

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

Première exercice

1. Étude d'un exemple.

(a) Soient x et y deux réels. $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - xy = \frac{(x-y)^2}{2} \geq 0$ avec égalité si et seulement si $y = x$.

De même $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy = \frac{(x+y)^2}{2} \geq 0$ avec égalité si et seulement si $y = -x$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ et } xy = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Leftrightarrow y = x.$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq xy \text{ et } -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = xy \Leftrightarrow y = -x.$$

(b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

$$xy + z^2 \geq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z^2 \geq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

puis en divisant par le réel strictement positif $x^2 + y^2 + z^2$, on obtient $r(x, y, z) \geq -\frac{1}{2}$.

$-\frac{1}{2}$ est donc un minorant de la fonction r sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. De plus, $r(-1, 1, 0) = -\frac{1}{2}$ et donc

$$f \text{ admet un minimum sur } \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \text{ égal à } -\frac{1}{2}.$$

(c) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. $xy + z^2 \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$ et donc $r(x, y, z) \leq 1$. De plus, $r(0, 0, 1) = 1$ et donc

$$f \text{ admet un maximum sur } \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \text{ égal à } 1.$$

(d) $\chi_A = (1 - X)(X^2 - \frac{1}{4})$ et donc $\text{Sp}(A) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. Le minimum et le maximum de r sont donc respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de A .

2. Étude du cas général.

(a) $f(\vec{w}) = a_1\lambda_1\vec{u}_1 + a_2\lambda_2\vec{u}_2 + a_3\lambda_3\vec{u}_3$ et donc, puisque la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est orthonormée

$$\begin{aligned} \frac{\langle f(\vec{w}), \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2} &= \frac{\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \lambda_3 a_3^2}{\|\vec{w}\|^2} = \frac{\lambda_3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (\lambda_1 - \lambda_3)a_1^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)a_2^2}{\|\vec{w}\|^2} \\ &= \lambda_3 + \frac{a_1^2(\lambda_1 - \lambda_3)}{\|\vec{w}\|^2} + \frac{a_2^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{\|\vec{w}\|^2} \end{aligned}$$

(b) Soit $\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Puisque $\lambda_1 - \lambda_3 < 0$ et $\lambda_2 - \lambda_3 < 0$, on a $\frac{\langle f(\vec{w}), \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2} \leq \lambda_3$. Ceci montre que λ_3 est un majorant de r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. De

plus, $\frac{\langle f(\vec{u}_3), \vec{u}_3 \rangle}{\|\vec{u}_3\|^2} = \frac{\langle \lambda_3 \vec{u}_3, \vec{u}_3 \rangle}{\|\vec{u}_3\|^2} = \lambda_3$. Ainsi, λ_3 est un majorant atteint et donc le maximum de la fonction r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

$$\lambda_3 \text{ est le maximum de la fonction } r_f \text{ sur } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$$

(c) Les valeurs propres de $-f$ sont $-\lambda_1, -\lambda_2$ et $-\lambda_3$. Ces valeurs propres vérifient $-\lambda_3 < -\lambda_2 < -\lambda_1$. D'après la question précédente, le maximum de r_{-f} sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ est $-\lambda_1$. Mais il est clair que $r_{-f} = -r_f$ et donc le maximum de $-r_f$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ est $-\lambda_1$ ou encore λ_1 est le minimum de r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

λ_1 est le minimum de la fonction r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

(d) On munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne usuelle.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice A de la question 1.(d). On note $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Pour $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathbb{R}^3$, $f(\vec{w}) = \frac{1}{2}(x\vec{j} + y\vec{i}) + z\vec{k}$ puis $\langle f(\vec{w}), \vec{w} \rangle = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}yx + z^2 = xy + z^2$ et finalement, si de plus $\vec{w} \neq \vec{0}$,

$$r_f(\vec{w}) = \frac{xy + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = r(x, y, z).$$

On retrouve alors le fait que le minimum et le maximum de r sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de f .

3. Une application.

(a) $\chi_f = (-1 - X) \begin{vmatrix} 1 - X & 2 \\ 2 & 4 - X \end{vmatrix} = (-1 - X)(X^2 - 5X) = -(X + 1)X(X - 5).$

$\text{Sp}(f) = (-1, 0, 5).$

En particulier, f admet trois valeurs propres $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 5$ telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

- Il est clair que $\text{Ker}(f + \text{Id}) = \text{Vect}(\vec{e}_1)$ où $\vec{u}_1 = (1, 0, 0) = \vec{i}$.
- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2z.$$

Donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(\vec{u}_2)$ où $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{j} - \vec{k})$.

- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(f - 5\text{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} -6x = 0 \\ -4y + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2y.$$

Donc $\text{Ker}(f - 5\text{Id}) = \text{Vect}(\vec{u}_3)$ où $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{j} + 2\vec{k})$.

(b) D'après les questions 2.(b) et 2.(c), le minimum de r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ est -1 et le maximum de r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ est 5 . Pour $\vec{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, on a

$$\langle f(\vec{w}), \vec{w} \rangle = \langle -x\vec{i} + y(\vec{j} + 2\vec{k}) + z(2\vec{j} + 4\vec{k}), x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \rangle = -x^2 + y(y + 2z) + z(2y + 4z) = -x^2 + y^2 + 4z^2 + 4yz,$$

et donc

$$r_f(\vec{w}) = \frac{-x^2 + y^2 + 4z^2 + 4yz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Par suite,

$$r_f(\vec{w}) = -1 \Leftrightarrow -x^2 + y^2 + 4z^2 + 4yz = -x^2 - y^2 - z^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 4yz + 5z^2 = 0 \Leftrightarrow 2(y + z)^2 + 3z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0 = y.$$

Les vecteurs \vec{w} tels que $r_f(\vec{w}) = -1$ sont les vecteurs non nuls colinéaires à \vec{u}_1 .

De même,

$$r_f(\vec{w}) = 5 \Leftrightarrow -x^2 + y^2 + 4z^2 + 4yz = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 \Leftrightarrow 6x^2 + 4y^2 - 4yz + z^2 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + (2y - z)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } z = 2y.$$

Les vecteurs \vec{w} tels que $r_f(\vec{w}) = 5$ sont les vecteurs non nuls colinéaires à \vec{u}_3 .

(c) Soit $\vec{w} = (x, y, z) \in P$. D'après la question précédente

$$r_f(\vec{w}) = \frac{-x^2 + y^2 + 4z^2 + 4yz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{(y + 2z)^2 - x^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{(x + y + 2z)(-x + y + 2z)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{-x + y + 2z}{x^2 + y^2 + z^2} = g(x, y, z).$$

(d) Déjà, g est minorée par -1 et majorée par 5 sur P .

De plus, puisque $1 + 0 + 0 = 1$, le vecteur \vec{u}_1 est dans P et on a $g(\vec{u}_1) = r_f(\vec{u}_1) = -1$. Donc, g admet un minimum sur P égal à -1 .

De même, puisque $0 + \frac{1}{5} + 2 \times \frac{2}{5} = 1$, le vecteur $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{u}_3$ est dans P et on a $g\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{u}_3\right) = r_f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{u}_3\right) = 5$. Donc, g admet un maximum sur P égal à 5 .

g admet sur P un minimum et un maximum respectivement égaux à -1 et 5 .

Les points de P en lesquels le minimum est atteint sont les $(t, 0, 0)$ tels que $t + 0 + 2 \times 0 = 1$ ou encore $t = 1$. Donc g atteint son minimum en un point de P et un seul, le point $(1, 0, 0)$.

Les points de P en lesquels le maximum est atteint sont les $(0, t, 2t)$ tels que $0 + t + 2 \times 2t = 1$ ou encore $t = \frac{1}{5}$. Donc g atteint son maximum en un point de P et un seul, le point $\left(0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

Deuxième exercice

1. Puisque F est de classe C^2 sur A , le théorème de SCHWARZ permet d'affirmer que $\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}$.

(a) Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $[0, +\infty[$.

Pour $(x, t) \in [0, 1] \times [a, b]$, posons $g(x, t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right]$.

Pour $t \in [a, b]$, on a donc $E_F(t) = \int_0^1 g(x, t) dx$.

• Puisque F est de classe C^2 sur A , g est dérivable par rapport à t sur $[0, 1] \times [a, b]$. De plus, pour $(x, t) \in [0, 1] \times [a, b]$,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}(x, t)$$

• Pour tout réel $t \in [a, b]$, les fonctions $x \mapsto g(x, t)$ et $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x, t)$ sont continues sur le segment $[0, 1]$ et donc intégrables sur ce segment.

• La fonction $\frac{\partial g}{\partial t}$ est continue sur le compact $[0, 1] \times [a, b]$ et donc bornée sur ce compact. On note M un majorant de la fonction $\left| \frac{\partial g}{\partial t} \right|$ sur $[0, 1] \times [a, b]$ puis pour $x \in [0, 1]$, posons $\varphi(x) = M$. φ est continue et donc intégrable sur le segment $[0, 1]$ et vérifie $\forall (x, t) \in [0, 1] \times [a, b], \left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \right| \leq \varphi(x)$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme (théorème de LEIBNIZ), la fonction E_F est de classe C^1 sur $[a, b]$ et

$\forall t \in [a, b], E'_F(t) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) dx$. Ceci étant vrai pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $[0, +\infty[$,

E_F est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

(b) Sur A , on a $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}$. Par suite,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial t} \right),$$

et donc, pour $t \in [0, +\infty[$,

$$E'_F(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial t} \right) (x, t) dx = \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\partial F}{\partial x}(1, t) \frac{\partial F}{\partial t}(1, t) - \frac{\partial F}{\partial x}(0, t) \frac{\partial F}{\partial t}(0, t).$$

$$\forall t \in [0, +\infty[, E'_F(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(1, t) \frac{\partial F}{\partial t}(1, t) - \frac{\partial F}{\partial x}(0, t) \frac{\partial F}{\partial t}(0, t).$$

2.

(a) F est de classe C^2 sur A et pour $(x, t) \in A$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, t) = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x, t) \right) - \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x, t) \right) = 0$$

Donc

F satisfait (1).

(b) Pour $t \geq 0$,

$$E'_F(t) = \frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial x}(1, t) \frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial t}(1, t) - \frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial x}(0, t) \frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial t}(0, t).$$

Or, $(f_1 - f_2)(1, t) = \beta(t) - \beta(t) = 0$ et donc

$$\frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial t}(1, t) = \frac{d}{dt} ((f_1 - f_2)(1, t)) = 0.$$

De même, $\frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial t}(0, t) = 0$ et finalement

$\forall t \geq 0, E'_F(t) = 0.$

On en déduit que E_F est constante sur $[0, +\infty[$.

(c) Pour $x \in [0, 1]$,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, 0) = h(x) - h(x) = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial x}(x, 0) = \frac{d}{dx}(g - g)(x) = 0.$$

Donc $E_F(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 (0 + 0) dx = 0$ puis d'après (b), E_F est la fonction nulle. Mais alors, pour tout $t \geq 0$, la fonction

$x \mapsto \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right)^2$ est nulle sur A (fonction continue, positive, d'intégrale nulle). On en déduit que les fonctions

$\frac{\partial F}{\partial t}$ et $\frac{\partial F}{\partial x}$ sont nulles sur A puis que F est constante sur A (car A est un convexe de \mathbb{R}^2). Comme $F(0, 0) = g(0) - g(0) = 0$, on a montré que F est nulle sur A ou encore $f_1 = f_2$.

(S) possède au plus une solution.

3. On note M un majorant de la suite $(|a_n|)$.

(a) Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $h_n(x) = \pi \frac{a_n}{n^3} \sin(n\pi x)$.

Pour tous $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|h_n(x)| \leq \frac{\pi M}{n^3}$. Or la série numérique de terme général $\frac{\pi M}{n^3}$, $n \geq 1$, converge et on en déduit que la série de fonctions h_n converge normalement sur \mathbb{R} . Comme chaque fonction h_n est continue sur \mathbb{R} , on a montré que

h est définie et continue sur $[0, 1]$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(t) = \frac{a_n}{n^4} \sin(n\pi x) \sin(n\pi t)$.

- Chaque fonction f_n est de classe C^2 sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'_n(t) = \pi \frac{a_n}{n^3} \sin(n\pi x) \cos(n\pi t)$ et $f''_n(t) = -\pi^2 \frac{a_n}{n^2} \sin(n\pi x) \sin(n\pi t)$.
- Comme en (a), les séries de fonctions de termes généraux respectifs f'_n et f''_n convergent normalement sur \mathbb{R} . D'après le théorème de dérivation terme à terme appliqué deux fois, la fonction $t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4} \sin(n\pi x) \sin(n\pi t)$ est de classe C^2 sur

$$\mathbb{R} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4} \sin(n\pi x) \sin(n\pi t) \right) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2} \sin(n\pi x) \sin(n\pi t).$$

De même, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4} \sin(n\pi x) \sin(n\pi t)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4} \sin(n\pi x) \sin(n\pi t) \right) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2} \sin(n\pi x) \sin(n\pi t).$$

Les résultats précédents entraînent en particulier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et de plus

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2} \sin(n\pi x) \sin(n\pi t).$$

(c) D'après la question précédente, f satisfait (5).

Ensuite,

- pour $x \in [0, 1]$, $f(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4} \sin(n\pi x) \sin(0) = 0$.
- pour $x \in [0, 1]$, $\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^3} \sin(n\pi x) \cos(0) = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^3} \sin(n\pi x) = h(x)$.
- pour $t \in \mathbb{R}$, $f(0, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4} \sin(0) \sin(n\pi t) = 0$.
- pour $t \in \mathbb{R}$, $f(1, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4} \sin(n\pi) \sin(n\pi t) = 0$.

f satisfait donc aux conditions (5), (6) et (7).

Troisième exercice

1. Question préliminaire.

(a) Soient m un minorant de f' sur $[a, b[$ puis $M = -m$.

g est dérivable sur $[a, b[$ et pour $t \in [a, b[$,

$$g'(t) = f'(t) + M \geq m - m = 0.$$

Avec ce choix de M , g est croissante sur $[a, b[$.

(b) D'autre part, f est majorée sur $[a, b[$ et il en est de même de la fonction $t \mapsto Mt$ (un majorant est Mb).

En résumé, la fonction g est croissante et majorée sur $[a, b[$. g admet donc une limite réelle ℓ quand t tend vers b par valeurs inférieures. Mais alors, puisque $\forall t \in [a, b[$, $f(t) = g(t) - Mt$, $f(t)$ tend vers le réel $\ell - Mb$ quand t tend vers b par valeurs inférieures. On a montré que

f a une limite réelle en b .

2.

(a) u est dérivable sur I et,

$$u' = 2(X'X + Y'Y) = 2[(-X + XY)X + (-2Y - X^2)Y] = 2[-X^2 - 2Y^2] \leq 0.$$

Donc

u est décroissante sur I .

(b) ($t_0 = 0 \in [0, \beta[$ et donc $\beta > 0$).

Sur I , u est décroissante positive et donc u est majorée par $u(0)$. Mais alors, $|X| \leq \sqrt{X^2 + Y^2} \leq \sqrt{u(0)}$ et de même, $|Y| \leq \sqrt{u(0)}$. Les fonctions X et Y sont donc bornées sur I .

Les fonctions $X' = -X + XY$ et $Y' = -2Y - X^2$ sont aussi bornées sur I (un majorant de $|X'|$ sur I est $\sqrt{u(0)} + u(0)$ et un majorant de $|Y'|$ sur I est $2\sqrt{u(0)} + u(0)$).

Les fonctions X , Y , X' et Y' sont bornées sur I .

(c) La question préliminaire permet alors d'affirmer que

Les fonctions X et Y admettent une limite réelle en β .

(d) Vérifions que la fonction X_2 est de classe C^1 sur $] \alpha, \beta_1[$.

• X est de classe C^1 sur $] \alpha, \beta[$ et X_1 est de classe C^1 sur $[\beta, \beta_1[$. Donc X_2 est de classe C^1 sur $] \alpha, \beta[$ et $[\beta, \beta_1[$.

• $\lim_{\substack{t \rightarrow \beta \\ x < \beta}} X_2(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow \beta \\ x < \beta}} X(t) = x_1 = X_1(\beta) = X_2(\beta)$ et donc X_2 est continue à gauche en β . On en déduit que X_2 est continue sur $] \alpha, \beta_1[$.

• $\lim_{\substack{t \rightarrow \beta \\ x < \beta}} X_2'(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow \beta \\ x < \beta}} (-X(t) + X(t)Y(t)) = -x_1 + x_1 y_1 = X_1'(\beta) = (X_2)'_d(\beta)$. Ainsi X_2 est continue sur $] \alpha, \beta[$, de classe C^1 sur $] \alpha, \beta[$ et $\lim_{\substack{t \rightarrow \beta \\ x < \beta}} X_2'(t)$ existe et est finie. D'après un théorème classique d'analyse, X_2 est de classe C^1 sur $] \alpha, \beta[$ et

en particulier, X_2 est dérivable à gauche en β avec $(X_2)'_g(\beta) = \lim_{\substack{t \rightarrow \beta \\ x < \beta}} X_2'(t) = (X_2)'_d(\beta)$. On en déduit encore que X_2 est dérivable en β et que X_2' est continue en β .

Finalement, X_2 est de classe C^1 sur $] \alpha, \beta_1[$. De même, Y_2 est de classe C^1 sur $] \alpha, \beta_1[$.

Ainsi, (I_1, X_2, Y_2) est une solution de (S_1) . Mais les fonctions X_2 et Y_2 coïncident avec les fonctions X et Y sur I . En particulier $X_2(t_0) = X(t_0) = x_0$ et $Y_2(t_0) = Y(t_0) = y_0$. Donc (I_1, X_2, Y_2) est une solution de (S) telle que $I \subsetneq I_1$. Ceci contredit le caractère maximal de (I, X, Y) et il était donc absurde de supposer β réel.

$\beta = +\infty$.

3.

(a) v est dérivable sur I et pour $t \in I$,

$$v'(t) = e^{2t}(2u(t) + u'(t)) = e^{2t}(2X^2(t) + 2Y^2(t) - 2X^2(t) - 4Y^2(t)) = -2Y^2(t)e^{2t} \leq 0.$$

Donc

v est décroissante sur I .

(b) Par suite, pour $t \geq 0$, on a

$$u(t) = e^{-2t}v(t) \leq e^{-2t}v(0) = e^{-2t}u(0) = (x_0^2 + y_0^2)e^{-2t}.$$

Donc, pour $t \geq 0$, $0 \leq u(t) \leq (x_0^2 + y_0^2)e^{-2t}$. Comme $(x_0^2 + y_0^2)e^{-2t}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$. Mais alors, puisque pour $t \geq 0$ on a $0 \leq |X(t)| \leq u(t)$ et $0 \leq |Y(t)| \leq u(t)$, on a encore $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (X(t), Y(t)) = (0, 0).$$

4. Supposons α réel.

Pour $t \in I =]\alpha, +\infty[$, posons $w(t) = e^{4t}u(t)$. w est dérivable sur I et pour $t \in I$,

$$w'(t) = e^{4t}(4u(t) + u'(t)) = e^{4t}(4X^2(t) + 4Y^2(t) - 2X^2(t) - 4Y^2(t)) = 2X^2(t)e^{4t} \geq 0.$$

La fonction w est donc croissante sur I . En particulier, pour $t \in]\alpha, 0]$, $0 \leq w(t) \leq w(0) = u(0)$ et donc $0 \leq u(t) = w(t)e^{-4t} \leq u(0)e^{-4\alpha}$. Ainsi, la fonction u est bornée sur $] \alpha, 0]$.

Mais alors, comme en 2.(b), les fonctions X , Y , X' et Y' sont bornées sur $] \alpha, 0]$ puis comme en 2.(c), les fonctions X et Y admettent une limite réelle en α et enfin, comme en 2.(d), on peut construire une solution de (S) sur un intervalle contenant strictement I ce qui contredit le caractère maximal de (I, X, Y) . Donc

$$\alpha = -\infty.$$