Epreuve de Mathématiques B PSI

Exercice 1

Partie A Utilisation de méthodes algébriques.

1° a) Puisque M n'est pas inversible, $\text{Ker}M \neq \{0\}$ et il existe $X' \neq 0$ tel que $MX' = 0$. Mais alors, le vecteur $X = \dfrac{1}{\|X'\|_\infty}X'$ est un vecteur de $\text{Ker}M$ tel que $\|X\|_\infty = 1$.

b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que $|x_i| = \max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k| = 1$. Puisque $MX = 0$, on a en particulier $\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j$ et donc

$$|m_{i,i}| = |m_{i,i}x_i| = \left|-\sum_{j\neq i} m_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j\neq i} |m_{i,j}||x_j| \leq \left(\sum_{j\neq i} |m_{i,j}|\right)|x_i| = \sum_{j\neq i} |m_{i,j}|.$$

$$\boxed{\exists i \in [\![1, n]\!]/\ |m_{i,i}| \leq \sum_{j\neq i} |m_{i,j}|.}$$

2° On développe $\det(N - \lambda I_n)$ suivant sa dernière colonne et on obtient

$$\det(N - \lambda I_n) = (-a_1 - \lambda)(-\lambda)^{n-1} + \sum_{i=i}^{n-1} (-1)^{n+i}(-a_{n+1-i})\Delta_i = (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1}a_{n+1-i}\Delta_i),$$

où Δ_i est un déterminant de la forme $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \times & & \times & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & & & \times & 1 & \times & & \times \\ & & & & 0 & \ddots & & \\ & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ \times & & & \times & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $-\lambda$ étant écrit $i - 1$ fois. On a ainsi $\Delta_i = (-\lambda)^{i-1}$ et donc

$$\det(N - \lambda I_n) = (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n+1-i}\lambda^{i-1})(-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n) = (-1)^n P(\lambda).$$

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \det(N - \lambda I_n) = (-1)^n P(\lambda).}$$

3° On a $P(z) = 0$ et donc la matrice $M = N - zI_n$ n'est pas inversible. D'après la question 1° b., il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|m_{i,i}| \leq \sum\limits_{j\neq i} |m_{i,j}|$.

Si $i = 1$, on obtient $|-z| \leq |-a_n|$ et donc $|z| \leq |a_n| \leq 1 + \max\limits_{1\leq k\leq n} |a_k|$.

Si $i = n$, on obtient $|-a_1 - z| \leq 1$ et donc $1 \leq |z| - |a_1|$ puis $|z| \leq 1 + |a_1| \leq 1 + \max\limits_{1\leq k\leq n} |a_k|$.

Si $2 \leq i \leq n - 1$, on obtient $|-z| \leq 1 + |-a_{n+1-i}|$ et donc $|z| \leq 1 + |a_{n+1-i}| \leq 1 + \max\limits_{1\leq k\leq n} |a_k|$.

Dans tous les cas, on a $|z| \leq 1 + \max\limits_{1\leq k\leq n} |a_k|$.

$$\boxed{\text{Si } P(z) = 0 \text{ où } P = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n, \text{ alors } |z| \leq 1 + \max_{1\leq k\leq n} |a_k|.}$$

Partie B **Utilisation de méthodes analytiques.**

1° a) g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions croissantes sur $]0,+\infty[$, l'une d'elles étant strictement croissante sur $]0,+\infty[$ (puisque l'un des a_i est non nul).

b) Puisque la fonction g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]\lim_{x\to 0^+} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)[=]-\infty, 1[$ (car les a_i ne sont pas tous nuls). En particulier, il existe un réel strictement positif t_0 et un seul tel que $g(t_0) = 0$.
Maintenant, pour $t > 0$, on a $Q(t) = t^n g(t)$ et donc, pour $t > 0$, $Q(t) = 0 \Leftrightarrow g(t) = 0$.

$$\boxed{\text{il existe un réel strictement positif } t_0 \text{ et un seul tel que } Q(t_0) = 0.}$$

2° Si z est nul, on a $|z| \leq t_0 \leq \alpha$. Sinon, on a $|z| > 0$.
Dans ce cas, l'égalité $P(z) = 0$ fournit $z^n = -a_1 z^{n-1} - \ldots - a_{n-1} z - a_n$. On en déduit que $|z|^n \leq |a_1||z|^{n-1} + \ldots + |a_{n-1}||z| + |a_n|$ puis $Q(|z|) \leq 0$ et enfin $g(|z|) \leq 0 = g(t_0)$. g étant strictement croissante sur $]0,+\infty[$, on obtient encore une fois $|z| \leq t_0 \leq \alpha$.

3° Posons $M = \max_{1\leq k\leq n} |a_k|$ puis $\alpha = 1 + M$. On a $Q(\alpha) = (1+M)^n - \left(|a_1|(1+M)^{n-1} + \ldots + |a_{n-1}|(1+M) + |a_n|\right)$.
Maintenant, puisque les a_i ne sont pas tous nuls, on a $\alpha = 1 + M > 1$ et donc

$$|a_1|(1+M)^{n-1} + \ldots + |a_{n-1}|(1+M) + |a_n| \leq M((1+M)^{n-1} + \ldots + (1+M) + 1) = M\frac{(1+M)^n - 1}{(1+M) - 1} = (1+M)^n - 1 < (1+M)^n.$$

Ceci fournit $Q(\alpha) > 0$ ou encore $g(\alpha) > 0$. On en déduit que $|z| < \alpha$ ou encore

$$\boxed{\text{Si } P(z) = 0 \text{ où } P = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n, \text{ alors } |z| < 1 + \max_{1\leq k\leq n} |a_k|.}$$

Exercice 2

Partie A.

1° Supposons $T \neq 0$.
φ est continue sur le segment $[0, |T|]$ et donc bornée sur ce segment. Mais alors φ est bornée sur $\mathbb{R}$ par T-périodicité.

2° φ est T-périodique et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x+T) = \varphi(x)$. En dérivant cette égalité, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x+T) = \varphi'(x)$ ce qui montre que φ' est T-périodique.

3° Montrons que P_φ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
• $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x+0) = \varphi(x)$ et donc $0 \in P_\varphi$.
• Soit $(t, t') \in (P_\varphi)^2$. Pour tout réel x, on a

$$\varphi(x + t - t') = \varphi(x - t') = \varphi((x - t') + t') = \varphi(x),$$

et donc $t - t' \in P_\varphi$.

On a montré que

$$\boxed{P_\varphi \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}, +).}$$

Partie B **Etude des sous-groupes de** $(\mathbb{R}, +)$**.**

1° Puisque G n'est pas réduit à $\{0\}$, G contient un réel x non nul. Puisque G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, G contient aussi $-x$. Mais alors l'un des deux réels $x$ou $-x$ est strictement positif et est élément de G. Ainsi,

$$\boxed{G \cap]0, +\infty[\neq \varnothing.}$$

2° $G \cap]0,+\infty[$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et admet donc une borne inférieure. Donc a existe.

a) i) Supposons que $a \notin G$. Par définition de a, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in G \cap]0,+\infty[/\ a \leq x < a + \varepsilon$. Puisque $a \notin G$, on a plus précisément

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in G\cap]0, +\infty[/\ a < x < a + \varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon = a > 0$, $\exists t_1 \in G$ tel que $a < t_1 < 2a$ puis pour $\varepsilon = t_1 - a > 0$, $\exists t_2 \in G$ tel que $a < t_2 < t_1 < 2a$. Mais alors, le réel $t_1 - t_2$ est dans G car G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et vérifie d'autre part $0 < t_1 - t_2 < a$. Ceci contredit la définition de a et il était donc absurde de supposer que $a \notin G$.

$$\boxed{a \in G.}$$

ii) Puisque $a \in G$, G contient encore $a + a = 2a$, $a + a + a = 3a$ et plus généralement par récurrence les na, $n \in \mathbb{N}^*$. G contient aussi $0 = 0a$ et les opposés des na, $n \in \mathbb{N}^*$. Finalement, G contient les na, $n \in \mathbb{Z}$ et donc

$$a\mathbb{Z} \subset G.$$

Inversement, soient $x \in G$ puis $n = E\left(\dfrac{x}{a}\right) \in \mathbb{Z}$. Puisque $a\mathbb{Z} \subset G$, $na \in G$ puis $x - na \in G$. Mais

$$n = E\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow n \leq \frac{x}{a} < n + 1 \Rightarrow na \leq x < na + a \Rightarrow 0 \leq x - na < a.$$

Ainsi, $x - na \in G \cap [0, a[= \{0\}$ et donc $x = na \in a\mathbb{Z}$. On a montré que $G \subset a\mathbb{Z}$ et finalement

$$\boxed{\text{Si } \inf(G\cap]0, +\infty[) = a > 0,\ G = a\mathbb{Z}.}$$

b) Supposons que $\inf(G\cap]0, +\infty[) = 0$ et montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$.
Pour cela, montrons que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists g \in G/\ |x - g| < \varepsilon$.

Soient donc $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Puisque $\inf(G\cap]0, +\infty[) = 0$, $\exists y \in G$ tel que $0 < y < \varepsilon$. Soient $n = E\left(\dfrac{x}{y}\right) \in \mathbb{Z}$ puis $g = ny$. On a $g \in G$ et

$$n = E\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow n \leq \frac{x}{y} < n + 1 \Rightarrow ny \leq x < ny + y \Rightarrow 0 \leq x - g < y \Rightarrow 0 \leq x - g < \varepsilon.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{Si } \inf(G\cap]0, +\infty[) = 0,\ G \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

Partie C Etude des solutions périodiques de (E_f) dans trois cas simples.

1° Si (E_f) admet une solution T-périodique y, d'après la question 2° de la partie A, y' puis y'' sont T-périodiques. On en déduit que $f = y'' - 2y' + 2y$ est T-périodique.
Par suite, si f n'est pas périodique, (E_f) n'admet pas de solution périodique.

2° L'équation caractéristique associée à (E_0) est $z^2 - 2z + 2 = 0$. Cette équation admet pour solution les nombres $1 + i$ et $1 - i$. On sait alors que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_0) sont les fonctions de la forme $y\ :\ x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Si une telle fonction y est périodique, cette fonction doit être bornée sur $\mathbb{R}$ d'après la question 1° de la partie A. Ceci impose en particulier aux suites $(y(2n\pi))_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(e^{2n\pi})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi))_{n\in\mathbb{N}} = \mu(e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi})_{n\in\mathbb{N}}$ d'être bornées et donc impose $\lambda = \mu = 0$. Comme d'autre part, la fonction nulle admet n'importe quel réel pour période,

$$\boxed{\text{la fonction nulle est la seule solution périodique de } (E_0),}$$

3° Cherchons une solution particulière de (E_c) sous la forme $y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$. Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned} y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) &= (-\lambda \cos x - \mu \sin x) - 2(-\lambda \sin x + \mu \cos x) + 2(\lambda \cos x + \mu \sin x) \\ &= (\lambda - 2\mu) \cos x + (2\lambda + \mu) \sin x. \end{aligned}$$

Puis

$$y \text{ solution de } (E_c) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda - 2\mu = 1 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{array} \right. \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{5} \\ \mu = -\dfrac{2}{5} \end{array} \right. \Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{1}{5}(\cos x - 2 \sin x).$$

Une solution particulière de (E_c) sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{5}(\cos x - 2\sin x)$. On sait alors que la solution générale de (E_c) sur $\mathbb{R}$ est somme d'une solution particulière de (E_c) sur $\mathbb{R}$ et de la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_c) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto e^x(\lambda\cos x + \mu\sin x) + \frac{1}{5}(\cos x - 2\sin x),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

Maintenant, si une telle solution est périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Or, une telle solution est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la fonction $x \mapsto e^x(\lambda\cos x + \mu\sin x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ (car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{5}(\cos x - 2\sin x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$) ce qui équivaut d'après la question précédente à $\lambda = \mu = 0$.
Réciproquement, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{5}(\cos x - 2\sin x)$ est 2π-périodique et donc

$$\boxed{(E_c) \text{ admet une solution périodique et une seule à savoir la fonction } x \mapsto \frac{1}{5}(\cos x - 2\sin x).}$$

Partie D

1° a)

i) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$z''(x) - 2z'(x) + 2z(x) = y''(x+T) - 2y'(x+T) + 2y(x+T) = f(x+T) = f(x),$$

et donc

$$\boxed{z \text{ est solution de } (E_c) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

ii) Si y est T-périodique, alors $y = z$ et en particulier $y(0) = z(0) = y(T)$ et $y'(0) = z'(0) = y'(T)$.
Réciproquement, supposons que $y(0) = y(T)$ et $y'(0) = y'(T)$ et posons $y_0 = y(0)$ et $y'_0 = y'(0)$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy permet d'affirmer que y est la seule solution de (E_c) sur $\mathbb{R}$ telle que $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y'_0$. Comme z est solution de (E_c) sur $\mathbb{R}$ et que $z(0) = y(T) = y(0) = y_0$ et $z'(0) = y'(T) = y'(0) = y'_0$, on a $y = z$ ce qui signifie que y est T-périodique.

$$\boxed{y \text{ est } T\text{-périodique si et seulement si } y(0) = y(T) \text{ et } y'(0) = y'(T).}$$

b) f est périodique et admet donc au moins une période non nulle que l'on note T.
On sait que les solutions de (E_f) sont les fonctions de la forme $y\ :\ x \mapsto e^x(\lambda\cos x + \mu\sin x) + f_0$ où f_0 est une solution particulière de (E_f) sur $\mathbb{R}$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Maintenant,

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} y(T) = y(0) \\ y'(T) = y'(0) \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^T(\lambda\cos T + \mu\sin T) + f_0(T) = \lambda + f_0(0) \\ e^T((\lambda+\mu)\cos T + (-\lambda+\mu)\sin T) + f'_0(T) = \lambda + \mu + f_0(0) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda(e^T\cos T - 1) + \mu e^T\sin T = f_0(0) - f_0(T) \\ \lambda(e^T(\cos T - \sin T) - 1) + \mu(e^T(\cos T + \sin T) - 1) = f_0(0) - f'_0(T) \end{array}\right. \qquad (S)
\end{aligned}$$

Le déterminant Δ de ce système est

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} e^T\cos T - 1 & e^T\sin T \\ e^T(\cos T - \sin T) - 1 & e^T(\cos T + \sin T) - 1 \end{vmatrix} &= (e^T\cos T - 1)(e^T(\cos T + \sin T) - 1) - e^T\sin T(e^T(\cos T - \sin T) - 1) \\
&= e^{2T} - 2e^T\cos T + 1 = (e^T - \cos T)^2 + 1 - \cos^2 T \\
&= (e^T - \cos T)^2 + \sin^2 T.
\end{aligned}$$

Maintenant, si $\Delta = 0$ alors $\sin T = e^T - \cos T = 0$ puis $\sin T = 0$ et $e^T = \pm 1$ ce qui impose $e^T = 1$ et donc $T = 0$. Comme $T \neq 0$, on a donc $\Delta \neq 0$. On sait alors que le système (S) admet un et un seul couple solution (λ,μ) ou encore, d'après la question précédente, l'équation (E_f) admet une solution T-périodique et une seule et donc au moins une solution périodique.

$$\boxed{(E_f) \text{ admet une solution périodique.}}$$

2° a) Supposons que P_f est dense dans $\mathbb{R}$.

i) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque P_f est dense dans $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists T_n \in P_f / |x - T_n| < \dfrac{1}{n}$. En particulier, la suite $x - T_n$ tend vers 0. Maintenant, chaque T_n étant une période de f, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(x - T_n) = f(x)$ ou encore la suite $(f(x - T_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante. Cette suite converge donc vers $f(x)$. Par continuité de f en 0, on a alors

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x - T_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} (x - T_n)\right) = f(0).$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$ et donc f est constante.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}\text{, périodique et si } P_f \text{ est dense dans } \mathbb{R}\text{, alors } f \text{ est constante.}}$$

ii) Supposons que f est une constante C. L'équation (E_f) admet alors la solution particulière $x \mapsto \dfrac{C}{2}$ et donc les solutions de (E_f) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x) + \dfrac{C}{2}$. De même qu'à la partie C, la seule solution de (E_f) bornée sur $\mathbb{R}$ est la solution correspondant à $\lambda = \mu = 0$ à savoir la fonction $x \mapsto \dfrac{C}{2}$. Comme cette fonction est périodique, on a montré que

$$\boxed{\text{Si } P_f \text{ est dense dans } \mathbb{R}\text{, } (E_f) \text{ admet une solution périodique et une seule.}}$$

b) Supposons que $P_f = a\mathbb{Z}$ avec $a \in]0, +\infty[$.

(i) D'après la question 1° de la partie C., puisque (E_f) admet une solution T_1-périodique, f est T_1-périodique ou encore $T_1 \in P_f$. De même, $T_2 \in P_f$.

$$\boxed{T_1 \text{ et } T_2 \text{ sont des éléments de } P_f.}$$

ii) Choisissons une période strictement positive T_1 de y_1 et une période strictement positive T_2 de y_2. T_1 et T_2 sont dans $P_f = a\mathbb{Z}$ et il existe donc deux entiers naturels non nuls k_1 et k_2 tels que $T_1 = k_1 a$ et $T_2 = k_2 a$.
Soit $T = k_1 k_2 a$. Alors $T = k_2 T_1$ et donc T est une période de y_1. De même $T = k_1 T_2$ et donc T est une période de y_2. On a montré que

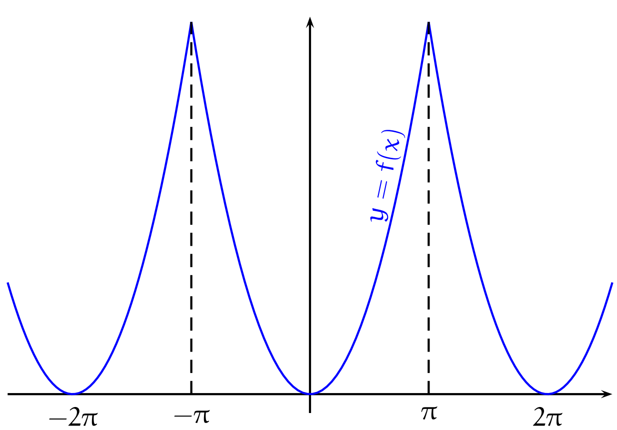
$$\boxed{y_1 \text{ et } y_2 \text{ possèdent une période commune.}}$$

iii) $y_2 - y_1$ est une solution T-périodique de (E_0) avec $T \neq 0$. D'après la question 2° de la partie C, on a $y_2 - y_1 = 0$ ou encore $y_1 = y_2$ ce qui montre de nouveau l'unicité d'une solution périodique de (E_f).

$$\boxed{\text{Si } P_f = a\mathbb{Z}\text{, } a > 0\text{, } (E_f) \text{ admet une solution périodique et une seule.}}$$

<u>Partie E</u> Détermination de la solution périodique de (E_f) dans un cas particulier.

1° Graphe de f



f est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER. f est paire et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$.

• $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\,dx = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\pi^3}{3} = \dfrac{2\pi^2}{3}$.

• Soit $n \geq 1$. Deux intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x^2\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\frac{\sin(nx)}{n}\,dx \\
&= \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x(-\sin(nx))\,dx = \frac{4}{n\pi}\left[x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx \\
&= \frac{4}{n\pi}\frac{\pi(-1)^n}{n} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Maintenant, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de DIRICHLET, on sait que la série de FOURIER de f converge vers f sur $\mathbb{R}$ et que cette convergence est normale.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).}$$

2° Soit $x \in \mathbb{R}$. Quand n tend vers $+\infty$, $u_n(x) = O\left(\dfrac{n^2}{n^2 \times n^4}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$. On en déduit que la série numérique de terme général $u_n(x)$ converge. On a montré que

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

Montrons que S est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

• Chaque u_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n'(x) = \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4+4)}(-n(2-n^2)\sin(nx) - 2n^2\cos(nx)) \text{ et } u_n''(x) = \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4+4)}(-n^2)((2-n^2)\cos(nx) - 2n\sin(nx)).$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|u_n'(x)| \leq \frac{4(n(2+n^2)+2n^2)}{n^6} \leq \frac{4(5n^3)}{n^6} = \frac{20}{n^3},$$

et

$$|u_n'(x)| \leq \frac{4n^2((2+n^2)+2n)}{n^6} \leq \frac{4n^2(5n^2)}{n^6} = \frac{20}{n^2}.$$

Puisque les séries numériques de termes généraux $\dfrac{20}{n^3}$ et $\dfrac{20}{n^2}$ convergent, on en déduit que les séries de fonctions de termes généraux u_n' et u_n'' sont normalement et donc uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$.

En résumé,

- la série de fonctions de terme général u_n, $n \geq 1$, converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $S - \dfrac{\pi^2}{6}$,
- chaque u_n, $n \geq 1$, est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$,
- les séries de fonctions de termes généraux u_n' et u_n'' convergent uniformément sur $\mathbb{R}$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation terme à terme, $S - \dfrac{\pi^2}{6}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées première et seconde s'obtiennent par dérivation terme à terme. Il en est de même de S.

$$\boxed{S \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

3° Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
S''(x) - 2S'(x) + 2S(x) &= (S''(x) + 2S(x)) - 2S'(x) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4+4)} \left((2-n^2)((2-n^2)\cos(nx) - 2n\sin(nx)) - 2(-n(2-n^2)\sin(nx) - 2n^2\cos(nx))\right) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4+4)}(n^4+4)\cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = f(x).
\end{aligned}$$

Donc, S est une solution de (E_f) sur $\mathbb{R}$. De plus, S est 2π-périodique. D'après la partie précédente, on sait que

$$\boxed{S \text{ est l'unique solution périodique de } (E_f).}$$

4° Déterminons une solution particulière de (E_f) sur $[-\pi, \pi]$ de la forme $y : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = (2a) - 2(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + 2(b - 2a)x + 2(c - b + a).$$

Ensuite,

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = x^2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ c - b + a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Une solution particulière de (E_f) sur $[-\pi, \pi]$ est $x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)$ et donc les solutions de (E_f) sur $[-\pi, \pi]$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x) + \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Ainsi, $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [-\pi, \pi],\ S(x) = e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x) + \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)$.

L'égalité $S(-\pi) = S(\pi)$ fournit $e^{-\pi}(-\lambda) + \frac{1}{2}(\pi^2 - 2\pi + 1) = e^{\pi}(-\lambda) + \frac{1}{2}(\pi^2 + 2\pi + 1)$ puis $2\lambda \operatorname{sh} \pi = 2\pi$ et finalement $\lambda = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi}$.

L'égalité $S'(-\pi) = S'(\pi)$ fournit $e^{-\pi}(-(\lambda + \mu)) - \pi + 1 = e^{\pi}(-(\lambda + \mu)) + \pi + 1$ puis $2(\lambda + \mu)\operatorname{sh} \pi = 2\pi$ et finalement $\mu = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi} - \lambda = 0$.

$$\boxed{\forall x \in [-\pi, \pi],\ S(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi} e^x \cos x + \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1).}$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient

$$\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n(2 - n^2)}{n^2(n^4 + 4)} = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi} + \frac{1}{2},$$

et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n(2 - n^2)}{n^2(n^4 + 4)} = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi} + \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6}.}$$

