Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice I

1) Si $x = 1$, la suite $\left(\dfrac{(-x)^n}{3n+1}\right)$ est bornée. Donc $R \geqslant 1$.

Si $x > 1$, la suite $\left(\dfrac{(-x)^n}{3n+1}\right)$ n'est pas bornée. Donc $R \leqslant 1$. Finalement,

$$\boxed{R = 1.}$$

2) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^{3n}\,dt = \frac{1}{3n+1}$.

b) Soit $x \in]-1, 1[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{3n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \int_0^1 t^{3n}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-xt^3)^n\,dt.$$

Pour $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = (-xt^3)^n$. Chaque fonction f_n est continue sur le segment $[0, 1]$. De plus, $\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$, $|f_n(t)| \leqslant |x|^n$. Comme $|x| < 1$, la série numérique de terme général $|x|^n$ est convergente. Par suite, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, est normalement et donc uniformément convergente sur le segment $[0, 1]$. D'après un théorème d'intégration terme à terme,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{3n+1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-xt^3)^n = \int_0^1 \frac{1}{1+xt^3}\,dt.$$

Si $x = 0$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{3n+1} = 1$. Dorénavant, $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$.

Posons $a = \sqrt[3]{x}$. En posant $u = at$ et donc $u^3 = (at)^3 = xt^3$ et aussi $dt = \dfrac{1}{a}du$, on obtient $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt^3}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^a \frac{1}{1+u^3}\,du$.

Maintenant, $X^3 + 1 = (X+1)(X+j)(X+j^2)$ et donc

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+j} + \frac{\overline{b}}{X+j^2},$$

avec $a = \dfrac{1}{3 \times (1)^2} = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3 \times (-j)^2} = \dfrac{j}{3}$. Par suite,

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{-X+2}{X^2-X+1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt^3}\,dt = \frac{1}{3a}\int_0^a \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{3a}\left[\ln(t+1) - \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^a$$
$$= \frac{1}{3a}\left(\ln(a+1) - \frac{1}{2}\ln(a^2-a+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2a-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right).$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{3n+1} = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x=0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}\left(\ln(\sqrt[3]{x}+1)-\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x}^2-\sqrt[3]{x}+1)+\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}\right) \text{ si } x\neq 0\end{array}\right. .$$

3) La suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. On en déduit que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Pour $x\in]-1,1]$, posons $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{3n+1}$. D'après ce qui précède, f est définie sur $]-1,1]$, continue sur $]-1,1[$ (en tant que somme d'une série entière, f est continue sur son intervalle ouvert de convergence). Vérifions que f est aussi continue en 1.
Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, posons $R_n(x)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-x)^k}{3k+1}$. Pour $x\in[0,1]$ donné, la suite $\left(\dfrac{(-x)^k}{3k+1}\right)$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-x)^k}{3k+1}\right| \leqslant \left|\frac{(-x)^{n+1}}{3(n+1)+1}\right| \leqslant \frac{1}{3n+4},$$

et donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{3n+4}$. Comme $\dfrac{1}{3n+4}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|R_n(x)|$. Ceci montre que la série de somme f est uniformément convergente sur $[0,1]$. On en déduit que f est continue sur $[0,1]$ en tant que limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de fonctions continues sur $[0,1]$. En particulier, f est continue en 1.

Puisque f est continue en 1,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \frac{1}{3}\left(\ln 2+\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}}$$

Exercice II

Première partie.

1) Montrons par récurrence que $\forall k\in\mathbb{N}$, $U^k=\begin{pmatrix}A^k & kA^k\\ 0 & A^k\end{pmatrix}$.

- C'est clair pour $k=0$ avec la convention $A^0=I_n$ et $U^0=I_{2n}$.
- Soit $k\geqslant 0$. Supposons que $U^k=\begin{pmatrix}A^k & kA^k\\ 0 & A^k\end{pmatrix}$. Un calcul par blocs fournit

$$U^{k+1}=\begin{pmatrix}A^k & kA^k\\ 0 & A^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & A\\ 0 & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{k+1} & (k+1)A^{k+1}\\ 0 & A^{k+1}\end{pmatrix}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

La formule précédente montre que l'identité de l'énoncé est vraie quand R est un élément de la base canonique de $\mathbb{C}[X]$ c'est-à-dire du type X^k, $k\in\mathbb{N}$. Le résultat s'étend alors par linéarité à tout polynôme.

$$\boxed{\forall R\in\mathbb{C}[X],\ R(U)=\begin{pmatrix}R(A) & AR'(A)\\ 0 & R(A)\end{pmatrix}.}$$

2) Un calcul par blocs fournit immédiatement $\forall k\in\mathbb{N}$, $V^k=\begin{pmatrix}A^k & 0\\ 0 & A^k\end{pmatrix}$ puis $\Pi(V)=\begin{pmatrix}\Pi(A) & 0\\ 0 & \Pi(A)\end{pmatrix}=0_{2n}$.

$$\boxed{\Pi(V)=0_{2n}.}$$

3) Puisque U et V sont semblables, on a également $\Pi(U) = 0_{2n}$ et en particulier, $A\Pi'(A) = 0_n$. Par suite, le polynôme $X\Pi'$ est annulateur de A et est donc multiple du polynôme Π. Ces polynômes ayant même degré (puisque $\alpha > 0$), il existe un nombre complexe k tel que $X\Pi' = k\Pi$. En comparant les coefficients dominants, on obtient

$$\alpha = \text{dom}(X\Pi') = \text{dom}(k\Pi) = k.$$

On a montré que

$$\boxed{X\Pi' = \alpha\Pi.}$$

4) L'égalité $X\Pi' = \alpha\Pi$ s'écrit encore $\displaystyle\sum_{p=0}^{\alpha}(\alpha - p)X^p = 0$ et donc $\forall p \in [\![0, \alpha - 1]\!]$, $b_p = 0$ ou encore $\Pi = X^\alpha$. L'égalité $\Pi(A) = 0$ fournit alors $A^\alpha = 0$ et donc

$$\boxed{A \text{ est nilpotente.}}$$

Deuxième partie.

1) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Il existe un vecteur x_0 de $\mathbb{C}^n$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. Montrons que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre. Dans le cas contraire, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$. Soit k le plus petit entier $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Par définition de k, on a $\lambda_k f^k(x_0) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$. En prenant l'imagede chaque membre par f^{n-1-k}, on obtient $\lambda_k f^{n-1}(x_0) = 0$ (car pour $i \geqslant n$, $f^i = 0$). Ceci est une contradiction car $\lambda_k \neq 0$ et $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

Ainsi, la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre, de cardinal $n = \dim \mathbb{C}^n$ et donc la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de $\mathbb{C}^n$. Dans cette base, la matrice de f est J et donc

$$\boxed{A \text{ est semblable à } J.}$$

2) Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors,

$$DJ - JD = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \lambda_2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \lambda_3 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \lambda_3 - \lambda_2 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n - \lambda_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite, $DJ - JD = J \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\lambda_{i+1} - \lambda_i = 1$. La matrice $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$ convient.

3) D'après la question 1), l existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PJP^{-1}$. Après multiplication des deux membres de l'égalité précédente par P à gauche et P^{-1} à droite, on obtient $PDP^{-1}PJP^{-1} - PJP^{-1}PDP^{-1} = PJP^{-1}$ ou encore $HA - AH = A$ avec $H = PDP^{-1}$.

4)

$$\begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A - HA \\ 0 & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AH + A - HA \\ 0 & A \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

5) $\begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & H \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$. Donc si on pose $Q = \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, $Q \in \mathscr{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. L'égalité de la question précédente s'écrit alors $Q^{-1}UQ = V$ et finalement les matrices U et V sont semblables.

Exercice III

1) a) Puisque $\mathcal{R}$ est orthonormé, (P) est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1,1,1)$ et (Q) est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}'(-1,1,0)$. Puisque $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}' = -1+1 = 0$, les plans (P) et (Q) sont orthogonaux.

b) On a $\overrightarrow{I} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ et $\overrightarrow{J} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ puis $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{J} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.

c) Les formules de changement de repères s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{X}{\sqrt{3}} + \dfrac{Y}{\sqrt{2}} + \dfrac{Z}{\sqrt{6}} \\ y = \dfrac{X}{\sqrt{3}} - \dfrac{Y}{\sqrt{2}} + \dfrac{Z}{\sqrt{6}} \\ z = \dfrac{X}{\sqrt{3}} - \dfrac{2Z}{\sqrt{6}} \end{array}\right. \quad \text{ou aussi en transposant} \quad \left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}} \\ Y = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \\ Z = \dfrac{x+y-2z}{\sqrt{6}} \end{array}\right.$$

Soit M un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M \in (\Sigma) &\Leftrightarrow \alpha^2(x+y+z)^2 + \beta^2(-x+y)^2 + \gamma^2(2y+z)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 3\alpha^2X^2 + 2\beta^2Y^2 + \gamma^2(\sqrt{3}X - \sqrt{2}Y)^2 = 1 \end{aligned}$$

d) Z a disparu et donc (Σ) est un cylindre du second degré de direction (OZ).

2) La matrice de la forme quadratique

$$q\ :\ X\overrightarrow{I} + Y\overrightarrow{J} \mapsto 3\alpha^2X^2 + 2\beta^2Y^2 + \gamma^2(\sqrt{3}X - \sqrt{2}Y)^2 = 3(\alpha^2+\gamma^2)X^2 - 2\sqrt{6}\gamma^2XY + 2(\beta^2+\gamma^2)Y^2$$

dans la base orthonormée $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est $A = \begin{pmatrix} 3(\alpha^2+\gamma^2) & -\sqrt{6}\gamma^2 \\ -\sqrt{6}\gamma^2 & 2(\beta^2+\gamma^2) \end{pmatrix}$. D'après le théorème spectral, on sait déjà que les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A sont réelles. La somme des valeurs propres est $\mathrm{Tr}(A) = 3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 > 0$ et le produit de ses valeurs propres est $\det(A) = 6(\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\gamma^2) - 6\gamma^4 = 6(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) > 0$. A admet donc deux valeurs propres strictement positives. Enfin, toujours d'après le théorème spectral, A est orthogonalement semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Comme A n'est pas une matrice scalaire (car $\gamma \neq 0$), les valeurs propres de A sont distinctes.

En résumé, A admet deux valeurs propres strictement positives et distinctes que l'on note $\lambda_1 = \dfrac{1}{a^2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1}{b^2}$ avec $0 < a < b$. On sait alors que dans une base orthonormée $(\overrightarrow{I'}, \overrightarrow{J'})$ de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, formée de vecteurs propres de A et associée à la famille (λ_1, λ_2) on a

$$\forall (X', Y') \in \mathbb{R}^2,\ q\left(X'\overrightarrow{I'} + Y'\overrightarrow{J'}\right) = \frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2}.$$

On prend alors $\overrightarrow{K'} = \overrightarrow{K}$ et $\mathcal{R}'' = (O, \overrightarrow{I'}, \overrightarrow{J'}, \overrightarrow{K'})$. $\mathcal{R}''$ est un repère orthonormé de l'espace dans lequel une équation de (Σ) est $\dfrac{X'^2}{a^2} + \dfrac{Y'^2}{b^2} = 1$. Ainsi, (Σ) est un cylindre elliptique.

Remarque. Les valeurs explicites de a et b sont $a = \sqrt{3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 - \sqrt{(3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2)^2 - 24(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)}}$ et $b = \sqrt{3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 + \sqrt{(3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2)^2 - 24(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)}}$.

3) a) Soit $(X', Y', Z') \in \mathbb{R}^3$.

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}X'^2 - \frac{1}{b^2}Z'^2 = \left(\frac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b}\right)\left(\frac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b}\right).$$

Par suite, pour M point donné

$$M \in (\Sigma) \cap (P_k) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{X'^2}{a^2} + \dfrac{Y'^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} - \dfrac{Z'}{b} = k \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) + \left(\dfrac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} - \dfrac{Z'}{b}\right)\left(\dfrac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} + \dfrac{Z'}{b}\right) = 1 \\ \dfrac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} - \dfrac{Z'}{b} = k \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) + k\left(\dfrac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} + \dfrac{Z'}{b}\right) = 1 \\ \dfrac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} - \dfrac{Z'}{b} = k \end{array} \right.$$

Notons $(\mathcal{S}_k)$ l'ensemble d'équation $\dfrac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) + k\left(\dfrac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} + \dfrac{Z'}{b}\right) = 1$.

$$\begin{aligned} M \in (\mathcal{S}_k) &\Leftrightarrow X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + \frac{kb\sqrt{b^2-a^2}}{a}X' + kbZ' = b^2 \\ &\Leftrightarrow \left(X' + \frac{kb\sqrt{b^2-a^2}}{2a}\right)^2 + Y'^2 + \left(Z' + \frac{kb}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{k^2b^2(b^2-a^2)}{4a^2} + \frac{k^2b^2}{4} \\ &\Leftrightarrow \left(X' + \frac{kb\sqrt{b^2-a^2}}{2a}\right)^2 + Y'^2 + \left(Z' + \frac{kb}{2}\right)^2 = \frac{b^2(4a^2+k^2b^2)}{4a^2}. \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{b^2(4a^2+k^2b^2)}{4a^2} > 0$, $(\mathcal{S}_k)$ est une sphère de centre $\Omega_k\left(-\dfrac{kb\sqrt{b^2-a^2}}{2a}, 0, -\dfrac{kb}{2}\right)$ et de rayon $R_k = \dfrac{b\sqrt{4a^2+k^2b^2}}{2a}$.

Finalement

$$\boxed{\begin{array}{c} (\mathcal{C}_k) \text{ est l'intersection du plan } (\mathcal{P}_k) \text{ et de la sphère } (\mathcal{S}_k) \\ \text{de centre } \Omega_k\left(-\dfrac{kb\sqrt{b^2-a^2}}{2a}, 0, -\dfrac{kb}{2}\right) \text{ et de rayon } R_k = \dfrac{b\sqrt{4a^2+k^2b^2}}{2a}. \end{array}}$$

b) Notons d_k la distance de Ω_k au plan $(\mathcal{P}_k)$.

$$d_k^2 = \frac{\left(-\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{ab} \times \dfrac{kb\sqrt{b^2-a^2}}{2a} + \dfrac{1}{b} \times \dfrac{kb}{2} - k\right)^2}{\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2} + \dfrac{1}{b^2}} = a^2\left(\frac{b^2-a^2}{a} \times \frac{k}{2a} + \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2b^4}{4a^2},$$

puis

$$R_k^2 - d_k^2 = \frac{b^2(4a^2+k^2b^2)}{4a^2} - \frac{k^2b^4}{4a^2} = b^2 > 0.$$

Donc $d_k < R_k$ et on sait que $(\mathcal{C}_k)$ est un cercle de rayon $r_k = \sqrt{R_k^2 - d_k^2} = b$.

$$\boxed{(\mathcal{C}_k) \text{ est un cercle de rayon } b.}$$

c) On remarque que le rayon de $(\mathcal{C}_k)$ ne dépend pas de k. Plus précisément, le rayon de $(\mathcal{C}_k)$ est la longueur du demi-grand axe de l'ellipse $(\mathcal{E})$ ce qui était prévisible puisque l'axe (OY') qui porte ce grand axe est parallèle aux plans (P_k), $k \in \mathbb{R}$.

