Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in]-1, 1]$. Alors $-x \neq 1$ puis

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (-x)^i = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x},$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1, 1],\ \frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x^i + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, 1]$.

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \int_0^x t^i\,dt + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{x^{i+1}}{i+1} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1, 1],\ \ln(1+x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt.}$$

3. Soit $x \in]-1, 1]$.

• Si $x \in [0, 1]$,

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i\right| = \left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt\right| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on a montré dans ce cas que la série numérique $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(1+x)$.

• Si $x \in]-1, 0]$,

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i\right| = \left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt\right| = \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt \leqslant \frac{1}{1+x}\int_x^0 (-t)^n\,dt = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1+x)}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1+x)} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées, on a montré dans ce cas aussi que la série numérique $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(1+x)$.

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1],\ \ln(1+x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i.}$$

4. Pour $x = 1$, on obtient en particulier $\ln(2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$ et pour $x = -\dfrac{1}{2}$

$$\ln(2) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\left(-\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i2^i}.$$

5. i. Puisque la suite (u_n) décroît vers 0, la suite (u_n) est positive. La suite $((-1)^{n-1}u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général $(-1)^{n-1}u_n$, $n \geqslant 1$, converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

ii. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{i=1}^{2n+2} (-1)^{i-1}u_i - \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i-1}u_i = -u_{2n+2} + u_{2n+1} \geqslant 0,$$

et

$$S_{2(n+1)-1} - S_{2n-1} = \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1}u_i - \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^{i-1}u_i = u_{2n+1} - u_{2n} \leqslant 0.$$

Donc,

$$\boxed{\text{la suite } (S_{2n})_{n\geqslant 1} \text{ est croissante et la suite } (S_{2n-1})_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$$

b) La suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ est extraite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et tend donc vers S, en croissant. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} \leqslant S$.
De même, la suite $(S_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ tend vers S en décroissant. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n-1} \geqslant S$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1}.}$$

iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• Si n est pair, posons $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a

$$0 \leqslant S - S_{2p} \leqslant S_{2p-1} - S_{2p} = u_{2p},$$

et donc $|S - S_{2p}| \leqslant u_{2p}$.

• Si n est impair, posons $n = 2p - 1$, $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a

$$-u_{2p} = S_{2p} - S_{2p-1} \leqslant S - S_{2p-1} \leqslant 0,$$

et donc $|S - S_{2p-1}| \leqslant u_{2p} \leqslant u_{2p-1}$.

Dans tous les cas, on a montré que $|S - S_n| \leqslant u_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S - S_n| \leqslant u_n.}$$

6. La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ vérifie les hypothèses de la question 5.. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\ln(2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Soit alors $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\left|\ln(2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\right| \leqslant 10^{-p} \Leftarrow \frac{1}{n} \leqslant 10^{-p} \Leftarrow n \geqslant 10^p.$$

Par suite, on peut prendre

$$\boxed{N_p = 10^p.}$$

7. **i.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leqslant R_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{i2^i} \leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1 \times 2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2^n}.}$$

ii. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\ln(2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i2^i}\right| \leqslant 10^{-p} \Leftrightarrow R_n \leqslant 10^{-p} \Leftarrow \frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-p} \Leftarrow n \geqslant \frac{p\ln(10)}{\ln(2)} \Leftarrow n \geqslant \frac{p\ln(16)}{\ln(2)} = 4p.$$

On peut prendre

$$\boxed{N'_p = 4p.}$$

iii. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $N_p = 10^p = (1+9)^p = 1 + 9p + \ldots \geqslant 9p \geqslant 4p = N'_p$ ce qui reste vrai pour $p = 0$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ N_p \geqslant N'_p.}$$

Partie II

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme $P(-1) - P$ admet -1 pour racine et est donc divisible par $X+1$. Par suite, il existe un polynôme noté $\varphi_n(P)$ et un seul tel que $P(-1) - P = (X+1)\varphi_n(P)$. $\varphi_n(P)$ est le quotient de la division euclidienne du polynôme $P(-1) - P$ de degré au plus n par le polynôme $X+1$ de degré 1. Par suite, $\varphi_n(P)$ est de degré au plus $n-1$.

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists! \varphi_n(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] /\ P(-1) - P = (X+1)\varphi_n(P).}$$

2. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$(\lambda P + \mu Q)(-1) - (\lambda P + \mu Q) = \lambda(P(-1) - P) + \mu(Q(-1) - Q) = \lambda(X+1)\varphi_n(P) + \mu(X+1)\varphi_n(Q) = (X+1)(\lambda\varphi_n(P) + \mu\varphi_n(Q))$,

et par unicité de $\varphi(\lambda P + \mu Q)$, on a donc $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi_n(P) + \mu\varphi_n(Q)$.

$$\boxed{\varphi_n \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n-1}[X]).}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n) \Leftrightarrow \varphi_n(P) = 0 \Leftrightarrow P(-1) - P = 0 \Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_0[X].$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathbb{R}_0[X].}$$

On a $\mathrm{Im}(\varphi_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais d'après le théorème du rang

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi_n)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi_n)) = n + 1 - 1 = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]),$$

et donc $\mathrm{Im}(\varphi_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On en déduit que

$$\boxed{\varphi_n \text{ est surjective.}}$$

3. Déjà $\varphi_n(1) = 0$. Soit alors $j \in [\![1, n]\!]$.

$$(-1)^j - X^j = (-1 - X)\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{j-1-i}X^i = (X+1)\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{j+i}X^i \text{ (car } k - i \text{ et } k + i \text{ ont même parité)},$$

et donc $\varphi_n(X^j) = \sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{j+i}X^i = (-1)^j\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^iX^i$. On en déduit

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n},(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^n \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & -1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & & \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,n+1}(\mathbb{R}).}$$

4.

$$\varphi_n(P)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_n(X^j)=\sum_{j=0}^{n}a_j(-1)^j\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^iX^i=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\left(\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^ja_j\right)X^i,$$

et donc

$$\boxed{\forall i\in[\![0,n-1]\!],\ b_i=(-1)^i\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^ja_j.}$$

Partie III

1. g est continue sur $]0,1]$ et est dominée par f en 0 à droite. Comme f est intégrable sur $]0,1]$, il en est de même de g.

$$\boxed{g \text{ est intégrable sur }]0,1].}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. f_n est continue sur $]0,1]$ et est dominée par f en 0 à droite. Comme f est intégrable sur $]0,1]$, il en est de même de f_n.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ f_n \text{ est intégrable sur }]0,1].}$$

3. • La suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.
• Soit $n\in\mathbb{N}$. $u_{n+1}-u_n=\int_0^1 x^{n+1}f(x)\ dx-\int_0^1 x^nf(x)\ dx=\int_0^1 x^n(x-1)f(x)\ dx\leqslant 0$. La suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
• Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(f)=0$.
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction $h\ :\ x\mapsto\begin{cases}0 \text{ si } x\in]0,1[\\ f(1) \text{ si } x=1\end{cases}$, et la fonction h est continue par morceaux sur $]0,1]$.
Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\in]0,1]$, $|f_n(x)|=x^nf(x)\leqslant f(x)$ (hypothèse de domination) où la fonction f est continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0,1]$.
Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que la suite $(u_n(f))$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty}u_n(f)=\int_0^1\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\ dx=\int_0^1 h(x)\ dx=0.$$

En résumé, la suite $(-1)^nu_n(f)$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général $(-1)^nu_n(f)$ converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

4. • Chaque fonction $(-1)^nf_n$ est continue et intégrable sur $]0,1[$ d'après la question III.2.
• La série de fonction de termes général $(-1)^nf_n$, $n\geqslant 0$, converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction g de la question III.1. car pour $x\in]0,1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nf_n(x)=f(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n=\frac{f(x)}{1+x}=g(x).$$

De plus la fonction g est continue par morceaux sur $]0,1[$.
• Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,1]$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^kf_k(x)\right|=f(x)\left|\sum_{k=0}^{n}(-x)^k\right|=\frac{f(x)|1-(-1)^{n+1}x^{n+1}|}{1+x}\leqslant\frac{2f(x)}{1+x}=2g(x)\ \text{(hypothèse de domination)},$$

où la fonction $2g$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0,1[$ (car intégrable sur $]0,1]$ d'après la question II.1.).

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nu_n(f)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 f_n(x)\ dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nf_n(x)\ dx=\int_0^1\frac{f(x)}{1+x}\ dx=S_f.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nu_n(f)=S_f.}$$

5. **(i)** La fonction f vérifie bien les hypothèses du début de la partie III. L'identité de la question précédente fournit

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^n\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i}.$$

(ii) La fonction f vérifie bien les hypothèses du début de la partie III (car $\frac{1}{2} < 1$). Calculons S_f. En posant $t = \sqrt{x}$ et donc $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, on obtient

$$S_f = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^n}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{1}{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2n+1}.$$

L'identité de la question précédente fournit alors

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(iii) La fonction f vérifie bien les hypothèses du début de la partie III (car $\frac{2}{3} < 1$). Calculons S_f. En posant $t = x^{1/3}$ et donc $dt = \frac{dx}{3x^{2/3}}$, on obtient

$$S_f = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\frac{dx}{3x^{2/3}} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}dt.$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\frac{a}{X+1} + \frac{b(-1+2X)}{1-X+X^2} + \frac{c}{1-X+X^2} &= \frac{a(1-X+X^2) + b(-1+2X)(X+1) + c(X+1)}{(X+1)(1-X+X^2)}\\ &= \frac{(a+2b)X^2 + (-a+b+c)X + a - b + c}{X^3+1}\end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{a}{X+1} + \frac{b(-1+2X)}{1-X+X^2} + \frac{c}{1-X+X^2} = \frac{1}{X^3+1} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b=0\\ -a+b+c=0\\ a-b+c=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=\frac{1}{2}\\ 2a-2b=1\\ a+2b=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=\frac{1}{2}\\ a=-2b\\ b=-\frac{1}{6}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=\frac{1}{2}\\ b=-\frac{1}{6}\\ a=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Donc, $\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{X+1} - \frac{1}{6}\frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ et

$$S_f = \left[\frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{2X-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}\ln 2 + \pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$\boxed{S_f = \frac{\sqrt{3}\ln 2 + \pi}{3\sqrt{3}}.}$$

Partie IV

1.

$$\int_0^1 \frac{P(x)}{x+1}f(x)dx = \int_0^1 \frac{P(x)-P(-1)+P(-1)}{x+1}f(x)dx = P(-1)\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{-(x+1)\varphi_n(P)(x)}{x+1}f(x)dx$$
$$= P(-1)S_f - \int_0^1 \varphi_n(P)(x)f(x)\ dx.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $S_f = \dfrac{1}{T_n(-1)}\displaystyle\int_0^1 \frac{T_n(x)}{x+1}f(x)dx + \frac{S_n}{T_n(-1)}$ et donc

$$\left|S_f - \frac{S_n}{T_n(-1)}\right| = \frac{1}{|T_n(-1)|}\left|\int_0^1 \frac{T_n(x)}{x+1}f(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{|T_n(-1)|}\int_0^1 \frac{|T_n(x)|f(x)}{x+1}dx \leqslant \frac{1}{|T_n(-1)|}\int_0^1 \frac{M_n f(x)}{x+1}dx = \frac{M_n S_f}{|T_n(-1)|}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left|S_f - \frac{S_n}{T_n(-1)}\right| \leqslant \frac{M_n S_f}{|T_n(-1)|}.}$$

Partie V

1. (i) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+2} = T_{n+2}(-1) = 6T_{n+1}(-1) - T_n(-1) = 6v_{n+1} - v_n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} - 6v_{n+1} + v_n = 0 \quad (*).}$$

(ii) L'équation caractéristique de la récurrence $(*)$ est $z^2 - 6z + 1 = 0$. Cette équation admet pour solution les deux nombres $z_1 = 3+\sqrt{8}$ et $z_2 = 3-\sqrt{8}$. On sait alors qu'il existe deux nombres réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha(3+\sqrt{8})^n + \beta(3-\sqrt{8})^n$.

(iii) $v_0 = T_0(-1) = 1$ et $v_1 = T_1(-1) = 3$. Pour $n = 0$ et $n = 1$ on obtient donc $\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ (3+\sqrt{8})\alpha + (3-\sqrt{8})\beta = 3 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \sqrt{8}\alpha - \sqrt{8}\beta = 0 \end{cases}$ et donc $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{2}((3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n).}$$

2. $3-\sqrt{8} > 0$ et donc pour tout entier n, $v_n > 0$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(-1) \neq 0$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.
- C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\deg(T_n) = n$ et $\deg(T_{n+1}) = n+1$ alors $\deg(T_{n+2}) = \deg((1-2X)T_{n+1}) = 1+n+1 = n+2$.

Le résultat est démontré par récurrence et donc la suite (T_n) vérifie les hypothèses du début de la partie IV.

3. T_0 et T_1 sont à coefficients entiers et si pour $n \in \mathbb{N}$, T_n et T_{n+1} sont à coefficients entiers, alors $T_{n+2} = 2(1-2X)T_{n+1} - T_n$ est à coefficients entiers. On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \in \mathbb{Z}[X]$.

4. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\sin^2 x) = \cos(2nx)$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $T_0(\sin^2 x) = 1 = \cos(0x)$ et $T_1(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x = \cos(2x)$. Le résultat est donc vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\sin^2 x) = \cos(2nx)$ et $T_{n+1}(\sin^2 x) = \cos(2(n+1)x)$. Alors pour $x \in \mathbb{R}$

$$T_{n+2}(\sin^2 x) = 2(1-2\sin^2 x)T_{n+1}(\sin^2 x) - T_n(\sin^2 x) = 2\cos(2x)\cos((2n+2)x) - \cos(2nx)$$
$$= \cos((2n+4)x) + \cos(2nx) - \cos(2nx) = \cos(2(n+2)x).$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\sin^2 x) = \cos(2nx).}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
• $M_n \geqslant |T_n(1)| = \left|T_n\left(\sin^2\dfrac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos(n\pi)| = 1$.
• D'autre part, pour tout $y \in [0,1]$,

$$|T_n(y)| = \left|T_n\left(\sin^2 \operatorname{Arcsin}\sqrt{y}\right)\right| = |\cos(2n \operatorname{Arcsin}\sqrt{y})| \leqslant 1,$$

et donc $M_n \leqslant 1$. Finalement, $M_n = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M_n = 1.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{M_n}{|T_n(-1)|} = \frac{2}{(3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n} \leqslant \frac{2}{(3+\sqrt{8})^n}.$$

6. Si f est la fonction constante 1, alors $S_f = \ln 2$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $t_n = \dfrac{S_n}{|T_n(-1)|}$ où $S_n = \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(T_n)(x)\ dx$. Pour tout entier naturel n, on a d'après IV.2 et V.5

$$|\ln 2 - t_n| = \left|S_f - \frac{S_n}{|T_n(-1)|}\right| \leqslant \frac{M_n S_f}{|T_n(-1)|} \leqslant \frac{2\ln 2}{(3+\sqrt{8})^n}.$$

Maintenant, $|T_n(-1)|$ est un entier car T_n est à coefficients entiers d'après V.3. Ensuite, $\varphi_n(T_n)$ est à coefficients rationnels (quotient de la division euclidienne de T_n par $X+1$ dans $\mathbb{Q}[X]$) et donc $S_n = \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(T_n)(x)\ dx$ est un nombre rationnel. Finalement, pour chaque entier n, t_n est un nombre rationnel.

Partie VI

1. La fonction $x \mapsto \sin^2 x$ est de classe C^5 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$ et la fonction f est de classe C^5 sur $[0,1]$. Donc la fonction $x \mapsto f(\sin^2 x)$ est de classe C^5 sur $[0,1]$. Mais alors, la fonction g est de classe C^5 sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions de classe C^5 sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2. On pose $x = \sin^2 t$ et donc $dx = 2\sin t\cos t\ dt = \sin(2t)\ dt$. On obtient

$$\int_0^1 \frac{P(x)}{1+x} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \frac{P(\sin^2 t)}{1+\sin^2 t} f(\sin^2 t)\sin(2t)\ dt = \int_0^{\pi/2} P(\sin^2 t)g(t)\ dt.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question V.4, $\displaystyle\int_0^1 \frac{T_n(x)}{1+x} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} T_n(\sin^2 t)g(t)\ dt = \int_0^{\pi/2} g(t)\cos(2nt)\ dt$.
Toutes les fonction considérées étant de classe C^2 au moins sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on peut effectuer une double intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
4n^2\int_0^1 \frac{T_n(x)}{1+x} f(x)dx &= \int_0^{\pi/2} g(t)(4n^2\cos(2nt))\ dt \\
&= [2n\sin(2nt)g(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2n\sin(2nt)g'(t)\ dt = \int_0^{\pi/2} -2n\sin(2nt)g'(t)\ dt \\
&= [\cos(2nt)g'(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\cos(2nt)g''(t)\ dt = (-1)^n g'\left(\frac{\pi}{2}\right) - g'(0) - \int_0^{\pi/2}\cos(2nt)g''(t)\ dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\mathbb{N},\ 4n^2\int_0^1 \frac{T_n(x)}{1+x} f(x)dx = (-1)^n g'\left(\frac{\pi}{2}\right) - g'(0) - \int_0^{\pi/2}\cos(2nt)g''(t)\ dt.}$$

4. **(i)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} f(x)\,dx &= (n+2)^2 \int_0^1 \frac{T_{n+2}(x)}{1+x} f(x)\,dx - n^2 \int_0^1 \frac{T_n(x)}{1+x}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left((-1)^{n+2} g'\left(\frac{\pi}{2}\right) - g'(0) - \int_0^{\pi/2} \cos(2(n+2)t) g''(t)\,dt\right) \\
&\quad - \frac{1}{4}\left((-1)^n g'\left(\frac{\pi}{2}\right) - g'(0) - \int_0^{\pi/2} \cos(2nt) g''(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (\cos(2nt) - \cos(2(n+2)t)) g''(t)\,dt.
\end{aligned}$$

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique le calcul de la question 3 à la fonction g'' et on obtient après une nouvelle intégration par parties

$$\begin{aligned}
4n^2 \int_0^1 \cos(2nt) g''(t) &= (-1)^n g^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) - g^{(3)}(0) - \int_0^{\pi/2} \cos(2nt) g^{(4)}(t)\,dt \\
&= (-1)^n g^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) - g^{(3)}(0) - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{2n} g^{(5)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (\cos(2nt) - \cos(2(n+2)t)) g''(t)\,dt &= \left((-1)^n g^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) - g^{(3)}(0)\right)\left(\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4(n+2)^2}\right) \\
&\quad + \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\sin(2nt)}{8n^3} + \frac{\sin(2(n+2)t)}{8(n+2)^3}\right) g^{(5)}(t)\,dt,
\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U = \frac{(-1)^n g^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) - g^{(3)}(0)}{16}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right) + \frac{V}{32}.}$$

(iii) Les fonctions $|g^{(3)}|$ et $|g^{(5)}|$ sont continues sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc bornées sur ce segment. Notons M_3 et M_5 des majorants des fonctions $|g^{(3)}|$ et $|g^{(5)}|$ respectivement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(-1)^n g^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) - g^{(3)}(0)}{16}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right)\right| &\leqslant \frac{M_3}{8}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right) = \frac{M_3(4n+4)}{8n^2(n+2)^2} \\
&\leqslant \frac{M_3}{2n^2(n+2)} \leqslant \frac{M_3/2}{n^3},
\end{aligned}$$

et

$$\left|\frac{V}{32}\right| \leqslant \frac{1}{32}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+2)^3}\right) M_5 \leqslant \frac{\pi M_5/32}{n^3}.$$

Par suite,

$$|U| \leqslant \frac{K}{n^3} \text{ où } K = \frac{M_3}{2} + \frac{\pi M_5}{32}.$$

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R}/\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{K}{n^3}.}$$

5. Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n(-1) \neq 0$. Pour cela, vérifions tout d'abord que la suite (v_n) est croissante et positive.
- $0 \leqslant v_0 = 1 \leqslant 3 = v_1$.
- Si pour $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1}$ alors $v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n \geqslant 5v_{n+1} \geqslant v_{n+1} \leqslant 0$.

On a montré par récurrence que la suite (v_n) est croissante et strictement positive.

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}Q_n(-1) &= (n+2)^2 v_{n+2} - n^2 v_n = (n+2)^2(6v_{n+1} - v_n) - n^2 v_n \\ &\geqslant (n+2)^2(6v_n - v_n) - n^2 v_n = v_n(5(n+2)^2 - n^2) \geqslant v_n(5n^2 - n^2) = 4n^2 v_n \\ &= 2n^2((3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n) \geqslant n^2(3+\sqrt{8})^n > 0.\end{aligned}$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$ $Q_n(-1) \neq 0$ et on peut poser $q_n = \dfrac{1}{Q_n(-1)} \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(Q_n)(x)\, dx$. $Q_n(-1)$ est un entier d'après la question V.3. D'autre part, comme à la question V.6, Q_n est à coefficients entiers et donc $\varphi_n(Q_n)$ est à coefficients rationnels. Le nombre $\displaystyle\int_0^1 \varphi_n(Q_n)(x)\, dx$ est donc un rationnel et il en est de même de q_n.

D'après la partie IV appliquée à la fonction $f = 1$, pour tout entier naturel non nul n, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} dx = Q_n(-1)\ln 2 - \int_0^1 \varphi_n(Q_n)(x)\, dx$ ou encore

$$|\ln 2 - q_n| = \frac{1}{|Q_n(-1)|}\left|\int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} dx\right|,$$

avec $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} dx\right| \leqslant \dfrac{K}{n^3}$ où K est la constante de la question précédente avec $f = 1$ et donc $\dfrac{1}{|Q_n(-1)|}\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} dx\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2(3+\sqrt{8})^n}\dfrac{K}{n^3} = \dfrac{K}{n^5(3+\sqrt{8})^n}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\ln 2 - q_n| \leqslant \frac{K}{n^5(3+\sqrt{8})^n} \text{ où } q_n = \frac{1}{Q_n(-1)}\int_0^1 \varphi_n(Q_n)(x)\, dx \in \mathbb{Q}.}$$

