

Epreuve de Mathématiques A PC

Question de cours

1) • Soit $C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

$$C \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \Rightarrow C = {}^t C = -C \Rightarrow 2C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Donc $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \{0\}$.

• Soit $C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. On a $C = \frac{1}{2}(C + {}^t C) + \frac{1}{2}(C - {}^t C)$ avec ${}^t\left(\frac{1}{2}(C + {}^t C)\right) = \frac{1}{2}(C + {}^t C)$ et ${}^t\left(\frac{1}{2}(C - {}^t C)\right) = -\frac{1}{2}(C - {}^t C)$.

Donc $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On a montré que

$$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \text{ et } \forall C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), S_C = \frac{1}{2}(C + {}^t C) \text{ et } A_C = \frac{1}{2}(C - {}^t C).$$

2) Puisque $\text{rg}(S) \leq 2 < 3$, la matrice S n'est pas inversible et donc 0 est valeur propre de S .

S est symétrique réelle donc, puisque b_0 est orthonormée, φ_S est un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^3 . D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée b de \mathbb{R}^3 formée de vecteurs propres de φ_S ou encore il existe une base orthonormée b de \mathbb{R}^3 telle que $\mathfrak{M}_b(\varphi_S)$ soit de la forme désirée.

Application. Le polynôme caractéristique de φ_S est

$$\chi_S = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = -X(X^2 - 1) - (-X) = -X(X^2 - 2) = -X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}).$$

• Détermination de $\text{Ker}(\varphi_S)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(\varphi_S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}.$$

$\text{Ker}(\varphi_S)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$.

• Détermination de $\text{Ker}(\varphi_S - \sqrt{2}\text{Id})$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(\varphi_S - \sqrt{2}\text{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} -x\sqrt{2} + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ z = x \end{cases}.$$

$\text{Ker}(\varphi_S - \sqrt{2}\text{Id})$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire $\vec{e}_2 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1)$.

• Puisque φ_S est symétrique, $\text{Ker}(\varphi_S + \sqrt{2}\text{Id})$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1)$.

$b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de φ_S .

Les formules de changement de bases fournissent alors $S = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = {}^tP$ car b est orthonormée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 S^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{(\sqrt{2})^n}{2} & \frac{(-\sqrt{2})^n}{2} \\ 0 & \frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} & -\frac{(-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{(\sqrt{2})^n}{2} & \frac{(-\sqrt{2})^n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{(1+(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{4} & \frac{(1-(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} & \frac{(1+(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{4} \\ \frac{(1-(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} & \frac{(1+(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{2} & \frac{(1-(-1)^n)\sqrt{2}^n}{2\sqrt{2}} \\ \frac{(1+(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{4} & \frac{(1-(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} & \frac{(1+(-1)^n)(\sqrt{2})^n}{4} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et donc

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, S^{2p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{p-1} & 0 \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 0 & 2^{p-1} & 0 \end{pmatrix} = 2^{p-1}S \text{ et } S^{2p} = \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 0 & 2^p & 0 \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix} = 2^{p-1}S^2.$$

Remarque.

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ puis } S^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2S.$$

Par suite, on obtient immédiatement $\forall p \in \mathbb{N}^*, S^{2p-1} = 2^{p-1}S$ puis $S^{2p} = S^{2p-1}S = 2^{p-1}S^2$.

Partie I : Exemples de crochets de Lie et premières propriétés

1) Exemples de CROCHETS DE LIE

a) Il est immédiat que l'application $[,]$ est un crochet de LIE.

b) • $[,]$ est une application de $E \times E$ dans E .

- Soit $(A, B) \in E^2$. $[A, B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B, A]$. Par suite, $[,]$ est antisymétrique.
- Soient $(A, B, C) \in E^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$[\lambda A + \mu B, C] = (\lambda A + \mu B)C - C(\lambda A + \mu B) = \lambda(AC - CA) + \mu(BC - CB) = \lambda[A, C] + \mu[B, C].$$

Donc $[,]$ est linéaire par rapport à sa première variable et donc, puisque $[,]$ est antisymétrique, $[,]$ est bilinéaire.

- Soit $(A, B, C) \in E^3$.

$$\begin{aligned}
 [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= A(BC - CB) - (BC - CB)A + B(CA - AC) - (CA - AC)B + C(AB - BA) - (AB - BA)C \\
 &= ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Finalement, $[,]$ est un crochet de LIE sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, il reste juste se convaincre que $[\ , \]$ est bien une application de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $(A, B) \in (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$. Vérifions que $[A, B] \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$${}^t[A, B] = {}^t(AB - BA) = {}^tB{}^tA - {}^tA{}^tB = (-B)(-A) - (-A)(-B) = -(AB - BA) = -[A, B].$$

Ainsi, $[\ , \]$ est une application de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et donc un crochet de LIE sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $[\ , \]$ n'est pas un crochet de LIE pour $n \geq 2$ car si $(A, B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$, ${}^t[A, B] = -(AB - BA) \neq AB - BA = [A, B]$ si A et B ne commutent pas. De plus, pour $n \geq 2$, $A = E_{1,1}$ et $B = E_{1,2} + E_{2,1}$ fournissent un exemple explicite de matrices symétriques de format n ne commutant pas.

Si $n = 1$, $[\ , \]$ est l'application nulle sur $\mathcal{S}_1(\mathbb{R})$ et donc un crochet de LIE sur $\mathcal{S}_1(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

2) Crochet de LIE usuel sur \mathbb{R}^3

a) Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) &= (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} + (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} \\ &\quad + (\vec{w} \cdot \vec{v}) \vec{u} - (\vec{w} \cdot \vec{u}) \vec{v} \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore

$$[\vec{u}, [\vec{v}, \vec{w}]] + [\vec{v}, [\vec{w}, \vec{u}]] + [\vec{w}, [\vec{u}, \vec{v}]] = \vec{0}.$$

Il est d'autre part connu que le produit vectoriel est une application de $(\mathbb{R}^3)^2$ dans \mathbb{R}^3 , bilinéaire et antisymétrique. Donc

le produit vectoriel est un crochet de LIE sur \mathbb{R}^3 .

b) i) Puisque le produit vectoriel est linéaire par rapport à sa deuxième variable, $\psi_{\vec{a}}$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

ii) Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. $\vec{u} \in \text{Ker}(\psi_{\vec{a}}) \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{u})$ liée $\Leftrightarrow \vec{u} \in \text{Vect}(\vec{a})$.

$$\text{Ker}(\psi_{\vec{a}}) = \text{Vect}(\vec{a}).$$

D'après le théorème du rang, $\text{rg}(\psi_{\vec{a}}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(\psi_{\vec{a}})) = 3 - 1 = 2$.

$$\text{rgr}(\psi_{\vec{a}}) = 2.$$

iii) $\psi_{\vec{a}}(\vec{i}) = (\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}) \wedge \vec{i} = \gamma \vec{j} - \beta \vec{k}$.

$\psi_{\vec{a}}(\vec{j}) = (\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}) \wedge \vec{j} = -\gamma \vec{i} + \alpha \vec{k}$.

$\psi_{\vec{a}}(\vec{k}) = (\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}) \wedge \vec{k} = \beta \vec{i} - \alpha \vec{j}$.

$$A_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

$${}^t(A_{\vec{a}}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix} = -A \text{ et donc } A_{\vec{a}} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}).$$

iv) En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_{A_{\vec{a}}} &= \begin{vmatrix} -X & -\gamma & \beta \\ \gamma & -X & -\alpha \\ -\beta & \alpha & -X \end{vmatrix} = -X(X^2 + \alpha^2) - \gamma(\gamma X - \alpha\beta) - \beta(\alpha\gamma + \beta X) = -X^3 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)X \\ &= -X(X^2 + \|\vec{a}\|^2). \end{aligned}$$

$$\chi_{A_{\vec{a}}} = -X(X^2 + \|\vec{a}\|^2).$$

v) Puisque $\|\vec{a}\|^2 > 0$, $\chi_{A_{\vec{a}}}$ n'est pas scindé sur \mathbb{R} et donc $\psi_{\vec{a}}$ n'est pas diagonalisable.

vi) Soit $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. La question iii) montre que nécessairement

$\vec{a} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$ et réciproquement si $\vec{a} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$ alors $A = A_{\vec{a}}$.

Partie II : Détermination des crochets de Lie en dimension 1 et 2

1) a) Soit (\vec{u}, \vec{v}) une famille liée de E .

• Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$ car l'application $\vec{x} \mapsto [\vec{x}, \vec{v}]$ est linéaire.

• Sinon, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ et donc $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}, \lambda \vec{u}] = \lambda [\vec{u}, \vec{u}]$. Maintenant, par antisymétrie, $[\vec{u}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{u}]$ et donc $[\vec{u}, \vec{u}] = \vec{0}$.

Dans tous les cas, $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$.

b) La réciproque est fautive dans un espace de dimension au moins 2. L'application nulle de $E \times E$ dans E est un crochet de LIE sur E et toute famille libre de 2 vecteurs a pour image $\vec{0}$.

Prenons aussi l'exemple moins trivial du I.1)b). On prend $A = I_n$ et pour B n'importe quelle matrice non scalaire. On a $[A, B] = I_n B - B I_n = 0$ et pourtant la famille (A, B) est libre.

2) a) Dans un espace de dimension 1, toute famille de deux vecteurs est liée et donc, d'après II.1)a), $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$.

b) Ainsi, il y a au plus un crochet de LIE sur un espace E de dimension 1 à savoir l'application nulle de $E \times E$ dans E . Réciproquement, l'application nulle de $E \times E$ dans E est un crochet de LIE sur E d'après I.1)a).

3) a) Si \vec{x} est un vecteur quelconque de E , $[\vec{x}, \vec{x}] = -[\vec{x}, \vec{x}]$ par antisymétrie et donc $[\vec{x}, \vec{x}] = 0$.

Soit alors $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$.

$$\begin{aligned} [\vec{x}, \vec{y}] &= [x_1 \vec{u}_0 + x_2 \vec{v}_0, y_1 \vec{u}_0 + y_2 \vec{v}_0] \\ &= x_1 y_1 [\vec{u}_0, \vec{u}_0] + x_1 y_2 [\vec{u}_0, \vec{v}_0] + x_2 y_1 [\vec{v}_0, \vec{u}_0] + x_2 y_2 [\vec{v}_0, \vec{v}_0] \quad (\text{par bilinéarité}) \\ &= x_1 y_1 \times 0 + x_1 y_2 [\vec{u}_0, \vec{v}_0] - x_2 y_1 [\vec{u}_0, \vec{v}_0] + x_2 y_2 \times 0 \quad (\text{par antisymétrie}) \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) [\vec{u}_0, \vec{v}_0] \\ &= \det_B (\vec{x}, \vec{y}) \vec{k}_0 \text{ où } \vec{k}_0 = [\vec{u}_0, \vec{v}_0]. \end{aligned}$$

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, [\vec{x}, \vec{y}] = \det_B (\vec{x}, \vec{y}) \vec{k}_0 \text{ où } \vec{k}_0 = [\vec{u}_0, \vec{v}_0].$$

b) i) Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3$.

• Si la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de rang au plus 1, chacune des trois familles (\vec{u}, \vec{v}) , (\vec{u}, \vec{w}) et (\vec{v}, \vec{w}) est liée et donc $\det_B (\vec{u}, \vec{v}) = \det_B (\vec{v}, \vec{w}) = \det_B (\vec{w}, \vec{u}) = 0$. L'égalité de l'énoncé est donc vraie dans ce cas.

• Sinon, la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de rang 2 et l'un des trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} ou \vec{w} est combinaison linéaire des deux autres. Supposons par exemple qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$. On a alors

$$\begin{aligned} \det_B (\vec{v}, \vec{w}) \vec{u} + \det_B (\vec{w}, \vec{u}) \vec{v} &= \det_B (\vec{v}, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \vec{u} + \det_B (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{u}) \vec{v} \\ &= \lambda \det_B (\vec{v}, \vec{u}) \vec{u} + \mu \det_B (\vec{v}, \vec{u}) \vec{v} \\ &= -\det_B (\vec{u}, \vec{v}) (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = -\det_B (\vec{u}, \vec{v}) \vec{w} \end{aligned}$$

et l'égalité de l'énoncé est encore une fois vérifiée.

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3, \det_B (\vec{u}, \vec{v}) \vec{w} + \det_B (\vec{v}, \vec{w}) \vec{u} + \det_B (\vec{w}, \vec{u}) \vec{v} = \vec{0}.$$

ii) Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3$. Par linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses variables

$$[\vec{u}, [\vec{v}, \vec{w}]] = [\vec{u}, \det_B (\vec{v}, \vec{w}) \vec{k}] = \det_B (\vec{v}, \vec{w}) [\vec{u}, \vec{k}] = [\det_B (\vec{v}, \vec{w}) \vec{u}, \vec{k}]$$

iii) Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3$. D'après i) et ii),

$$\begin{aligned} [\vec{u}, [\vec{v}, \vec{w}]] + [\vec{v}, [\vec{w}, \vec{u}]] + [\vec{w}, [\vec{u}, \vec{v}]] &= [\det_B (\vec{v}, \vec{w}) \vec{u}, \vec{k}] + [\det_B (\vec{w}, \vec{u}) \vec{v}, \vec{k}] + [\det_B (\vec{u}, \vec{v}) \vec{w}, \vec{k}] \\ &= [\det_B (\vec{v}, \vec{w}) \vec{u} + \det_B (\vec{w}, \vec{u}) \vec{v} + \det_B (\vec{u}, \vec{v}) \vec{w}, \vec{k}] \\ &= [\vec{0}, \vec{k}] = \vec{0}. \end{aligned}$$

D'autre part, $[\cdot, \cdot]$ est une application de $E \times E$, bilinéaire et antisymétrique par bilinéarité et antisymétrie du déterminant en dimension 2. Finalement $[\cdot, \cdot]$ est un crochet de LIE sur E .

c) D'après ce qui précède, les crochets de LIE sur E sont les applications de la forme $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \det_B(\vec{x}, \vec{y}) \vec{k}$ où B est une base quelconque de E et \vec{k} est un vecteur quelconque de E .

Partie III : Etude des crochets de Lie en dimension 3

1) a) Encore une fois, par antisymétrie, on a : $\forall \vec{u} \in E, [\vec{u}, \vec{u}] = \vec{0}$.

i) Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$. Par bilinéarité et antisymétrie de $[\cdot, \cdot]$

$$\begin{aligned} [\vec{x}, \vec{y}] &= [x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}, y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k}] \\ &= x_1 y_1 [\vec{i}, \vec{i}] + x_1 y_2 [\vec{i}, \vec{j}] + x_1 y_3 [\vec{i}, \vec{k}] + x_2 y_1 [\vec{j}, \vec{i}] + x_2 y_2 [\vec{j}, \vec{j}] + x_2 y_3 [\vec{j}, \vec{k}] \\ &\quad + x_3 y_1 [\vec{k}, \vec{i}] + x_3 y_2 [\vec{k}, \vec{j}] + x_3 y_3 [\vec{k}, \vec{k}] \\ &= x_1 y_2 \vec{c}_3 - x_1 y_3 \vec{c}_2 - x_2 y_1 \vec{c}_3 + x_2 y_3 \vec{c}_1 + x_3 y_1 \vec{c}_2 - x_3 y_2 \vec{c}_1 \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{c}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{c}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{c}_3. \end{aligned}$$

ii) Notons X, Y et $X \wedge Y$ les vecteurs colonnes dont les composantes sont les coordonnées des vecteurs respectifs \vec{x}, \vec{y} et $\vec{x} \wedge \vec{y}$ dans la base b_0 .

$$\begin{aligned} C \times X \wedge Y &= \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) c_{1,1} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) c_{1,2} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) c_{1,3} \\ (x_2 y_3 - x_3 y_2) c_{2,1} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) c_{2,2} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) c_{2,3} \\ (x_2 y_3 - x_3 y_2) c_{3,1} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) c_{3,2} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) c_{3,3} \end{pmatrix} \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ c_{3,1} \end{pmatrix} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \begin{pmatrix} c_{1,2} \\ c_{2,2} \\ c_{3,2} \end{pmatrix} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \begin{pmatrix} c_{1,3} \\ c_{2,3} \\ c_{3,3} \end{pmatrix} \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) C_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) C_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) C_3 \end{aligned}$$

et donc $\varphi_C(\vec{x} \wedge \vec{y}) = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{c}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{c}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{c}_3 = [\vec{x}, \vec{y}]$.

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, [\vec{x}, \vec{y}] = \varphi_C(\vec{x} \wedge \vec{y}).$$

iii) La question ii) montre l'existence f : si $[\cdot, \cdot]$ est un crochet de LIE et si $f = \varphi_C$, alors $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, [\vec{x}, \vec{y}] = f(\vec{x} \wedge \vec{y})$.

Réciproquement, si f est un endomorphisme de E tel que $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, [\vec{x}, \vec{y}] = f(\vec{x} \wedge \vec{y})$, alors $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, f(\vec{x} \wedge \vec{y}) = \varphi_C(\vec{x} \wedge \vec{y})$.

En particulier, $f(\vec{i}) = f(\vec{j} \wedge \vec{k}) = \varphi_C(\vec{j} \wedge \vec{k}) = \varphi_C(\vec{i})$ et de même $f(\vec{j}) = \varphi_C(\vec{j})$ et $f(\vec{k}) = \varphi_C(\vec{k})$. Ainsi, les endomorphismes f et φ_C coïncident sur une base de E et donc $f = \varphi_C$.

Remarque. La question ne signifie pas que pour tout endomorphisme f , l'application $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto f(\vec{x} \wedge \vec{y})$ est un crochet de LIE.

b) i) $A_C = \frac{1}{2}(C - {}^t C) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & c_{1,2} - c_{2,1} & c_{1,3} - c_{3,1} \\ c_{2,1} - c_{1,2} & 0 & c_{2,3} - c_{3,2} \\ c_{3,1} - c_{1,3} & c_{3,2} - c_{2,3} & 0 \end{pmatrix}$. D'après I.2)b)vi), $\vec{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_{3,2} - c_{2,3} \\ c_{1,3} - c_{3,1} \\ c_{2,1} - c_{1,2} \end{pmatrix}$ ou encore

$$2\vec{a} = \begin{pmatrix} c_{3,2} - c_{2,3} \\ c_{1,3} - c_{3,1} \\ c_{2,1} - c_{1,2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii) } \vec{i} \wedge \vec{c}_1 + \vec{j} \wedge \vec{c}_2 + \vec{k} \wedge \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ c_{3,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_{2,1} \\ c_{2,2} \\ c_{2,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_{3,1} \\ c_{3,2} \\ c_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{3,2} - c_{2,3} \\ c_{1,3} - c_{3,1} \\ c_{2,1} - c_{1,2} \end{pmatrix} = 2\vec{a}.$$

$$\text{iii) } [\vec{i}, \vec{c}_1] + [\vec{j}, \vec{c}_2] + [\vec{k}, \vec{c}_3] = [\vec{i}, [\vec{j}, \vec{k}]] + [\vec{j}, [\vec{k}, \vec{i}]] + [\vec{k}, [\vec{i}, \vec{j}]] = \vec{0}.$$

$$\text{iv) } \varphi_C(2\vec{a}) = \varphi_C(\vec{i} \wedge \vec{c}_1) + \varphi_C(\vec{j} \wedge \vec{c}_2) + \varphi_C(\vec{k} \wedge \vec{c}_3) = [\vec{i}, \vec{c}_1] + [\vec{j}, \vec{c}_2] + [\vec{k}, \vec{c}_3] = \vec{0}.$$

Donc, $2\varphi_C(\vec{a}) = \varphi_C(2\vec{a}) = \vec{0}$ puis $\varphi_C(\vec{a}) = \vec{0}$.

Ensuite, $\varphi_{S_C}(\vec{a}) = \varphi_C(\vec{a}) - \varphi_{A_C}(\vec{a}) = \vec{0} - \vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$ et donc $\vec{a} \in \text{Ker}(\varphi_{S_C})$.

c) D'après la formule du double produit vectoriel, $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\varphi_{A_C}(\vec{x} \wedge \vec{y}) = \vec{a} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{y}) = (\vec{a} \cdot \vec{y}) \vec{x} - (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{y}$ et donc

$$[\vec{x}, \vec{y}] = \varphi_{S_C}(\vec{x} \wedge \vec{y}) + \varphi_{A_C}(\vec{x} \wedge \vec{y}) = \varphi_{S_C}(\vec{x} \wedge \vec{y}) + (\vec{a} \cdot \vec{y}) \vec{x} - (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{y}$$

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2, [\vec{x}, \vec{y}] = \varphi_{S_C}(\vec{x} \wedge \vec{y}) + (\vec{a} \cdot \vec{y}) \vec{x} - (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{y}.$$

2) a) $[\cdot, \cdot]$ est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables par linéarité de φ_S et bilinéarité du produit scalaire et du produit vectoriel.

Ensuite, pour $(\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2$

$$[\vec{y}, \vec{x}] = \varphi_{S_C}(\vec{y} \wedge \vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{y} - (\vec{a} \cdot \vec{y}) \vec{x} = -(\varphi_{S_C}(\vec{x} \wedge \vec{y}) + (\vec{a} \cdot \vec{y}) \vec{x} - (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{y}) = -[\vec{x}, \vec{y}].$$

$[\cdot, \cdot]$ est bilinéaire et antisymétrique.

b) i) Dans la question de cours 2), le premier vecteur de \mathfrak{b} doit appartenir au noyau de φ_S . Comme $\vec{a} \in \text{Ker}(\varphi_S)$, $\frac{1}{\rho} \vec{a} \in \text{Ker}(\varphi_S)$ où cette fois-ci le vecteur $\frac{1}{\rho} \vec{a}$ est unitaire et donc non nul. Donc peut choisir comme premier vecteur de \mathfrak{b} le vecteur $\frac{1}{\rho} \vec{a}$.

ii) On note tout d'abord que $\vec{a} \cdot \vec{u} = \rho \left(\frac{1}{\rho} \vec{a} \cdot \vec{u} \right) = \rho u_1$ car \mathfrak{b} est orthonormée. De même, $\vec{a} \cdot \vec{v} = \rho v_1$. Puis

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}}([\vec{u}, \vec{v}]) &= \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}}(\varphi_S(\vec{u} \wedge \vec{v})) + (\vec{a} \cdot \vec{v}) \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}}(\vec{u}) - (\vec{a} \cdot \vec{u}) \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}}(\vec{v}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} + \rho v_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \rho u_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(u_3 v_1 - u_1 v_3) + \rho(u_2 v_1 - u_1 v_2) \\ \gamma(u_1 v_2 - u_2 v_1) + \rho(u_3 v_1 - u_1 v_3) \end{pmatrix} = (u_3 v_1 - u_1 v_3) \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbb{R}^3)^2, [\vec{u}, \vec{v}] = (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{d} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e} \text{ où } \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}}(\vec{d}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix} \text{ et } \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}}(\vec{e}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

iii) D'après ce qui précède

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{b}}([\vec{x}, \vec{d}]) = (x_3 d_1 - x_1 d_3) \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}}(\vec{d}) + (x_1 d_2 - x_2 d_1) \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}}(\vec{e}) = -\rho x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix} + \beta x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ \gamma \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2\beta\rho \\ -\rho^2 + \beta\gamma \end{pmatrix}.$$

Donc, avec les notations de la question suivante, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $[\vec{x}, \vec{d}] = -x_1 \vec{e}'$. De même,

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{b}}([\vec{x}, \vec{e}']) = (x_3 e_1 - x_1 e_3) \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}}(\vec{d}) + (x_1 e_2 - x_2 e_1) \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}}(\vec{e}') = -\gamma x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix} - \rho x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ \gamma \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \rho^2 - \beta\gamma \\ -2\gamma\rho \end{pmatrix},$$

et donc, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $[\vec{x}, \vec{e}'] = x_1 \vec{d}'$.

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, [\vec{x}, \vec{d}] = -x_1 \vec{e}' \text{ et } [\vec{x}, \vec{e}'] = x_1 \vec{d}'.$$

iv) Soit $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in (\mathbb{R}^3)^3$. D'après ii) et iii)

$$\begin{aligned} [\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]] &= (y_3z_1 - y_1z_3) [\vec{x}, \vec{d}] + (y_1z_2 - y_2z_1) [\vec{x}, \vec{e}] \\ &= -x_1(y_3z_1 - y_1z_3)\vec{e} + x_1(y_1z_2 - y_2z_1)\vec{d} = x_1 \left((y_1z_2 - y_2z_1)\vec{d} + (y_1z_3 - y_3z_1)\vec{e} \right). \end{aligned}$$

v) Mais alors, en échangeant les rôles de \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} , on obtient

$$\begin{aligned} [\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]] + [\vec{y}, [\vec{z}, \vec{x}]] + [\vec{z}, [\vec{x}, \vec{y}]] &= x_1 \left((y_1z_2 - y_2z_1)\vec{d} + (y_1z_3 - y_3z_1)\vec{e} \right) \\ &\quad + y_1 \left((z_1x_2 - z_2x_1)\vec{d} + (z_1x_3 - z_3x_1)\vec{e} \right) \\ &\quad + z_1 \left((x_1y_2 - x_2y_1)\vec{d} + (x_1y_3 - x_3y_1)\vec{e} \right) \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

En tenant compte de la question a), on a montré que

$[\ , \]$ est un crochet de LIE.

vi) **Application.** Le noyau de φ_S contient le vecteur non nul $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$.
Soient $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ et $\vec{y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$.

$$\begin{aligned} \varphi_S(\vec{x} \wedge \vec{y}) &= (x_2y_3 - x_3y_2)\varphi_S(\vec{i}) + (x_3y_1 - x_1y_3)\varphi_S(\vec{j}) + (x_1y_2 - x_2y_1)\varphi_S(\vec{k}) \\ &= (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{i} + ((x_2y_3 - x_3y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1))\vec{j} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{k} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{y})\vec{x} - (\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{y} &= (y_1 - y_3)(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) - (x_1 - x_3)(y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}) \\ &= (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{i} - ((x_2y_3 - x_3y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1))\vec{j} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{k} \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} [\vec{x}, \vec{y}] &= 2(x_3y_1 - x_1y_3)(\vec{i} + \vec{k}) = 2((\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{j})(\vec{i} + \vec{k}) \\ &= 2\det_{b_0}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{j})(\vec{i} + \vec{k}). \end{aligned}$$

$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2, [\vec{x}, \vec{y}] = 2\det_{b_0}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{j})(\vec{i} + \vec{k}).$

c) Si $\vec{a} = \vec{0}$, $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $[\vec{x}, \vec{y}] = \varphi_S(\vec{x} \wedge \vec{y})$. La question I.2)a) montre alors immédiatement que $[\ , \]$ est un crochet de LIE.