

## Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

## Epreuve de Mathématiques B MP

## Exercice I.

1. (a) Soit  $u \in \mathbb{R}$ .

La fonction  $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu)$  est continue sur  $]0, 1[$  et donc localement intégrable sur  $]0, 1[$ .

De plus, quand  $t$  tend vers 1,  $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{t}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2(1-t)}}$  et donc  $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu) = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ . Comme la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$  est intégrable au voisinage de 1, on en déduit que la fonction  $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu)$  est intégrable au voisinage de 1.

Finalement, la fonction  $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu)$  est intégrable sur  $]0, 1[$  et donc  $g(u)$  existe. On a montré que

$g$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Soient  $u \in ]1, +\infty[$  puis  $\alpha \in ]0, 1[$ .

$$\int_{\alpha}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_{\alpha}^1 = \sqrt{1-\alpha^2},$$

et donc

$$\int_{\alpha}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{u}} \Leftrightarrow \sqrt{1-\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{u}} \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 - \frac{1}{u}.$$

Maintenant,  $u > 1$  et donc  $1 - \frac{1}{u} \in ]0, 1[$ . Par suite, l'équation  $\alpha^2 = 1 - \frac{1}{u}$  admet une et une seule solution dans  $]0, 1[$  à savoir  $\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{u}}$ .

$$\forall u > 1, \alpha_u = \sqrt{1 - \frac{1}{u}}.$$

(c) Soit  $u > 1$ .

• La fonction  $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$  est dérivable sur  $]0, \alpha_u[$  et pour  $t \in ]0, \alpha_u[$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right) = 1 \times (1-t^2)^{-1/2} + t \times \left(-\frac{1}{2}\right) (-2t)(1-t^2)^{-3/2} = \frac{(1-t^2) + t^2}{(1-t^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}.$$

• Les deux fonction  $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$  et  $t \mapsto -\frac{\cos(tu)}{u}$  sont de classe  $C^1$  sur le segment  $]0, \alpha_u[$ . On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu) dt &= \left[ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\cos(tu)}{u} \right]_{t=0}^{t=\alpha_u} - \int_0^{\alpha_u} \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}} \times -\frac{\cos(tu)}{u} dt \\ &= -\frac{\alpha_u}{\sqrt{1-\alpha_u^2}} \frac{\cos(u\alpha_u)}{u} + \frac{1}{u} \int_0^{\alpha_u} \frac{\cos(tu)}{(1-t^2)^{3/2}} dt. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
|g(u)| &= \left| \int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu) dt + \int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu) dt \right| \leq \left| \int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu) dt \right| + \int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} |\sin(tu)| dt \\
&\leq \left| \int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu) dt \right| + \int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left| -\frac{\alpha_u}{\sqrt{1-\alpha_u^2}} \frac{\cos(u\alpha_u)}{u} + \frac{1}{u} \int_0^{\alpha_u} \frac{\cos(tu)}{(1-t^2)^{3/2}} dt \right| + \frac{1}{\sqrt{u}} \\
&\leq \frac{\alpha_u}{u\sqrt{1-\alpha_u^2}} + \frac{1}{u} \int_0^{\alpha_u} \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}} dt + \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{\alpha_u}{u\sqrt{1-\alpha_u^2}} + \frac{1}{u} \left[ \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right]_0^{\alpha_u} + \frac{1}{\sqrt{u}} \\
&= \frac{2\alpha_u}{u\sqrt{1-\alpha_u^2}} + \frac{1}{\sqrt{u}}.
\end{aligned}$$

Maintenant,  $1 - \alpha_u^2 = \frac{1}{u}$  et de plus  $0 < \alpha_u < 1$ . On en déduit que

$$|g(u)| \leq \frac{2 \times 1}{u\sqrt{\frac{1}{u}}} + \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{2}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{3}{\sqrt{u}}.$$

$$\forall u > 1, |g(u)| \leq \frac{3}{\sqrt{u}}.$$

2. (a) Une équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon  $\pi$  est  $x^2 + y^2 = \pi^2$ . Pour des ordonnées positives, cette équation s'écrit encore  $y = \sqrt{\pi^2 - x^2}$ .

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}.$$

(b) **Théorème de DIRICHLET.** Si  $g$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique, alors la série de FOURIER de  $g$  converge (normalement) sur  $\mathbb{R}$  et sa somme en un réel  $x$  est  $\frac{g(x^-) + g(x^+)}{2}$ . En particulier, si  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  par morceaux et  $2\pi$ -périodique, la série de FOURIER de  $g$  converge (normalement) vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

Le théorème de DIRICHLET ne s'applique pas à  $f$  car  $f$  n'est pas de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$  (puisque  $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} f'(x) = -\infty$ ).

3. (a)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $2\pi$ -périodique. On peut donc calculer les coefficients de FOURIER de  $f$ . De plus,  $f$  est paire. On en déduit que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $b_n(f) = 0$  et que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\pi^2 - x^2} \cos(nx) dx.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\pi^2 - x^2} \cos(nx) dx \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = 0.$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons déjà  $x = \pi t$ . On obtient  $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\pi^2 - \pi^2 t^2} \cos(n\pi t) \pi dt = 2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cos(n\pi t) dt$ .

Soit alors  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . Les deux fonctions  $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$  et  $t \mapsto \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}$  sont de classe  $C^1$  sur le segment  $[0, 1-\varepsilon]$ . On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{1-t^2} \cos(n\pi t) dt &= \left[ \sqrt{1-t^2} \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^{1-\varepsilon} - \int_0^{1-\varepsilon} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi} dt \\
&= \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2} \frac{\sin(n\pi(1-\varepsilon))}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(n\pi t) dt.
\end{aligned}$$

Quand  $\varepsilon$  tend vers 0, on obtient

$$a_n(f) = 2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cos(n\pi t) dt = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(n\pi t) dt = \frac{2}{n\pi} g(n\pi).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) = \frac{2}{n\pi} g(n\pi).$$

4. (a) La série de FOURIER de  $f$  est la suite de fonctions de terme général  $x \mapsto S_n(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kx)$ . Mais pour tout réel  $x$  et tout entier naturel non nul  $k$ , les questions 1.(c) et 3.(b) fournissent

$$|a_k(f) \cos(kx)| \leq |a_k(f)| = \frac{2}{k\pi} |g(k\pi)| \leq \frac{2}{k\pi} \frac{3}{\sqrt{k\pi}} = \frac{6}{\pi^{3/2} k^{3/2}}.$$

Cette dernière expression est le terme général d'une série numérique convergente (car  $\frac{3}{2} > 1$ ). Ceci montre que la série de fonctions de terme général  $x \mapsto a_k(f) \cos(kx)$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  ou encore que

la série de FOURIER de  $f$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

Ce résultat ne contredit pas 2.(b) car le théorème de DIRICHLET ne dit rien des fonctions qui ne sont pas de classe  $C^1$  par morceaux.

(b) Ainsi, la série de FOURIER de  $f$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  et en particulier uniformément et simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction que l'on note  $g$ . La fonction  $g$  est alors continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ . Par définition de la convergence uniforme, la suite  $(\|S_n(f) - g\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie à partir d'un certain rang et converge vers 0 (où  $\|S_n(f) - g\|_\infty = \sup\{|S_n(f)(x) - g(x)|, x \in \mathbb{R}\}$ ). Maintenant,

$$\|S_n(f) - g\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (S_n(f)(x) - g(x))^2 dx} \leq \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \|S_n(f) - g\|_\infty^2 dx} = \sqrt{2} \|S_n(f) - g\|_\infty.$$

Par suite, on a également  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f) - g\|_2 = 0$  ce qui montre que la suite de fonctions  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la fonction  $g$  en moyenne quadratique.

Maintenant, le théorème de PARSEVAL, appliqué à la fonction  $f$  qui est bien continue par morceaux et  $2\pi$ -périodique, montre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0$ . Enfin, pour tout entier  $n$  on a

$$\|f - g\|_2 \leq \|S_n(f) - f\|_2 + \|S_n(f) - g\|_2,$$

et quand  $n$  tend vers  $+\infty$  on obtient  $\|f - g\|_2 = 0$ . Puisque  $f$  et  $g$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $f = g$  et donc que

la série de FOURIER de  $f$  converge normalement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Exercice II.

1. (a) Puisque  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , le théorème de SCHWARZ permet d'affirmer que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R}^2 &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{(f(x, y))^2} = 0 \text{ (car } f \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}^2) \\ &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{f(x, y)} \right) = 0 \end{aligned}$$

Cette dernière condition équivaut à dire que la fonction  $\alpha : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) / f(x, y)$ , définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  (car  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$ ) est constante quand  $y$  varie à  $x$  fixé (car  $\mathbb{R}^2$  est un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^2$ ).

Ceci équivaut à l'existence d'une fonction  $a$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) / f(x, y) = a(x)$  ou encore telle

que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)f(x, y)$ .

(b) Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$  puis  $f : (x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ .  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$  et pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \varphi'(x)\psi(y) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\varphi(x)\psi(y) = a(x)f(x, y),$$

où  $a = \frac{\varphi'}{\varphi}$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . D'après 1.(a),  $f$  est solution de  $(\mathcal{E})$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Réciproquement, soit  $a$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  puis  $A$  une primitive de  $a$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)f(x, y) &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{-A(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - a(x)e^{-A(x)}f(x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial}{\partial x}(e^{-A}f)(x, y) = 0 \\ &\Rightarrow \exists \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{-A(x)}f(x, y) = \psi(y) \\ &\Leftrightarrow \exists \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = e^{A(x)}\psi(y). \end{aligned}$$

$f$  est alors de la forme  $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$  où  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$ .

Les solutions de  $(\mathcal{E})$  sont les fonctions de la forme  $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$  où  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$ .

Si  $(\varphi, \psi)$  est un couple associé à une solution  $f$  donnée, les couples  $(-\varphi, \psi)$  ou  $(2\varphi, \frac{1}{2}\psi)$  sont d'autres couples associés à la fonction  $f$ . Il n'y a donc pas unicité du couple  $(\varphi, \psi)$  pour une solution  $f$  donnée.

(c) **Existence.** Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , posons  $f(x, y) = \frac{1}{h(0)}g(x)h(y)$ .  $f$  est de la forme du (b) et donc solution de  $(\mathcal{E})$  sur  $\mathbb{R}^2$ . De plus, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, 0) = \frac{1}{h(0)}g(x)h(0) = g(x)$  et pour  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f(0, y) = \frac{1}{h(0)}g(0)h(y) = h(y)$ . Ceci montre l'existence d'une solution au problème posé.

**Unicité.** Soit  $f_1$  une solution du problème posé. D'après (b), il existe deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ . Pour chaque  $x \in \mathbb{R}$ , on doit avoir

$$g(x) = f_1(x, 0) = \varphi(x)\psi(0),$$

et donc nécessairement pour tout réel  $x$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{\psi(0)}g(x)$ . De même, nécessairement pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\psi(y) = \frac{1}{\varphi(0)}h(y)$ .

On en déduit que nécessairement pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f_1(x, y) = \frac{1}{\varphi(0)\psi(0)}g(x)h(y)$ .

Enfin,  $g(0) = f_1(0, 0) = \frac{1}{\varphi(0)\psi(0)}g(0)h(0)$  et donc  $\varphi(0)\psi(0) = h(0)$  puisque  $g(0) \neq 0$ . Finalement, nécessairement  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f_1(x, y) = \frac{1}{h(0)}g(x)h(y) = f(x, y)$  ce qui montre l'unicité d'une solution au problème posé.

**2. (a)** Si la fonction  $f$  présente un maximum local en  $(x_0, y_0)$ , alors en particulier les fonctions  $x \mapsto f(x, y_0)$  et  $y \mapsto f(x_0, y)$  présente un maximum local en  $x_0$  et  $y_0$  respectivement.

Réciproquement, supposons que les fonctions  $x \mapsto f(x, y_0)$  et  $y \mapsto f(x_0, y)$  présente un maximum local en  $x_0$  et  $y_0$  respectivement. Puisque  $f$  est une solution de  $(\mathcal{E})$ , il existe deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  de classe  $C^2$  et ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ . Les deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annulent pas sur  $\mathbb{R}$ . Ces deux fonctions sont donc de signe constant sur  $\mathbb{R}$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Comme  $f$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , les deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont ou bien toutes deux strictement positives sur  $\mathbb{R}$  ou bien toutes deux strictement négatives  $\mathbb{R}$ . Dans ce dernier cas, on écrit  $f = (-\varphi)(-\psi)$  ce qui ramène au cas où  $\varphi$  et  $\psi$  sont strictement positives sur  $\mathbb{R}$ .

En résumé, il existe deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  de classe  $C^2$  et strictement positives sur  $\mathbb{R}$  telles que  $f = \varphi\psi$ .

Par hypothèse, il existe  $r_1 > 0$  et  $r_2 > 0$  tels que

$$\forall x \in ]x_0 - r_1, x_0 + r_1[, f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \text{ et } \forall y \in ]y_0 - r_2, y_0 + r_2[, f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Soit alors  $x \in ]x_0 - r_1, x_0 + r_1[$ . On a  $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$  ce qui s'écrit  $\varphi(x)\psi(x_0) \leq \varphi(x_0)\psi(x_0)$  et donc  $\varphi(x) \leq \varphi(x_0)$  puisque  $\psi(x_0) > 0$ . De même, pour  $y \in ]y_0 - r_2, y_0 + r_2[$ , on a  $\psi(y) \leq \psi(x_0)$ .

Mais alors, pour  $(x, y) \in ]x_0 - r_1, x_0 + r_1[ \times ]y_0 - r_2, y_0 + r_2[$ ,

$$f(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \leq \varphi(x_0)\psi(x_0) = f(x_0, y_0),$$

(puisque les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont strictement positives sur  $\mathbb{R}$ ) ce qui montre que  $f$  a un maximum local en  $(x_0, y_0)$ .

$f$  admet un maximum local en  $(x_0, y_0)$

si et seulement si

la fonction  $x \mapsto f(x, y_0)$  admet un maximum local en  $x_0$  et la fonction  $y \mapsto f(x_0, y)$  admet un maximum local en  $y_0$ .

(b) On en déduit que l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^2$  en lesquels  $f$  présente un maximum local est de la forme  $A \times B$  où  $A = \{x_0 \in \mathbb{R} / \exists y_0 \in \mathbb{R} / \text{la fonction } x \mapsto f(x, y_0) \text{ admet un maximum local en } x_0\}$  (resp.  $B = \{y_0 \in \mathbb{R} / \exists x_0 \in \mathbb{R} / \text{la fonction } y \mapsto f(x_0, y) \text{ admet un maximum local en } y_0\}$ ).

3. (a) Soient  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On a  $F = H \circ G$ .

$$(x, y) \mapsto xy \qquad t \mapsto t + |t|^3$$

$G$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  en tant que polynôme à deux variables.

Ensuite, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $H(t) = \begin{cases} 2t^3 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ .  $H$  est déjà continue sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et pour  $t \neq 0$ ,  $H'(t) =$

$\begin{cases} 6t^2 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$  et  $H''(t) = \begin{cases} 12t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ . Maintenant,  $H'(t)$  et  $H''(t)$  ont une limite réelle en 0 à savoir 0. En résumé,

- $H$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,
- $H$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^*$ ,
- $H'$  et  $H''$  ont une limite réelle quand  $t$  tend vers 0.

D'après un théorème classique d'analyse,  $H$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

$F$  est alors de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  en tant que composée d'une application de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et d'une application de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

$F$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Sur  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy < 0\}$ , on a  $F(x, y) = 0$  et il est immédiat que  $F$  vérifie l'équation ( $\mathcal{E}$ ) sur  $\mathcal{D}$ .

Sur  $\mathcal{D}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$ , on a  $F(x, y) = 2x^3y^3$  et donc

$$F(x, y) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = (2x^3y^3)(18x^2y^2) - (6x^2y^3)(6x^3y^2) = 36(x^5y^5 - x^5y^5) = 0,$$

et  $F$  vérifie aussi l'équation ( $\mathcal{E}$ ) sur  $\mathcal{D}'$ . Finalement,  $F$  vérifie l'équation ( $\mathcal{E}$ ) sur  $\mathbb{R}^2$  privé des deux axes de coordonnées.

Mais alors, par continuité de  $F$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}$  en chaque point de ces axes,  $F$  vérifie l'équation ( $\mathcal{E}$ ) sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier.

$F$  vérifie l'équation ( $\mathcal{E}$ ) sur  $\mathbb{R}^2$ .

(c) Supposons par l'absurde qu'il existe deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ . En particulier

$$\varphi(1)\psi(-1) = F(1, -1) = (-1)^3 + |-1|^3 = 0.$$

Mais si  $\varphi(1) = 0$ , alors  $F(1, 1) = \varphi(1)\psi(1) = 0$  ce qui n'est pas puisque  $F(1, 1) = 2$  et si  $\psi(-1) = 0$  alors  $F(-1, -1) = 0$  ce qui n'est pas puisque  $F(-1, -1) = 2$ . Donc

Il n'existe pas de fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :  
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ .

### Exercice III.

1. (a) On note tout d'abord que  $\pi$  est la projection orthogonale sur le plan vectoriel  $\vec{\Pi}$ . Notons  $\pi'$  la projection orthogonale sur la droite vectorielle  $\vec{\Delta}$ .

Soient A et B deux points du plan. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$AB^2 = \|\vec{AB}\|^2 = \|\pi(\vec{AB})\|^2 + \|\pi'(\vec{AB})\|^2 \geq \|\pi(\vec{AB})\|^2 = \|\overrightarrow{p(A)p(B)}\|^2 = p(A)p(B)^2,$$

avec égalité si et seulement si  $\pi'(\vec{AB}) = 0$  ou encore  $\vec{AB} \in \vec{k}^\perp$ .

$$\forall (A, B) \in E^2, p(A)p(B) \leq AB, \\ \forall (A, B) \in E^2, p(A)p(B) = AB \Leftrightarrow \vec{AB} \in \vec{k}^\perp.$$

(b) D est l'ensemble des  $A + \lambda\vec{u}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et donc  $p(D)$  est l'ensemble des  $p(A) + \lambda\pi(\vec{u})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Si  $\vec{u}$  est colinéaire à  $\vec{k}$ ,  $\pi(\vec{u}) = \vec{0}$  et dans ce cas,  $p(D)$  est le singleton  $\{p(A)\}$ .
- Si  $\vec{u}$  n'est pas colinéaire à  $\vec{k}$ ,  $\pi(\vec{u}) \neq \vec{0}$  et dans ce cas,  $p(D)$  est la droite passant par le point  $p(A)$  et dirigée par le vecteur  $\pi(\vec{u})$ .

Si D est parallèle à  $\Delta$ ,  $p(D)$  est le point  $p(A)$ .  
Si D n'est pas parallèle à  $\Delta$ ,  $p(D)$  est la droite passant par  $p(A)$  et dirigée par  $\pi(\vec{u})$ .

2. (a) Puisque D n'est pas parallèle à  $\Delta$ ,  $p(D)$  est une droite d. Notons  $p|_D$  la restriction de  $p$  à D.  $p|_D$  transforme l'espace affine D de dimension 1 en d qui est un espace affine de même dimension. On sait alors que  $p$  réalise une bijection de D sur d. En particulier, puisque  $h \in d = p(D)$ , il existe un et un seul point H de D tel que  $p(H) = h$ .

Il existe un et un seul point H de D tel que  $p(H) = h$ .

(b) Si les quatre points O, h, H et H' sont deux à deux distincts, le quadrilatère OhH'H a trois angles droits et est donc un rectangle. En particulier,  $\vec{Oh} = \vec{H'H}$  et  $Oh = HH'$ . Ce dernier résultat reste vrai quand  $h = O$  (et  $H = H'$ ) ou  $h = H$  (et  $O = H'$ ).

Soit alors  $(M, N) \in \Delta \times D$ . On a

$$MN^2 = (\vec{MH} + \vec{HH'} + \vec{H'N})^2 = (\vec{HH'} + (\vec{MH} + \vec{H'N}))^2 \quad (*).$$

Déjà,  $\vec{HH'} \cdot \vec{H'N} = 0$  car  $\vec{H'N} \in \vec{\Delta}$  et  $\vec{HH'} \in \vec{\Delta}^\perp$ .

Ensuite, notons  $\vec{u}$  un vecteur directeur de d puis P le plan contenant d et de direction  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{k})$ . Puisque  $\vec{P}$  contient  $\vec{k}$ , P est parallèle à  $\Delta$  et donc, puisque P contient d, P contient également D. Maintenant, le vecteur  $\vec{Oh}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{k}$  et donc est un vecteur normal au plan P. Ce vecteur est alors orthogonal à toute droite de ce plan et en particulier à la droite D. Puisque les points M et H sont sur D, on en déduit que  $\vec{HH'} \cdot \vec{MH} = \vec{Oh} \cdot \vec{MH} = 0$ .

Finalement, le vecteur  $\vec{HH'}$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{MH}$  et  $\vec{H'N}$  et donc au vecteur  $\vec{MH} + \vec{H'N}$ . L'égalité (\*) et le théorème de PYTHAGORE fournissent alors

$$MN^2 = HH'^2 + (\vec{MH} + \vec{H'N})^2 \geq HH'^2.$$

On a montré que

$$\forall (M, N) \in D \times \Delta, MN \geq HH' = Oh.$$

3. (a) Une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$  est  $x^2 + y^2 = 1$ . Soit alors  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  un point de  $\mathcal{C}$  c'est-à-dire tel que  $x_0^2 + y_0^2 = 1$ . La règle de dédoublement des termes fournit une équation du plan tangent à  $\mathcal{C}$  en  $M_0$  :

$$xx_0 + yy_0 = 1.$$

Les plans tangents à  $\mathcal{C}$  sont donc les plans d'équation  $xx_0 + yy_0 = 1$  avec  $x_0^2 + y_0^2 = 1$  ou encore les plans d'équation  $x \cos \omega + y \sin \omega = 1$  avec  $\omega \in ]-\pi, \pi]$ .

Les plans tangents à  $\mathcal{C}$  sont les plans d'équation  $x \cos \omega + y \sin \omega = 1$ ,  $\omega \in ]-\pi, \pi]$ .

(b) Soit (D) une droite telle que  $d(\Delta, D) = 1$ .

**1er cas.** Si D est parallèle à  $\Delta$ , alors D est une génératrice du cylindre  $\mathcal{C}$  et est bien sûr contenue dans un plan tangent à  $\mathcal{C}$ . Plus précisément, D admet un système d'équations de la forme  $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ . La distance de D à  $\Delta$  est par exemple la distance du point O au point  $(a, b, 0)$  et la condition  $d(D, \Delta) = 1$  se traduit par  $a^2 + b^2 = 1$ . Par suite, il existe un réel  $\omega \in ]-\pi, \pi]$  tel que  $a = \cos \omega$  et  $b = \sin \omega$  de sorte que la droite D admet un système d'équations de la forme  $\begin{cases} x = \cos \omega \\ y = \sin \omega \end{cases}$ . D est alors contenue dans le plan d'équation  $x \cos \omega + y \sin \omega = 1$  qui est un plan tangent à  $\mathcal{C}$  d'après la question précédente.

**2ème cas.** Si D n'est pas parallèle à  $\Delta$ , avec les notations de la question 2., on a  $HH' = 1$ . Les coordonnées de  $H'$  sont de la forme  $(0, 0, c)$  et donc les coordonnées de H sont de la forme  $(\cos \omega, \sin \omega, c)$ . Puisque le vecteur  $\overrightarrow{HH'}$  est orthogonal à D, D est contenue dans le plan passant par H et de vecteur normal  $\overrightarrow{HH'}$ . Une équation de ce plan est  $\cos \omega(x - \cos \omega) + \sin \omega(y - \sin \omega) + 0(z - c) = 0$  ou encore  $x \cos \omega + y \sin \omega = 1$ . De nouveau, ce plan est un plan tangent à  $\mathcal{C}$ .

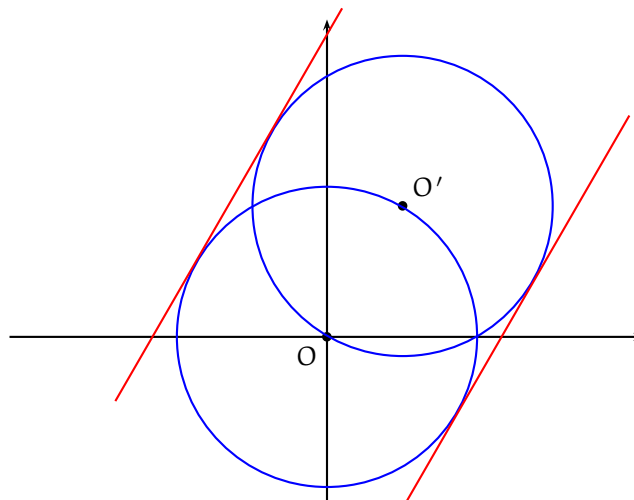
Toute droite D telle que  $d(D, \Delta) = 1$  est contenue dans un plan tangent à  $\mathcal{C}$ .

(c) La droite D d'équations  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$  est contenue dans le plan d'équation  $x = 1$  qui est un plan tangent à  $\mathcal{C}$  ( $\omega = 0$ ). D est parallèle à  $\Delta$  et la distance de D à  $\Delta$  est par exemple la distance de O au point  $(1, 1, 0)$  et est donc égale à  $\sqrt{2}$ . Donc, une droite D contenue dans un plan tangent à  $\mathcal{C}$  ne vérifie pas nécessairement  $d(D, \Delta) = 1$ .

4. (a) Travaillons dans le plan  $\pi$  avec deux coordonnées. L'équation générale d'une tangente  $T_\omega$  au cercle  $\Gamma$  est  $x \cos \omega + y \sin \omega = 1$ ,  $\omega \in ]-\pi, \pi]$  (par le même travail que celui effectué en dimension 3 en 3.(a)). Maintenant, les coordonnées du point  $O'$  sont de la forme  $(\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ . Par suite,

$$\begin{aligned} T_\omega \text{ tangente à } \Gamma' &\Leftrightarrow d(O', T_\omega) = 1 \Leftrightarrow \frac{|\cos \theta \cos \omega + \sin \theta \sin \omega - 1|}{\sqrt{\cos^2 \omega + \sin^2 \omega}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos(\theta - \omega) - 1 = 1 \text{ ou } \cos(\theta - \omega) - 1 = -1 \Leftrightarrow \cos(\theta - \omega) = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega \in \theta + \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi deux tangentes communes : les deux droites  $t_1$  et  $t_2$  d'équations respectives  $-x \sin \theta + y \cos \theta = 1$  et  $x \sin \theta - y \cos \theta = 1$ . Ces tangentes sont les tangentes parallèles à la droite  $(OO')$ .



(b) Soit  $D$  une droite telle que  $d(D, \Delta) = d(D, \Delta') = 1$ . D'après la question 3.(a), la droite  $D$  est contenue dans un plan tangent à  $\mathcal{C}$  et aussi dans un plan tangent à  $\mathcal{C}'$ .

**1er cas.** Si la droite  $D$  n'est pas parallèle aux droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ ,  $p(D)$  est une droite de  $\Pi$  tangente à  $\Gamma$  et à  $\Gamma'$  et est donc l'une des deux droites  $t_1$  ou  $t_2$ .  $D$  est donc contenue dans le plan  $P_1$  contenant  $t_1$  et parallèle à  $\Delta$  et  $\Delta'$  ou dans le plan  $P_2$  contenant  $t_2$  et parallèle à  $\Delta$  et  $\Delta'$ . Réciproquement, si  $D$  est une droite de  $P_1$  non parallèle à  $\Delta$  et  $\Delta'$ , avec les notations de la question 2., on a  $OH_1 = Oh'_1 = 1$  et donc  $d(D, \Delta) = d(D, \Delta') = 1$ . De même, si  $D$  est dans  $P_2$ .

**2ème cas.** Si  $D$  est parallèle à  $\Delta$  et  $\Delta'$ ,  $D$  coupe  $\Pi$  en un point  $M$  tel que  $OM = O'M = 1$ . Le point  $M$  est donc nécessairement l'un des deux points d'intersection  $A$  ou  $B$  des cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ . Réciproquement, si  $D$  est la droite passant par  $A$  et parallèle à  $\Delta$  et  $\Delta'$ , alors  $d(D, \Delta) = OA = 1$  et  $d(D, \Delta') = OB = 1$ . De même, si  $D$  passe par  $B$ .

Les droites solutions sont donc :

- les deux droites parallèles à  $\Delta$  et  $\Delta'$  passant par les points d'intersection de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ ,
- les droites non parallèles à  $\Delta$  et  $\Delta'$  et contenues dans les plans contenant les tangentes communes à  $\Delta$  et  $\Delta'$  et parallèles à  $\Delta$  et  $\Delta'$ .