Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PSI

Première exercice

1°) Théorème de Rolle. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $f(a)=f(b)$ alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

2°) Notons x_1, ..., x_p, p réels de I tels que $x_1<x_2<\ldots<x_p$ et h s'annule en chaque x_i, $1\leq i\leq p$.
Alors, h vérifie le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[x_i,x_{i+1}]$, $1\leq i\leq p-1$, et donc h' s'annule au moins une fois dans chaque intervalle $[x_i,x_{i+1}]$, $1\leq i\leq p-1$. On en déduit que h' s'annule en au moins $p-1$ réels deux à deux distincts de I.

3°) La fonction $h\ :\ x\mapsto x^{-30}a(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$, $h'(x)=-150x^{-51}-40x^{-41}-80x^{-21}-20x^{-11}+0=b(x)$.
Si la fonction a s'annule au moins 5 fois dans $]0,+\infty[$, il en est de même de la fonction h. La question précédente montre alors que $h'=b$ s'annule au moins 4 fois dans $]0,+\infty[$ ce qui n'est pas. Donc a s'annule u plus 4 fois dans $]0,+\infty[$.

Remarque. La fonction b est strictement négative sur $]0,+\infty[$ et en particulier ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.

4°) Montrons le résultat par récurrence.

• Le résultat est clair pour $n=1$ car la fonction $f_1\ :\ x\mapsto\lambda_1x^{\alpha_1}$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.
• Soit $n\geq 1$. Supposons le résultat acquis pour n.
Soient $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\alpha_1<\ldots<\alpha_n<\alpha_{n+1}$ et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$.
Pour $x>0$, posons $f_{n+1}(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kx^{\alpha_k}$ puis $g_{n+1}(x)=x^{-\alpha_{n+1}}f_{n+1}(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kx^{\alpha_k-\alpha_{n+1}}$.

g_{n+1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$, $g'_{n+1}(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k(\alpha_k-\alpha_{n+1})x^{\alpha_k-\alpha_{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(\alpha_k-\alpha_{n+1})x^{\alpha_k-\alpha_{n+1}}$.
Puisque $\alpha_1-\alpha_{n+1}<\ldots<\alpha_n-\alpha_{n+1}$, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que g'_{n+1} s'annule au plus $n-1$ fois sur $]0,+\infty[$. La question 2° permet alors d'affirmer que g_{n+1} s'annule au plus n fois dans $]0,+\infty[$. Puisque d'autre part, $x^{-\alpha_{n+1}}$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$, on en déduit que la fonction f_{n+1} s'annule au plus n fois sur $]0,+\infty[$.

Le résultat est démonté par récurrence.

5°) La question précédente appliquée à $n=4$ montre déjà que P a au plus trois racines réelles strictement positives. De même, le polynôme $P(-X)=X^{400}+7X^{201}+4X^{101}+1$ a au plus 3 racines réelles strictement positives ou encore le polynôme P a au plus 3 racines strictement négatives. Enfin, 0 n'est pas racine de P et donc P a au plus 6 racines réelles.

Remarque. Le polynôme P est strictement positif sur $]-\infty,0]$ et n'a donc pas de racine réelle négative. P a donc au plus 3 racines réelles, toutes strictement positives.

Deuxième exercice

Partie A.

1°) a) Puisque S est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, les λ_i sont des réels positifs.
On peut donc poser $M=D'P$ où $D'=\text{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$. On a $D'^2=D$ puis

$$^tMM={}^t(D'P)D'P={}^tP^tD'D'P={}^tPD'^2P={}^tPDP=S.$$

$$\boxed{\forall S\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})/\ S={}^tMM.}$$

(b) Soit $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $X'=MX=(x_i)_{1\leq i\leq n}$. On rappelle que ${}^tX'X'=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i'^2=\|X'\|^2$ et donc

$$^tXSX={}^tX^tMMX={}^t(MX)MX=\|MX\|^2\geq 0.$$

$$\boxed{\forall S\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX\geq 0.}$$

(c) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, notons e_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (la i-ème composante de e_i est 1 et les autres composantes sont nulles.
Pour $X = (x_j)_{1\leq j\leq n}$, on a

$$^tXSX = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} s_{j,k}x_k = \sum_{1\leq j,k\leq n} x_jx_ks_{j,k}.$$

En particulier, pour $i \in [\![1,n]\!]$ donné puis $X = e_i$ on obtient

$$0 \leq {}^te_iSe_i = \sum_{1\leq j,k\leq n} \delta_{j,i}\delta_{i,k}s_{j,k} = s_{i,i}.$$

$$\boxed{\forall S = (s_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ s_{i,i} \geq 0.}$$

2°) a) Puisque S est dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, les λ_i sont des réels strictement positifs. En particulier, 0 n'est pas valeur propre de S et donc S est inversible.
Mais alors en prenant la même matrice M qu'en 1°a), on a $(\det M)^2 = \det({}^tMM) = \det S \neq 0$ et donc $\det M \neq 0$. On en déduit que M est inversible.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \exists M \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})/\ S = {}^tMM.}$$

(b) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On sait déjà que ${}^tXSX \geq 0$. De plus

$${}^tXSX = 0 \Rightarrow \|MX\|^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X = 0 \text{ (car } M \text{ est inversible).}$$

Par contraposition, si $X \neq 0$ on a ${}^tXSX > 0$.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0.}$$

(c) Mais alors, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $s_{i,i} = {}^te_iSe_i > 0$.

$$\boxed{\forall S = (s_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ s_{i,i} > 0.}$$

3°) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. S admet 0 pour valeur propre et donc n'est pas inversible. On en déduit que $\det(S) = 0$.
Comme d'autre part chaque $s_{i,i}$ est positif, on a $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} s_{i,i} \geq 0 = \det(S)$. L'inégalité (1) est donc démontrée dans ce cas.

$$\boxed{\forall S = (s_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.}$$

4°) a) exp est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp''(x) = \exp(x) \geq 0$. Donc la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Puisque les λ_i sont strictement positifs et que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, on a

$$\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda_i)\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp(\ln(\lambda_i)),$$

ce qui s'écrit encore

$$\boxed{\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right).}$$

b) Supposons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $s_{i,i} = 1$. De la question précédente, on déduit que

$$\sqrt[n]{\det(S)} = \sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S) = \frac{1}{n}(1+\ldots+1) = 1 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}s_{i,i}},$$

et donc encore une fois $\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$. L'(inégalité (1) est aussi démontrée dans ce cas

5°) a) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$. Aucun des coefficients diagonaux de la matrice diagonale T n'est nul et donc T est inversible. En particulier $TX \neq 0$ et donc d'après 1°a)

$${}^tXBX = {}^tXTSTX = {}^tX{}^tTSTX = {}^t(TX)S(TX) > 0.$$

$$\boxed{\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXBX > 0.}$$

b) Déjà ${}^tB = {}^tT{}^tS{}^tT = TST = B$ et $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Vérifions alors que les valeurs propres de B (toutes réelles puisque $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$) sont strictement positives.

Soit λ une valeur propre de B et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. On a

$${}^tXBX = {}^tX(\lambda X) = \lambda{}^tXX = \lambda\|X\|_2^2.$$

et donc, puis que $X \neq 0$, $\lambda = \dfrac{{}^tXBX}{\|X\|_2^2} > 0$. On a montré que

$$\boxed{B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}).}$$

c) Pour obtenir la matrice B, on multiplie à gauche la matrice S par T et donc pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, la i-ème ligne de S est multipliée par $t_{i,i}$, puis on multiplie TS par T à droite et donc pour chaque $j \in [\![1,n]\!]$, la j-ème colonne de TS est multipliée par $t_{j,j}$. Le coefficient générique de TST est donc $t_{i,i}s_{i,j}t_{j,j}$.
En particulier, pour $i \in [\![1,n]\!]$, le coefficient ligne i, colonne i de B est $t_{i,i}s_{i,i}t_{i,i} = s_{i,i}\dfrac{1}{s_{i,i}} = 1$.

D'après la question 4°, on a alors $\det(B) \leq \prod_{i=1}^{n} b_{i,i} = 1$ et donc $\det(S) \times (\det(T))^2 \leq 1$.

Comme $(\det(T))^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{s_{1,1}\ldots s_{n,n}}}\right)^2 = \dfrac{1}{s_{1,1}\ldots s_{n,n}}$, on a montré encore une fois que $\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$. Finalement

$$\boxed{\forall S = (s_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}),\ \det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.}$$

Partie B.

1°) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. ${}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA$ et donc ${}^tAA \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Comme à la question 1°b) de la partie 1, pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX({}^tAA)X = \|AX\_2^2 \geq 0$. Mais alors si λ est une valeur propre de ${}^tAA$ et X un vecteur propre associé, comme à la question 5°b) de la partie 1, $\lambda = \dfrac{{}^tX{}^tAAX}{\|X\|_2^2} \geq 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}).}$$

On peut donc appliquer l'inégalité (1) à la matrice ${}^tAA$.

2°) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, le coefficient ligne i colonne i de la matrice ${}^tAA$ est $\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}(a_{k,i})^2$ et l'inégalité (1) fournit

$$(\det(A))^2 = \det({}^tAA) \leq \prod_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{k,i})^2,$$

et donc $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_{k,i})^2}$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ |\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_{k,i})^2}\ \text{(inégalité d'Hadamard).}}$$

Partie C.

1°) • Notons B le vecteur colonne $\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Le coefficient ligne 0 de AB est é à égal $a_0 b_0$ c'est-à-dire 1.

Ensuite, pour $i \in [\![1, n]\!]$, le coefficient ligne i de AB est égal à $\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$ c'est-à-dire 0.

Finalement, $AB = e_1$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

• La matrice A est une matrice triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls et donc $A \in \mathscr{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$.

• Le système $AX = e_1$ admet une et une seule solution, à savoir $X = B$. Les formules de Cramer fournissent alors

$$b_n = \frac{\det(A')}{\det(A)} \text{ où } A' = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & \vdots & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & a_0 & \vdots \\ a_n & \ldots & & a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2°) Puisque la série de terme général $|a_n| r^n$ converge, on a $\lim_{n \to +\infty} |a_n| r^n = 0$ et donc

$$a_n^2 r^{2n} \underset{n \to +\infty}{=} |a_n| r^n \times |a_n| r^n = o(|a_n| r^n).$$

On en déduit que la série de terme général $a_n^2 r^{2n}$ converge. De plus, pour tout entier naturel n

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 r^{2k} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| r^k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k\right)^2 = C^2.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 r^{2k} \leq C^2$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2\, r^{2n} \leq C^2.}$$

3°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déjà on a $\det(A) = a_0^{n+1}$.
Ensuite, pour chaque $i \in [\![0, n]\!]$, multiplions la ligne i de A' par r^i. On note A'' la matrice ainsi obtenue. Par $(n+1)$-linéarité du déterminant on a

$$\det(A'') = r^0 \times r^1 \times \ldots \times r^n \det(A') = r^{n(n+1)/2} \det(A'),$$

et donc d'après l'inégalité d'Hadamard,

$$
\begin{aligned}
|b_n| &= \frac{1}{|a_0|^{n+1}r^{n(n+1)/2}}|\det(A'')| \\
&\leq \frac{1}{|a_0|^{n+1}r^{n(n+1)/2}}\sqrt{a_0^2+\ldots+a_n^2r^{2n}}\sqrt{a_0^2r^2+\ldots+a_{n-1}^2r^{2n}}\ldots\sqrt{a_0^2r^{2n-2}+a_1^2r^{2n}}\times 1 \\
&= \frac{r\times r^2\times r^{n-1}}{|a_0|^{n+1}r\times r^2\times r^n}\sqrt{a_0^2+\ldots+a_n^2r^{2n}}\sqrt{a_0^2+\ldots+a_{n-1}^2r^{2n-2}}\ldots\sqrt{a_0^2+a_1^2r^2} \\
&\leq \frac{1}{|a_0|^{n+1}r^n}\prod_{i=0}^{n-1}\sqrt{C^2} = \frac{C^n}{|a_0|^{n+1}r^n} = \frac{1}{|a_0|}\left(\frac{C}{r|a_0|}\right)^n.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |b_n|\leq\frac{1}{|a_0|}\alpha^n \text{ où } \alpha=\frac{C}{r|a_0|}.}$$

4°) f est développable en série entière en 0. Donc il existe un réel strictement positif R et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\forall x\in]-R,R[,\ f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. La condition $f(0)\neq 0$ fournit $a_0\neq 0$.

Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie au début de la partie C puis pour $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ (la fonction g est définie au moins en $x=0$).

Vérifions que la série entière de somme g a un rayon de convergence strictement positif. Soit r un réel élément de $]0,R[$ (par exemple $r=\dfrac{R}{2}$). Soit $r'=\dfrac{r|a_0|}{2C}$ (puisque $a_0\neq 0$, C est strictement positif).
r' est strictement positif et pour $x\in[-r',r']$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$|b_nx^n|\leq\frac{1}{|a_0|}\left(\frac{C}{r|a_0|}\right)^n\left(\frac{r|a_0|}{2C}\right)^n=\frac{1}{|a_0|2^n}.$$

Comme la série géométrique de terme général $\dfrac{1}{|a_0|2^n}$ converge, la série de terme général b_nx^n converge.

Ce qui précède montre que la série entière de somme g a un rayon strictement positif (supérieur ou égal à r'). Notons R' ce rayon puis posons $\rho=\min\{R,R'\}>0$.
Sur $]-\rho,\rho[$, on peut effectuer le produit de Cauchy des deux séries entières de sommes respectives f et g et pour $x\in]-\rho,\rho[$ on obtient

$$f(x)\times g(x)=a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\ldots=1.$$

Ceci montre que sur $]-\rho,\rho[$, $g=\dfrac{1}{f}$ et donc que

$$\boxed{\frac{1}{f}\text{ est développable en série entière en } 0.}$$

Troisième exercice

1°) Question préliminaire.

D'après les théorèmes de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}(a(t))^pe^{-a(t)}=\lim_{X\to+\infty}X^pe^{-X}=0$ et donc $e^{-a(t)}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{(a(t))^p}\right)$.

2°) Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto e^{-x\,\mathrm{ch}\,t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus,
• Si $x\leq 0$, $e^{-x\,\mathrm{ch}\,t}$ domine 1 quand t tend vers $+\infty$ et n'est donc pas intégrable au voisinage de $+\infty$. dans ce cas, $F(x)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.
• Si $x>0$, puisque $x\,\mathrm{ch}\,t\underset{t\to+\infty}{\to}+\infty$, la question préliminaire permet d'écrire

$$e{-}x\,\mathrm{ch}\,t\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x\,\mathrm{ch}\,t}\right)=o\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,t}\right)=o\left(\frac{1}{e^t}\right)=o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La fonction $t \mapsto e^{-x\operatorname{ch} t}$ est donc intégrable au voisinage de $+\infty$ et par suite, $F(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{F \text{ est définie sur }]0,+\infty[.}$$

3°) Soit $a > 0$. Posons $G : \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & e^{-x\operatorname{ch} t} \end{array}$. Pour $x \in [a,+\infty[$, on a donc $F(x) = \int_0^{+\infty} G(x,t)\,dt$.

• D'après la question précédente, pour chaque x de $[a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto G(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.
• La fonction G admet sur $[a,+\infty[\times[0,+\infty[$ des dérivées partielles premières et secondes par rapport à sa première variable x et de plus, pour $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,t) = -\operatorname{ch} t e^{-x\operatorname{ch} t} \text{ et } \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t) = \operatorname{ch}^2 t e^{-x\operatorname{ch} t}.$$

• Pour chaque $t \in [0,+\infty[$, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[a,+\infty[$.
• Pour chaque $(x,t) \in [a,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right| = \operatorname{ch} t e^{-x\operatorname{ch} t} \leq \operatorname{ch} t e^{-a\operatorname{ch} t} = \varphi_1(t) \text{ et } \left|\frac{\partial^2 G}{\partial x}(x,t)\right| = \operatorname{ch}^2 t e^{-x\operatorname{ch} t} \leq \operatorname{ch}^2 t e^{-a\operatorname{ch} t} = \varphi_2(t).$$

Déjà les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues sur $[0,+\infty[$. Ensuite, d'après la question préliminaire appliquée à la fonction $t \mapsto a\operatorname{ch} t$, quand t tend vers $+\infty$, $e^{-a\operatorname{ch} t}$ est négligeable devant $\frac{1}{\operatorname{ch}^3 t}$ et donc $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ sont négligeables devant $\frac{1}{\operatorname{ch} t}$ et par suite devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit que les fonctions φ_1 et φ_2 sont intégrables sur $[0,+\infty[$.
D'après le théorème de dérivation sous le signe somme (théorème de LEIBNIZ) appliqué deux fois, F est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on a montré que

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

De plus, F' et F'' s'obtiennent par dérivation sous le signe somme.

4°) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} F''(x) - F(x) &= \int_0^{+\infty} \operatorname{ch}^2 t e^{-x\operatorname{ch} t}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch} t}\,dt = \int_0^{+\infty} (\operatorname{ch}^2 t - 1)e^{-x\operatorname{ch} t}\,dt = \int_0^{+\infty} \operatorname{sh}^2 t e^{-x\operatorname{ch} t}\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \operatorname{sh} t \times \operatorname{sh} t\, e^{-x\operatorname{ch} t}\,dt. \end{aligned}$$

Soit alors A un réel strictement positif. Les deux fonctions $t \mapsto \operatorname{sh} t$ et $t \mapsto -\frac{1}{x}e^{-x\operatorname{ch} t}$ sont de classe C^1 sur $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A \operatorname{sh} t \times \operatorname{sh} t\, e^{-x\operatorname{ch} t}\,dt = \left[\operatorname{sh} t \times (-\frac{1}{x}e^{-x\operatorname{ch} t})\right]_0^A + \frac{1}{x}\int_0^A \operatorname{ch} t\, e^{-x\operatorname{ch} t}\,dt = -\frac{\operatorname{sh} A e^{-x\operatorname{ch} A}}{x} + \frac{1}{x}\int_0^A \operatorname{ch} t\, e^{-x\operatorname{ch} t}\,dt \ (*).$$

Maintenant, quand A tend vers $+\infty$, $\operatorname{sh} A e^{-x\operatorname{ch} A} \sim \frac{e^A}{2}e^{-x\operatorname{ch} A} = \frac{1}{2}e^{-x\operatorname{ch} A + A}$ et comme $-x\operatorname{ch} A + A \to -\infty$ d'après un théorème de croissances comparées, $\operatorname{sh} A e^{-x\operatorname{ch} A} \to 0$.
Quand A tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient $\int_0^{+\infty} \operatorname{sh} t \times \operatorname{sh} t\, e^{-x\operatorname{ch} t}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \operatorname{ch} t\, e^{-x\operatorname{ch} t}\,dt = \frac{1}{x}F'(x)$.

On a montré que

$$\boxed{\forall x > 0,\ F''(x) + \frac{1}{x}F'(x) - F(x) = 0.}$$

5°) a) Soit $x \in]0,1[$. La fonction $u \mapsto e^{-xu}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u}\right)$ est continue sur $]1,+\infty[$.

Etude en 1. Quand u tend vers 1,

$$e^{-xu}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}-\frac{1}{u}\right)\sim e^{-x}\times\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{e^{-x}}{\sqrt{(u-1)(u+1)}}\sim\frac{e^{-x}}{\sqrt{2(u-1)}}.$$

Comme la fonction $u\mapsto\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2(u-1)}}$ est positive et intégrable au voisinage de 1 (car $\dfrac{1}{2}<1$), on en déduit que la fonction $u\mapsto e^{-xu}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}-\dfrac{1}{u}\right)$ est intégrable au voisinage de 1 à droite.

Etude en $+\infty$. Quand u tend vers $+\infty$,

$$e^{-xu}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}-\frac{1}{u}\right)=e^{-xu}\frac{u-\sqrt{u^2-1}}{u\sqrt{u^2-1}}=e^{-xu}\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}(u+\sqrt{u^2-1})}\sim\frac{e^{-xu}}{2u^3}=o\left(\frac{1}{u^2}\right).$$

On en déduit que la fonction $u\mapsto e^{-xu}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}-\dfrac{1}{u}\right)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et finalement que $H(x)$ existe.

$$\boxed{H \text{ est définie sur }]0,1[.}$$

Soit $x\in]0,1[$. Pour chaque $u\in]1,+\infty[$,

$$0\leq e^{-xu}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}-\frac{1}{u}\right)=e^{-xu}\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}(u+\sqrt{u^2-1})}\leq\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}(u+\sqrt{u^2-1})}\ (*).$$

La fonction $u\mapsto\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}(u+\sqrt{u^2-1})}$ est continue sur $]1,+\infty[$, équivalente en 1 à $\dfrac{1}{\sqrt{2(u-1)}}$ et donc intégrable au voisinage de 1, équivalente à $\dfrac{1}{2u^3}$ au voisinage de $+\infty$ et donc intégrable au voisinage de $+\infty$. La fonction $u\mapsto\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}(u+\sqrt{u^2-1})}$ est intégrable sur $]1,+\infty[$ ou encore, en posant $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}(u+\sqrt{u^2-1})}\,du$, I est un réel.

L'encadrement $(*)$ fournit par intégration $0\leq H(x)\leq I$. On a montré que

$$\boxed{H \text{ est bornée sur }]0,1[.}$$

b) Soient $x\in]0,1[$ puis $v\in[x,1]$. $1-e^{-v}=\displaystyle\int_0^v e^{-u}\,du$ et donc par croissance de l'intégrale

$$0\leq 1-e^{-v}=\int_0^v e^{-u}\,du\leq\int_0^v 1\,du=v.$$

Soit $x\in]0,1[$. La fonction $v\mapsto\dfrac{e^{-v}}{v}$ est continue sur le segment $[x,1]$ de sorte que $K(x)$ existe. De plus,

$$K(x)=\int_x^1\frac{e^{-v}-1+1}{v}\,dv=\int_x^1\frac{1}{v}\,dv-\int_x^1\frac{1-e^{-v}}{v}\,dv=-\ln(x)-\int_x^1\frac{1-e^{-v}}{v}\,dv.$$

Or, d'après le début de la question $0\leq\displaystyle\int_x^1\frac{1-e^{-v}}{v}\,dv\leq\int_x^1 1\,dv=1-x\leq 1$ et donc $-\ln x-1\leq K(x)\leq-\ln x$ ou enfin, puisque $-\ln x>0$,

$$1+\frac{1}{\ln(x)}\leq\frac{K(x)}{-\ln x}\leq 1.$$

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $1+\dfrac{1}{\ln x}$ tend vers 1 et le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{K(x)}{-\ln(x)}=1$ ou encore que

$$\boxed{K(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}-\ln(x).}$$

c) Soit $x \in]0,1[$. Posons $u = \operatorname{ch} t$ et donc $du = \operatorname{sh} t \, dt = \sqrt{u^2-1} \, dt$ ou encore $dt = \dfrac{du}{\sqrt{u^2-1}}$. Puisque $x > 0$, on obtient

$$H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} t} \, dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u^2-1}} \, du.$$

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ H(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u^2-1}} \, du.}$$

d) Soit $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u^2-1}} \, du = \int_1^{+\infty} e^{-xu} \left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u} \right) du + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{u} \, du = H(x) + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} \, dv \\ &= K(x) + H(x) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} \, dv. \end{aligned}$$

($\dfrac{e^{-v}}{v}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{v^2}$ au voisinage de $+\infty$ et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} \, dv$ existe dans $\mathbb{R}$). Les questions a) et b) permettent alors d'affirmer que

$$F(x) \underset{x \to 0^+}{=} -\ln(x) + O(1),$$

et donc que

$$\boxed{F(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln(x).}$$

6°) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'éléments de $[1, +\infty[$ tendant vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Pour $t \in [0, +\infty[$, posons $f_n(t) = x_n e^{-x_n \operatorname{ch} t}$ de sorte que $x_n F(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t) \, dt$.

• Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

• Pour $t \geq 0$ donné, $f_n(t)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (car $\operatorname{ch} t > 0$) ou encore la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle qui est continue sur $[0, +\infty[$.

• Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $t \geq 0$, on a $|f_n(t)| = x_n e^{-x_n \operatorname{ch} t} \leq e^{-\operatorname{ch} t}$ où la fonction $t \mapsto e^{-\operatorname{ch} t}$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ ($\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{ch} t} = F(1)$).

Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n F(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \, dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(t) \, dt = 0.$$

Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) tendant vers $+\infty$, on sait alors que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xF(x) = 0$.

En majorant chaque $|-x_n \operatorname{ch} t e^{-x_n \operatorname{ch} t}|$ par $\operatorname{ch} t e^{-\operatorname{ch} t}$ ($\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{ch} t e^{-\operatorname{ch} t} \, dt = -F'(1)$) , on montre que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xF'(x) = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} xF(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} xF'(x) = 0.}$$

7°) a) W est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$

$$\begin{gathered} W'(x) = (FG'' + F'G' - F'G' - F''G)(x) = F(x)(-\frac{1}{x}G'(x) + G(x)) - G(x)(-\frac{1}{x}F'(x) + F(x)) = \\ -\frac{1}{x}(F(x)G'(x) - F'(x)G(x)) = -\frac{1}{x}W(x). \end{gathered}$$

Par suite $\forall x > 0,\ W'(x) + \dfrac{1}{x}W(x) = 0$ puis $\forall x > 0,\ xW'(x) + W(x) = 0$ ou encore $\forall x > 0,\ (xW)'(x) = 0$. On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0,\ W(x) = \dfrac{C}{x}$.

Maintenant, pour tout $x > 0$, on a $C = xW(x) = (xF(x))G'(x) - (xF'(x))G(x)$ et quand x tend vers $+\infty$ on obtient $C = 0 \times 0 - 0 \times 0 = 0$. Donc

$$\boxed{W = 0.}$$

b) Puisque $W = 0$, on sait que la famille (F, G) est liée et donc puisque F n'est pas nulle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G = \lambda F$.

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}/\ G = \lambda F.}$$

