice de  $v$  dans la base  $(e'_1, e'_2)$  est  $J(0)$  ou encore, on peut prendre  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

et donc  $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i} \end{pmatrix}$  puis

$${}^tX_1 = Q^{-1}J\left(i\frac{\pi}{2}\right)Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i\pi}{2} & 0 \\ 1 & \frac{i\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\pi}{2} & 0 \\ \frac{1}{i} & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\pi}{2} & 0 \\ \frac{1}{i} & \frac{i\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{i\pi}{2} & \frac{1}{i\pi} \\ 0 & \frac{i\pi}{2} \end{pmatrix}$  est une matrice telle que  $\alpha(X_1) = T$ .

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{i\pi}{2} & \frac{1}{i\pi} \\ 0 & \frac{i\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

## 7.2.

**7.2.1.** On reproduit le travail précédent en remplaçant  $\mu = i$  par  $\mu = -1$  et  $s = i\frac{\pi}{2}$  par  $s = i\pi$ .

$${}^tB_1 = Q^{-1}J(i)Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 1 & i\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 1 & -i\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ -1 & i\pi \end{pmatrix},$$

et on peut prendre  $B_1 = \begin{pmatrix} i\pi & -1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}$ .

$$B_1 = \begin{pmatrix} i\pi & -1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}.$$

**7.2.2.** Un calcul par blocs montre que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $H^k = \begin{pmatrix} B_1^k & 0_{2,1} \\ 0_{1,2} & \ln^k 2 \end{pmatrix}$  et donc  $\alpha(H) = \begin{pmatrix} \alpha(B_1) & 0_{2,1} \\ 0_{1,2} & \alpha(\ln 2I_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$\alpha(H) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**7.2.3.** On a vu dans la partie 1. que  $A = Q \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1} = Q\alpha(H)Q^{-1} = \alpha(QHQ^{-1})$  où  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Déterminons alors  $Q^{-1}$ .

$$\begin{cases} e'_1 = e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_3 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_2 = -e_3 + e'_1 \\ e_1 = e_3 + e'_2 \\ e'_3 = -(e_3 + e'_2) + (-e_3 + e'_1) + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_3 = e'_1 - e'_2 - e'_3 \\ e_2 = e'_2 + e'_3 \\ e_1 = e'_1 - e'_3 \end{cases}$$

et donc  $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  puis

$$\begin{aligned} X_2 &= QHQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\ln 2 \\ -1 & 1 & \ln 2 \\ -1 & 2 & \ln 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \ln 2 & -1 - \ln 2 & 1 + \ln 2 \\ -1 - \ln 2 & 1 + \ln 2 & -2 - \ln 2 \\ -1 - \ln 2 & 2 + \ln 2 & -3 - \ln 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} \ln 2 & -1 - \ln 2 & 1 + \ln 2 \\ -1 - \ln 2 & 1 + \ln 2 & -2 - \ln 2 \\ -1 - \ln 2 & 2 + \ln 2 & -3 - \ln 2 \end{pmatrix}.$$