Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

Questions de cours et exemples.

1. Un polynôme annulateur de f est un polynôme P tel que $P(f) = 0$.

2. $(J_f, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{K}[X], +, .)$ et $(J_f, +, \times)$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

3. Le polynôme minimal π_f de f est l'unique générateur unitaire de l'idéal principal J_f c'est-à-dire
- π_f est non nul et unitaire ;
- $\pi_f(f) = 0$;
- $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $(P(f) = 0 \Rightarrow \pi_f | P)$.

4. • Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que $\chi_f(f) = 0$ et donc le polynôme caractéristique χ_f de f est élément de J_f ce qui montre que J_f est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$.
• On sait que l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau principal et donc l'idéal non nul J_f est engendré par un certain polynôme unitaire ce qui montre l'exsitence de π_f.

5. 5.1.

$$M^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M.$$

Mais alors, par récurrence,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = M.}$$

5.2. Le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ est donc un polynôme annulateur de f. π_f est un diviseur unitaire de ce polynôme et donc l'un des trois polynômes X, $X-1$ ou $X(X-1)$. Mais on a $f \neq 0$ et $f - \mathrm{Id} \neq 0$. Donc les polynômes X et $X-1$ ne sont pas annulateurs de f. Finalement

$$\boxed{\pi_f = X(X-1).}$$

6. 6.1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\cos x + \mu \sin x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. D'autre part, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{ch} x$ (resp. $x \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{sh} x$) est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = \operatorname{ch} x$ (resp. $y'' + y = \operatorname{sh} x$). Donc

> Les solutions de l'équation $y'' + y = \operatorname{ch} x$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{ch} x + \lambda\cos x + \mu\sin x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
>
> Les solutions de l'équation $y'' + y = \operatorname{sh} x$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{sh} x + \lambda\cos x + \mu\sin x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

6.2. Soient f une fonction de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ puis $g = f + f''$. g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $g'' = f^{(4)} + f''$ puis $g'' - g = f^{(4)} - f$. Par suite,

$$f \text{ solution de } (H_1) \Leftrightarrow f^{(4)} - f = 0 \Leftrightarrow g'' - g = 0\ (H_2).$$

6.3. Les solutions de (H_2) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

6.4. D'après la question 6.2., f est solution de (H_1) si et seulement si $g''+g = 0$ si et seulement si $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \ln \mathbb{R}$, $f''(x)+f(x) = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$.

Soient donc λ et μ deux réels. Une solution particulière de l'équation $y'' + y = \operatorname{ch} x$ (resp. $y'' + y = \operatorname{sh} x$) est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2} \operatorname{ch} x$ (resp. $x \mapsto \dfrac{1}{2} \operatorname{sh} x$). D'après le principe de superposition des solutions, une solution particulière de l'équation $y'' + y = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}(\lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x)$.

Ainsi, les solutions de (H_1) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x + \dfrac{1}{2}(\lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x)$, $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^4$. Maintenant, (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $(\dfrac{\lambda}{2}, \dfrac{\mu}{2})$ décrit $\mathbb{R}^2$. En renommant les constantes $\dfrac{\lambda}{2}$ et $\dfrac{\mu}{2}$, on a montré que

$$\boxed{\text{Les solutions de } (H_1) \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x + \gamma \operatorname{ch} x + \delta \operatorname{sh} x,\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4.}$$

6.5.

6.5.1. Puisque $E = \operatorname{Vect}(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$, on a déjà $\dim(E) \leq 4$. Vérifions alors que la famille $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est libre.
Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha \cos + \beta \sin + \gamma \operatorname{ch} + \delta \operatorname{sh} = 0$. Par unicité de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, on a déjà $\alpha \cos + \gamma \operatorname{ch} = \beta \sin + \delta \operatorname{sh} = 0$. Ensuite, si $\gamma \neq 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} |\alpha \cos x + \gamma \operatorname{ch} x| = +\infty$ et en particulier, $\alpha \cos + \gamma \operatorname{ch} \neq 0$. Donc $\gamma = 0$ puis $\alpha = 0$ (car cos n'est pas la fonction nulle. De même, si $\delta \neq 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} |\beta \sin x + \delta \operatorname{sh} x| = +\infty$ et donc $\delta = 0$ puis $\beta = 0$.

On a montré que la famille $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est libre et donc que la famille $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est une base de (E). En particulier,

$$\boxed{\dim(E) = 4.}$$

6.5.2. La dérivation est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Vérifions que sa restriction à E notée δ laisse stable E. D'après la question 6.4., E est l'ensemble des solutions de l'équation (H_1).
Soit $f \in E$. Par suite, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(4)} = f$. En dérivant les deux membres de cette égalité, on obtient $f^{(5)} = f'$ ce qui s'écrit encore $(f')^{(4)} = f'$. Par suite, f' est solution de (H_1) ou encore $f' \in E$. On a montré que

$$\boxed{\delta \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

6.5.3. Par définition, $\forall f \in E$, $f^{(4)} = f$ ou encore $\forall f \in E$, $(\delta^4 - \mathrm{Id}_E)(f) = 0$ ou enfin $\delta^4 - \mathrm{Id}_E = 0$. Ainsi, si $P = X^4 - 1$, P est un polynôme annulateur de f.
On a $P = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$. π_δ est l'un des diviseurs unitaires de ce polynôme et donc

$$\pi_\delta \in \{X - 1, X + 1, X^2 + 1, (X - 1)(X + 1), (X - 1)(X^2 + 1), (X + 1)(X^2 + 1), X^4 - 1\}.$$

Maintenant,

- $(\delta - \mathrm{Id})(\cos) = -\sin - \cos \neq 0$ et donc $\delta - \mathrm{Id} \neq 0$.
- $(\delta + \mathrm{Id})(\cos) = -\sin + \cos \neq 0$ et donc $\delta + \mathrm{Id} \neq 0$.
- $(\delta^2 - \mathrm{Id})(\cos) = -2\cos \neq 0$ et donc $\delta^2 - \mathrm{Id} \neq 0$.
- $(\delta^2 + \mathrm{Id})(\operatorname{ch}) = 2\operatorname{ch} \neq 0$ et donc $\delta^2 + \mathrm{Id} \neq 0$.
- $(\delta - \mathrm{Id}) \circ (\delta^2 + \mathrm{Id})(\operatorname{ch}) = \operatorname{sh} - \operatorname{ch} + \operatorname{sh} - \operatorname{ch} = 2(\operatorname{sh} - \operatorname{ch}) \neq 0$ et donc $(\delta - \mathrm{Id}) \circ (\delta^2 + \mathrm{Id}) \neq 0$.
- $(\delta + \mathrm{Id}) \circ (\delta^2 + \mathrm{Id})(\operatorname{ch}) = \operatorname{sh} + \operatorname{ch} + \operatorname{sh} + \operatorname{ch} = 2(\operatorname{sh} + \operatorname{ch}) \neq 0$ et donc $(\delta + \mathrm{Id}) \circ (\delta^2 + \mathrm{Id}) \neq 0$.

Finalement,

$$\boxed{\pi_\delta = X^4 - 1.}$$

Problème.

Partie 1 : Quelques propriétés des endomorphismes u et v.

1. On sait que $\dim(E_n) = n + 1$ et que $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n.

2. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in E^2$.

$$u(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' = \lambda u(P) + \mu u(Q),$$

et

$$\nu(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) = \lambda \nu(P) + \mu \nu(Q).$$

Donc u et ν sont des endomorphismes de E. De plus, si P est un polynôme de degré au plus n, alors P' et $P(X+1)$ sont des polynômes de degré au plus n et donc

u et ν sont des endomorphismes de E qui laissent stable E_n.

3. $u_n(1) = 0$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $u_n(X^k) = kX^{k-1}$. Par suite,

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\nu_n(X^k) = (X+1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j$ et donc

$$V_n = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & & & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

4. Soit $P \in E_n$. $u_n(P) = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P \in E_0$. Donc $\mathrm{Ker}(u_n) = E_0$.
Ensuite, $\mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Vect}(u(1), u(X), u(X^2), \dots, u(X^n)) = \mathrm{Vect}(0, 1, 2X, \dots, nX^{n-1}) = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^{n-1}) = E_{n-1}$.

$\det(u_n) = \det(U_n) = 1 \neq 0$ et donc $\nu_n \in \mathscr{GL}(E_n)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(\nu_n) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(\nu_n) = E_n$.

$\mathrm{Ker}(u_n) = E_0$, $\mathrm{Im}(u_n) = E_{n-1}$, $\mathrm{Ker}(\nu_n) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(\nu_n) = E_n$.

5. Soit $P \in E_n$. $u_n(\nu_n(P)) = (P(X+1))' = P'(X+1) = \nu_n(u_n(P))$ et donc

les endomorphismes u_n et ν_n commutent.

6. $\chi_{u_n} = \chi_{U_n} = (-X)^{n+1}$. Par suite, $\mathrm{Sp}(u_n) = (0, \dots, 0)$. Si l'endomorphisme u_n est diagonalisable, on dispose d'une base $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ de E_n telle que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $u_n(P_i) = 0$. L'endomorphisme u_n s'annule alors sur une base de E et est donc nul. Ceci n'est pas et donc

$\chi_{u_n} = (-X)^{n+1}$. L'endomorphisme u_n n'est pas diagonalisable.

7. $\chi_{v_n} = \chi_{V_n} = (1-X)^{n+1}$. Si v_n est diagonalisable, l'endomorphisme v_n coïncide avec Id_{E_n} sur une base de E_n et est donc Id_{E_n}. Ceci n'est pas et donc

$$\boxed{\chi_{v_n} = (1-X)^{n+1}. \text{ L'endomorphisme } v_n \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

8. **8.1.** La famille $(Q_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille de $n+1$ polynômes éléments de E_n vérifiant $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(Q_k) = k$. On sait alors que

$$\boxed{\text{la famille } (Q_k)_{0\leq k\leq n} \text{ est une base de } E_n.}$$

8.2. $w_n(Q_0) = 1-1 = 0$. Ensuite, $w_n(Q_1) = (X+1) - X = 1$.
Soit alors $k \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned} w_n(Q_k) &= \frac{1}{k!}\left((X+1)X\ldots(X-(k-2)) - X(X-1)\ldots(X-(k-2))(X-(k-1))\right) \\ &= \frac{(X+1)-(X-(k-1))}{k!}X(X-1)\ldots(X-(k-2)) = \frac{k}{k!}\times(k-1)!Q_{k-1} \\ &= Q_{k-1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ w_n(Q_k) = Q_{k-1}.}$$

8.3. Par suite,

$$\boxed{W_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & & \ldots & 0 \end{pmatrix}.}$$

8.4. D'après la question 8.1., $\mathrm{Im}(W_n) = \mathrm{Vect}(w_n(Q_0),\ldots,w_n(Q_n)) = \mathrm{Vect}(0,Q_0,\ldots,Q_{n-1}) = \mathrm{Vect}(Q_0,\ldots,Q_{n-1}) = E_{n-1}$.
D'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(w_n)) = (n+1) - n = 1$ et comme Q_0 est un élément non nul de $\mathrm{Ker}(w_n)$, on a donc $\mathrm{Ker}(w_n) = \mathrm{Vect}(Q_0) = E_0$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(w_n) = E_0 \text{ et } \mathrm{Im}(w_n) = E_n.}$$

8.5. On a $w_n(Q_0) = 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $w_n(Q_k) = Q_{k-1}$. Par récurrence sur j, on en déduit que pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}\times[\![0,n]\!]$ tel que $0 \leq j \leq k$, on a $w_n^j(Q_k) = Q_{k-j}$ et si $j > k$, $w_n^j(Q_k) = 0$.

$$\boxed{\forall (j,k) \in \mathbb{N}\times[\![0,n]\!],\ w_n^j(Q_k) = \left\{\begin{array}{l} Q_{k-j} \text{ si } j \leq k \\ 0 \text{ si } j > k \end{array}\right. .}$$

9. <u>Détermination des composantes d'un polynôme de E_n dans la base $\mathcal{B}$.</u>
9.1. Soit $P \in E_n$.
D'après la question 8.1., la famille $(Q_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de E_n et donc il existe un $n+1$-uplet $(\beta_0,\ldots,\beta_n)$ et un seul tel que $P = \sum_{k=0}^{n} \beta_k Q_k$.
9.2. Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la question 8.5., si $j \leq n$,

$$w_n^j(P)(0) = \left(\sum_{k=0}^{n} \beta_k w_n^j(Q_k)\right)(0) = \sum_{k=j}^{n} \beta_k Q_{k-j}(0).$$

Maintenant, si $k > j$, alors $k - j > 0$ et le polynôme Q_{k-j} est divisible par le polynôme X. Dans ce cas, $Q_{k-j}(0) = 0$ et si $k = j$, $Q_{k-j}(0) = Q_0(0) = 1$. Finalement, $w_n^j(P)(0) = \beta_j$.
SI $j > n$, tous les $w_n^j(Q_k)$ sont nuls et donc $w_n^j(P) = 0$. On en déduit que $w_n^j(P)(0) = 0$.

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N},\ w_n^j(P)(0) = \left\{ \begin{array}{l} \beta_j \text{ si } j \leq n \\ 0 \text{ si } j > n \end{array} \right. .}$$

9.3. Par suite,

$$\boxed{\forall P \in E_n,\ P = \sum_{k=0}^{n} w_n^k(P)(0) Q_k.}$$

9.4. Notons $\mathcal{B}^* = (Q_k^*)_{0 \leq k \leq n}$ la base duale de la base $\mathcal{B}$. La question 9.3. montre que

$$\boxed{\forall k \in [\![,\ \forall P \in E_n,\ Q_k^*(P) = w_n^k(P)(0).}$$

10. D'après les questions 9.3. et 8.5., $\forall P \in E_n,\ w_n^{n+1}(P) = 0$ et donc $w_n^{n+1} = \theta$. D'autre part, $w_n(Q_n) = Q_{n-n} = Q_0 = 1$.

$$\boxed{w_n^{n+1} = \theta \text{ et } w_n^n(Q_n) = 1.}$$

Partie 2 : Recherche de quelques polynômes minimaux.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E_n)$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, π_f divise χ_f.

2. Recherche de π_{u_n}.
2.1. Pour tout polynôme P de degré au plus n, on a $u_n^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$ et donc

$$\boxed{u_n^{n+1} = \theta.}$$

2.2. $u_n(X^n) = (X^n)^{(n)} = n!$.

$$\boxed{u_n(X^n) = n!.}$$

2.3. π_{u_n} est un diviseur unitaire de $\chi_{u_n} = (-X)^{n+1}$ (d'après la question 6.). Donc, π_{u_n} est de la forme X^m avec $1 \leq m \leq n+1$. Mais d'après la question précédente, $u_n^n \neq \theta$ et donc, si $m \leq n$, le polynôme X^m n'est pas annulateur de u_n. On en déduit que

$$\boxed{\pi_{u_n} = X^{n+1}.}$$

2.4. D'après la question 10. de la partie 1, w_n est comme u_n nilpotent d'indice $n + 1$et donc

$$\boxed{\pi_{w_n} = X^{n+1}.}$$

3. Recherche de π_{v_n}.
3.1. D'après la question précédente, $(v_n - e_n)^{n+1} = w_n^{n+1} = \theta$. Le polynôme $(X-1)^{n+1}$ est donc annulateur de v_n. π_{v_n} est un diviseur unitaire de ce polynôme et donc de la forme $(X-1)^m$ avec $1 \leq m \leq n+1$.

3.2. Mais d'après la question 10. de la partie 1, $(v_n - e_n)^n(Q_n = w_n^n(Q_n) = 1 \neq 0$ et donc $w_n^n \neq \theta$. Ainsi, si $m \leq n$, le polynôme $(X-1)^m$ n'est pas annulateur de v_n. Donc

$$\boxed{\pi_{v_n} = (X-1)^{n+1}.}$$

4. Polynômes annulateurs de u.

4.1. On sait que $a_m \neq 0$.

4.2 Pour $j \in [\![0, m]\!]$, on a

$$u^j\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \left(\frac{X^m}{m!}\right)^{(j)} = \frac{m!}{(m-j)!}\frac{X^{m-j}}{m!} = \frac{X^{m-j}}{(m-j)!},$$

et donc

$$r\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{m} a_j u^j\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{m} a_j \frac{X^{m-j}}{(m-j)!}.$$

$$\boxed{r\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{m} a_j \frac{X^{m-j}}{(m-j)!}.}$$

4.3. Le coefficient constant du polynôme $r\left(\frac{X^m}{m!}\right)$ est a_m. Ce coefficvient n'est pas nul et donc le polynôme $r\left(\frac{X^m}{m!}\right)$ n'est pas le polynôme nul. Mais alors, l'endomorphisme $r = P(u)$ n'est pas l'endomorphisme nul. Ainsi, si P est un polynôme non nul, on a $P(u) \neq \theta$ et on en déduit que

$\boxed{\text{le polynôme nul est le seul polynôme annulateur de } u.}$

5. Polynômes annulateurs de v.

5.1. Soit P un polynôme non nul annulateur de v. P est annulateur de v et donc annulateur de chaque v_n, $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que P est un multiple de $\pi_{v_n} = (X-1)^{n+1}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ (d'après la question 3.).

5.2. En particulier, si P est un polynôme non nul annulateur de v, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(P) \geq n+1$. Ceci est absurde et il n'existe donc pas de polynôme non nul annulateur de v.

$\boxed{\text{Le polynôme nul est le seul polynôme annulateur de } v.}$

6. **6.1.** Soit $P \in E$. $s \circ s(P) = s(s(P)) = s(P(1-X)) = P(1-(1-X)) = P$ et donc

$$\boxed{s^2 = Id_E.}$$

6.2. Ainsi, le polynôme X^2-1 est un polynôme non nul annulateur de s. On en déduit que s admet un polynôme minimal π_s et que π_s est l'un des trois polynômes $X-1$, $X+1$ ou X^2-1. Comme s n'est ni Id_E (car $s(X) = 1-X \neq X$), ni $-Id_E$ (car $s(X) = 1-X \neq -X$), on a $\pi_s = X^2-1$ et donc

$\boxed{\text{les polynômes annulateurs de } s \text{ sont les polynômes de la forme } (X^2-1)Q,\ Q \in \mathbb{R}[X].}$

Partie 3.

1. Puisque $u_n^{n+1} = \theta$, on a $\exp(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_n^k}{k!}$.

Soit alors $m \in [\![0, n]\!]$.

$$(\exp(u_n))(X^m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(X^m)^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\frac{m!}{(m-k)!}X^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} X^{m-k} = (X+1)^m = v_n(X^m).$$

Ainsi, les endomorphismes v_n et $\exp(u_n)$ de E_n coïncident sur une base de E_n et donc

$$\boxed{\exp(u_n) = v_n.}$$

2. 2.1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Le polynôme $u_n(Q_k)$ est un polynôme de degré au plus n et en appliquant la formule de la question 9.3.

$$\begin{aligned}
u_n(Q_k) &= \sum_{j=0}^{n} w_n^j(u_n(Q_k))(0)Q_j \\
&= \sum_{j=0}^{n} u_n(w_n^j(Q_k))(0)Q_j \text{ (car } u_n \text{ et } w_n \text{ commutent d'après la question 5. de la partie 1)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} u_n(Q_{k-j})(0)Q_j = \sum_{m=0}^{k} u_n(Q_m)(0)Q_{k-m}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_n(Q_k) = \sum_{m=0}^{k} u_n(Q_m)(0)Q_{k-m}.}$$

2.2. Déjà, $u_n(Q_0) = 1' = 0$ et donc $u_n(Q_0)(0) = 0$. De même, $u_n(Q_1) = X' = 1$ et donc $u_n(Q_1)(0) = 1$.
Soit alors $k \in [\![1, n]\!]$. $u_n(Q_m)(0) = Q_m'(0)$ est le coefficient de X dans le développement de $Q_m = \dfrac{1}{m!}X(X-1)\dots(X-(m-1))$. Ce coefficient vaut $\dfrac{1}{m!} \times (-1)^{m-1}(m-1)!$ ou encore $\dfrac{(-1)^{m+1}}{m}$ ce qui reste vrai quand $m = 1$.

$$\boxed{\forall m \in [\![0, n]\!],\ u_n(Q_m)(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } m = 0 \\ \dfrac{(-1)^{m+1}}{m} \text{ si } m \geq 1 \end{cases}.}$$

2.3. Puisque $(v_n - e_n)^{n+1} = \theta_n$, la somme $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(v_n - e_n)^m$ existe et de plus

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(v_n - e_n)^m = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(v_n - e_n)^m.$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
u_n(Q_k) &= \sum_{m=0}^{k} u_n(Q_m)(0)Q_{k-m} = \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m+1}}{m} w_n^m(Q_k) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} w_n^m(Q_k) \\
&= \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(v_n - e_n)^m\right)(Q_k).
\end{aligned}$$

D'autre part, $u_n(Q_0) = 0 = \left(\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(v_n - e_n)^m\right)(Q_0)$.

Finalement, les endomorphismes u_n et $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(v_n - e_n)^m$ de E_n coïncident sur une base de E_n et donc

$$\boxed{u_n = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(v_n - e_n)^m.}$$

