Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

Exercice I

1) a) Montrons que $G \subset F^{\perp}$.
Soit $(P, Q) \in F \times G$. La fonction $t \mapsto P(t)$ est paire et la fonction $t \mapsto Q(t)$ est impaire. Donc la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est impaire. On sait alors que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt = 0$.
Ainsi, $\forall Q \in G$, $(\forall P \in F,\ \langle P, Q\rangle = 0)$ et donc $G \subset F^{\perp}$.

D'autre part, $F = \text{Vect}(X^{2k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ et donc $\dim(F) = n+1$. De même, $G = \text{Vect}(X^{2k+1})_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ et donc $\dim(G) = n$. En particulier,

$$\dim(G) = (2n+1) - (n+1) = \dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) - \dim(F) = \dim(F^{\perp}).$$

En résumé, $G \subset F^{\perp}$ et $\dim(G) = \dim(F^{\perp}) < +\infty$. On en déduit que $G = F^{\perp}$. On a montré que

$$\boxed{F \overset{\perp}{\oplus} G = \mathbb{R}_{2n}[X],\ \dim(F) = n+1 \text{ et } \dim(G) = n.}$$

b) Soit $P \in E$. $(X^2-1)P''$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\deg(P)$ et donc de degré au plus $2n$. Il en est de même de $2XP'$ et finalement de $\Delta(P)$. Ceci montre que Δ est bien une application de E dans E.
Soient $(P, Q) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + \mu Q) &= (X^2-1)(\lambda P+\mu Q)'' + 2X(\lambda P+\mu Q)' = \lambda((X^2-1)P'' + 2XP') + \mu((X^2-1)Q'' + 2XQ') \\ &= \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q).\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\Delta \in \mathscr{L}(E).}$$

c) $\Delta(1) = 0$ et $\Delta(X) = 2X$. Soit $k \in [\![2, 2n]\!]$.

$$\Delta(X^k) = (X^2-1)\times k(k-1)X^{k-2} + 2X \times kX^{k-1} = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

On en déduit la matrice A de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1\times 0 & 0 & -2\times 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\times 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3\times 2 & & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & -2n\times(2n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & (2n+1)\times 2n \end{pmatrix}}.$$

Puisque A est triangulaire supérieure, on obtient $\chi_{\Delta} = \displaystyle\prod_{k=0}^{2n}(\lambda_k - X)$ où $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $\lambda_k = k(k+1)$.
Vérifions que les λ_k, $0 \leqslant k \leqslant 2n$, sont deux à deux distincts. Soit $(k, k') \in [\![0, 2n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}\lambda_k = \lambda_{k'} &\Leftrightarrow k(k+1) = k'(k'+1) \Leftrightarrow (k'^2 - k^2) + (k'-k) = 0 \Leftrightarrow= (k'-k)(k+k'+1) = 0 \\ & k = k' \text{ (car } k+k'+1 \neq 0).\end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme caractéristique de Δ est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. On sait alors que Δ est diagonalisable et que les sous-espaces propres de Δ sont de dimension 1.

d) Pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note E_k le sous-espace propre de Δ associé à la valeur propre λ_k.

• E_0 est une droite vectorielle et $1 \in E_0$. Par suite, $E_0 = \text{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$. Les éléments non nuls de E_0 sont les polynômes de degré 0 et de plus il existe un et un seul polynôme unitaire de degré 0 à savoir $P_0 = 1$.

• Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$. Soient P un élément non nul de E_k puis p le degré de P.
Si $p = 0$, $\Delta(P) = 0$.
Si $p = 1$, $\Delta(P) = 2XP'$. Dans ce cas, $\Delta(P)$ est de degré 1 et de coefficient dominant $2\text{dom}(P) = \lambda_1 \text{dom}(P)$.
Si $p \geqslant 2$, on a déjà $\deg(\Delta(P)) \leqslant \deg(P)$. De plus, le coefficient de X^p dans $\Delta(P)$ est $(p(p-1)+2p)\text{dom}(P) = p(p+1)\text{dom}(P) = \lambda_p \text{dom}(P)$ ce qui reste vrai quand $p = 1$. En résumé, si $p \geqslant 1$, $\deg(\Delta(P)) = \deg(P)$ et $\text{dom}(\Delta(P)) = \lambda_p \text{dom}(P)$.

L'égalité $\Delta(P) = \lambda_k P$ fournit alors $\lambda_p \text{dom}(P) = \lambda_k \text{dom}(P)$ puis $\lambda_p = \lambda_k$ et donc $p = k$ (d'après c)). Les éléments non nuls de E_k sont de degré k.
Plus précisément, soit P un élément non nul de E_k donné. Puisque E_k est une droite vectorielle, les éléments non nuls de E_k sont les λP, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Le coefficient dominant d'un tel polynôme est $\lambda \text{dom}(P)$ et ce coefficient vaut 1 si et seulement si $\lambda = \dfrac{1}{\text{dom}(P)}$. Ceci montre l'existence et l'unicité de P_k.

e) Soit $(P, Q) \in E^2$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\langle \Delta(P), Q\rangle &= \int_{-1}^{1} \left((X^2-1)P'\right)'(t)Q(t)\,dt \\ &= \left[(t^2-1)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{0}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,dt = -\int_{0}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,dt\end{aligned}$$

Puis en échangeant les rôles de P et Q, $\langle P, \Delta(Q)\rangle = \langle \Delta(Q), P\rangle = -\displaystyle\int_{0}^{1}(t^2-1)Q'(t)P'(t)\,dt = \langle \Delta(P), Q\rangle$.

$$\boxed{\forall (P, Q) \in E^2,\ \langle \Delta(P), Q\rangle = \langle P, \Delta(Q)\rangle.}$$

Soit alors $(k, h) \in [\![0, 2n]\!]^2$ tel que $k \neq h$.

$$\lambda_k\langle P_k, P_h\rangle = \langle \lambda_k P_k, P_h\rangle = \langle \Delta(P_k), P_h\rangle = \langle P_k, \Delta(P_h)\rangle = \langle P_k, \lambda_h P_h\rangle = \lambda_k\langle P_k, P_h\rangle.$$

Par suite, $(\lambda_k - \lambda_h)\langle P_k, P_h\rangle = 0$ et donc $\langle P_k, P_h\rangle = 0$ puisque $\lambda_k - \lambda_h \neq 0$.

Ainsi, la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant 2n}$ est une famille orthogonale. Puisque tous les P_k sont non nuls, cette famille est libre et puisque $\text{card}(P_k)_{0\leqslant k\leqslant 2n} = 2n + 1 = \dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) < +\infty$,

$$\boxed{\text{la famille } (P_k)_{0\leqslant k\leqslant 2n} \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_{2n}[X].}$$

f) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Vérifions que $P_{2k} \in F$.
Soit $Q_{2k} = P_{2k}(-X)$. Puisque P_{2k} est de degré pair $2k$ et unitaire, Q_{2k} est de degré $2k$ et unitaire. D'autre part,

$$\begin{aligned}\Delta(Q_{2k}) &= (X^2-1)Q''_{2k} + 2XQ'_{2k} = (X^2-1)P''_{2k}(-X) - 2XP'_{2k}(-X) = ((-X)^2-1)P''_{2k}(-X) + 2(-X)P'_{2k}(-X) \\ &= \lambda_{2k}P_{2k}(-X) = \lambda_{2k}Q_{2k}.\end{aligned}$$

Donc, Q_{2k} est un élément de E_{2k}, unitaire de degré $2k$. Par unicité d'un tel polynôme, $Q_{2k} = P_{2k}$ ou encore $P_{2k}(-X) = P_{2k}(X)$. On a montré que $P_{2k} \in F$.

Ainsi, la famille $(P_0, P_2, \ldots, P_{2n})$ est une famille libre de F en tant que famille orthogonale de vecteurs tous non nuls. Puisque $\text{card}(P_{2k})_{0\leqslant k\leqslant n} = n + 1 = \dim(F) < +\infty$, la famille $(P_0, P_2, \ldots, P_{2n})$ est une base orthogonale de F.

De même, le polynôme $Q_{2k+1} = -P_{2k+1}(-X)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, est unitaire de degré $2k+1$ et dans G car

$$\begin{aligned}\Delta(Q_{2k+1}) &= (X^2-1)Q''_{2k+1} + 2XQ'_{2k+1} = -(X^2-1)P''_{2k+1}(-X) + 2XP'_{2k+1}(-X) \\ &= -\left[((-X)^2-1)P''_{2k+1}(-X) + 2(-X)P'_{2k}(-X)\right] = -\lambda_{2k+1}P_{2k+1}(-X) \\ &= \lambda_{2k+1}Q_{2k+1}.\end{aligned}$$

ce qui montre que $Q_{2k+1} = P_{2k+1}$ ou encore $-P_{2k+1}(-X) = P_{2k+1}(X)$.

Ainsi, la famille $(P_1, P_3, \ldots, P_{2n-1})$ est une famille orthogonale de G de vecteurs tous non nuls et de cardinal $n = \dim(G) < +\infty$. Par suite, la famille $(P_1, P_2, \ldots, P_{2n-1})$ est une base orthogonale de G.

$$\boxed{(P_0, P_2, \ldots, P_{2n}) \text{ est une base orthogonale de } F \text{ et } (P_1, P_2, \ldots, P_{2n-1}) \text{ est une base orthogonale de } G.}$$

2) **a)** $P_0 = 1$. Posons $P_1 = X + a$.

$$\Delta(P_1) = \lambda_1 P_1 \Leftrightarrow 2XP_1' = 2P_1 \Leftrightarrow 2X = 2(X+a) \Leftrightarrow a = 0.$$

Donc $P_1 = X$.

Posons $P_2 = X^2 + aX + b$.

$$\begin{aligned}\Delta(P_2) = \lambda_2 P_2 &\Leftrightarrow (X^2-1)P_2'' + 2XP_2' = 6P_2 \Leftrightarrow 2(X^2-1) + 2X(2X+a) = 6(X^2+aX+b) \Leftrightarrow 4aX + 6b + 2 = 0\\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Donc $P_2 = X^2 - \dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{P_0 = 1,\ P_1 = X \text{ et } P_2 = X^2 - \frac{1}{3}.}$$

Normons P_0, P_1 et P_2.

$\|P_0\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1^2 \, dt = 2$ et donc $\|P_0\| = \sqrt{2}$.

$\|P_1\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2 \, dt = \frac{2}{3}$ et donc $\|P_1\| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

$\|P_2\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{45}$ et donc $\|P_2\| = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$.

$$\boxed{\text{Une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de } \Delta \text{ est } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2-1)\right).}$$

b) Une base orthonormée de G est (E_1) où $E_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}X$. Le projeté orthogonal de A sur G est $p_G(A) = \langle A, E_1\rangle E_1$ avec

$$\langle A, E_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}(t+1)t \, dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3},$$

et donc $p_G(A) = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \times \dfrac{2}{3} \times \sqrt{\dfrac{3}{2}}X = X$. Puis

$$(d(A,G))^2 = \|A - p_G(A)\|^2 = \int_{-1}^{1}(t+1-t)^2 \, dt = 2,$$

et donc

$$\boxed{d(A,G) = \sqrt{2}.}$$

c) Soit u un endomorphisme de E. On note $M = \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ sa matrice dans la base (P_0, P_1, P_2). La matrice de Δ dans cette base étant $\mathrm{diag}(0,2,6)$

$$\begin{aligned}u \in C &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2b & 6c\\ 0 & 2e & 6f\\ 0 & 2h & 6i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 2d & 2e & 2f\\ 6g & 6h & 6i\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow b = c = d = g = f = h = 0 \Leftrightarrow M \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

L'ensemble C' des matrices solutions est un espace vectoriel de dimension 3. Maintenant, on sait que l'application $\begin{array}{cccc}\varphi : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\\ & u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}(u)\end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Donc $C = \varphi^{-1}(C')$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 3.

d) Soit g un endomorphisme de E tel que $g \circ g = \Delta$. Alors $g \circ \Delta = g \circ g \circ g = \Delta \circ g$. D'après la question précédente, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}(g) = \mathrm{diag}(a, b, c)$.

Réciproquement, soit g un tel endomorphisme.

$$g \circ g = \Delta \Leftrightarrow \mathrm{diag}(a^2, b^2, c^2) = \mathrm{diag}(0, 2, 6) \Leftrightarrow (a, b, c) \in \{(0, \sqrt{2}, \sqrt{6}), (0, -\sqrt{2}, \sqrt{6}), (0, \sqrt{2}, -\sqrt{6}), (0, -\sqrt{2}, -\sqrt{6}).$$

On trouve ainsi quatre endomorphismes solutions de l'équation $g \circ g = \Delta$ à savoir les quatre endomorphismes de matrices respectives $\mathrm{diag}(0, \sqrt{2}, \sqrt{6})$, $\mathrm{diag}(0, -\sqrt{2}, \sqrt{6})$, $\mathrm{diag}(0, \sqrt{2}, -\sqrt{6})$ et $\mathrm{diag}(0, -\sqrt{2}, -\sqrt{6})$ dans la base (P_0, P_1, P_2).

Exercice II

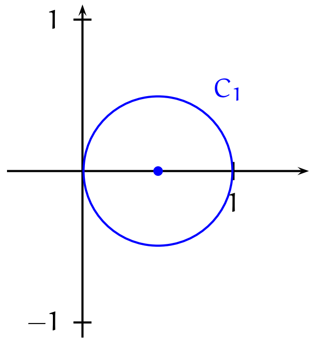
1) a)

(i) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $(2x-1)^2 + (2y)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. C_1 est le cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

(ii) Notons C_1' la courbe paramétrée par f_1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x, y) \in C_1' \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \left\{ \begin{array}{l} x = \cos^2(t) \\ y = \cos(t)\sin(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) \\ y = \frac{1}{2}\sin(2t) \end{array} \right. \Leftrightarrow (x, y) \in C_1.$$

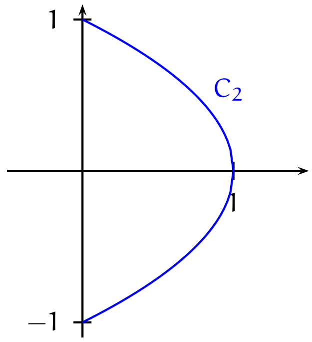
C_1 est la courbe paramétrée par f_1.



b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x, y) \in C_2 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \left\{ \begin{array}{l} x = \cos^2(t) \\ y = \sin(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \sin^2(t) \\ y = \sin(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - y^2 \\ y = \sin(t) \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow x = 1 - y^2 \text{ et } -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

C_2 est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x + y^2 = 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$. C_2 est une parabole de sommet $(1, 0)$. C_2 est la réunion des graphes des fonctions $x \mapsto \sqrt{1-x}$ et $x \mapsto -\sqrt{1-x}$.

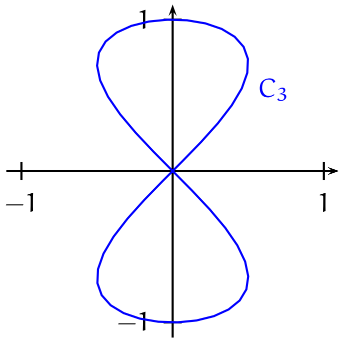


c) Pour tout réel t, $M_3(t + 2\pi) = M_3(t)$. On obtient donc la courbe complète quand t décrit $[-\pi, \pi]$.
Pour $t \in [-\pi, \pi]$, $M_3(-t) = (-\cos(t)\sin(t), -\sin(t)) = s_O(M_3(t))$. On étudie et on construit la portion de courbe obtenue quand t décrit $[0, \pi]$ puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O.
Pour $t \in [0, \pi]$, $M_3(\pi - t) = (-\cos(t)\sin(t), \sin(t)) = s_{(Oy)}(M_3(t))$. On étudie et on construit la portion de courbe obtenue quand t décrit $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis par symétrie centrale de centre O.

La fonction $y : t \mapsto \sin(t)$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction $x : t \mapsto \cos(t)\sin(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\overrightarrow{dM_3}}{dt} = (\cos(2t), \cos(t))$. En particulier, $\frac{\overrightarrow{dM_3}}{dt}(0) = (1, 1)$, $\frac{\overrightarrow{dM_3}}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\frac{\overrightarrow{dM_3}}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0)$.

On en déduit que la tangente en $M_3(0) = (0, 0)$ est dirigée par $(1, 1)$, la tangente en $M_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est parallèle à (Oy) et la tangente en $M_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$ est parallèle à (Ox).



Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(t)\sin(t)$ et $y = \sin(t)$. Alors

$$(2x)^2 + (1-2y^2)^2 = (2\cos(t)\sin(t))^2 + (1-2\sin^2(t))^2 = (\sin(2t))^2 + (\cos(2t))^2 = 1.$$

Réciproquement, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(2x)^2 + (1-2y^2)^2 = 1$. Alors $(1-2y^2)^2 \leqslant 1$ puis $-1 \leqslant 1-2y^2 \leqslant 1$ puis $y^2 \leqslant 1$ et donc $-1 \leqslant y \leqslant 1$.
On peut poser $\theta = \text{Arcsin}(y)$. Alors $y = \sin(\theta)$ puis

$$\begin{aligned}(2x)^2 + (1-2y^2)^2 = 1 &\Rightarrow (2x)^2 + (1-2\sin^2\theta)^2 = 1 \Rightarrow (2x)^2 = 1-\cos^2(2\theta) \Rightarrow (2x)^2 = \sin^2(2\theta)\\ &\Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}\sin(2\theta) \Rightarrow x = \pm\sin(\theta)\cos(\theta).\end{aligned}$$

Si $x = \sin(\theta)\cos(\theta)$, le réel $t = \theta$ est un réel tel que $x = \cos(t)\sin(t)$ et $y(t) = \sin(t)$ et si $x = -\cos(\theta)\sin(\theta)$ le réel $t = \pi - \theta$ est un réel tel que $x = \cos(t)\sin(t)$ et $y = \sin(t)$.
Dans tous les cas, il existe un réel t tel que $x = \cos(t)\sin(t)$ et $y = \sin(t)$.

$$\boxed{C_3 \text{ est la courbe d'équation } (2x)^2 + (1-2y^2)^2 = 1.}$$

2) a) S_2 est la sphère de centre O et de rayon 1.
$x^2 - x + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. L'intersection de S_1 avec le plan (xOy) est donc la courbe C_1 de la question 1)a) puis S_1 est le cylindre de révolution de rayon $\frac{1}{2}$ et d'axe la parallèle à (Oz) passant par $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

b) Γ est l'intersection de S_1 et S_2.

c) On sait que S_1 (resp. S_2) est une surface régulière et que la règle de dédoublement des termes fournit une équation du plan tangent à S_1 (resp. S_2) en $(x_0, y_0, z_0) \in S_1$ (resp. S_2) :

$$xx_0 + yy_0 = \frac{1}{2}(x + x_0) \text{ ou encore } \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)x + y_0 y = \frac{1}{2}x_0 \text{ (resp. } xx_0 + yy_0 + zz_0 = 1).$$

On sait que la tangente à Γ en (x_0, y_0, z_0) est l'intersection de ces deux plans quand ces deux plans sont sécants. Ces deux plans admettent pour vecteur normaux respectifs $\left(x_0 - \frac{1}{2}, y_0, 0\right)$ et (x_0, y_0, z_0) avec

$$\begin{pmatrix} x_0 - \frac{1}{2} \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 z_0 \\ \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) z_0 \\ -\frac{1}{2}y_0 \end{pmatrix}.$$

Si ce vecteur est nul, alors $y_0 = 0$ puis $x_0 \in \{0, 1\}$ (car $(x_0^2 - x_0 + y_0^2 = 0)$ puis $z_0 = 0$ (car $\left(x_0 - \frac{1}{2}\right) z_0 = 0$). Mais le point $(0, 0, 0)$ n'appartient pas à S_2 et donc n'appartient pas à Γ. Par contre, le point $(1, 0, 0)$ appartient à Γ et les plans tangents à S_1 et S_2 en ce point sont les mêmes.

Soit donc (x_0, y_0, z_0) un point de Γ distinct de $(1, 0, 0)$. Un système d'équations cartésiennes de la tangente à Γ en (x_0, y_0, z_0) est $\left\{\begin{array}{l}\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)x + y_0 y = \frac{1}{2}x_0 \\ xx_0 + yy_0 + zz_0 = 1\end{array}\right.$.

d) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \Gamma \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r\cos(\theta) = r^2 \\ r^2+z^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos(\theta) = r \\ r^2+z^2 = 1 \end{array}\right. \quad (\text{car } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ refournit } r = 0)$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \cos(\theta) \\ z^2 = 1-\cos^2(\theta) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \cos(\theta) \\ z = \pm\sin(\theta) \end{array}\right.$$

Γ est donc l'ensemble des $(\cos^2(\theta), \cos(\theta)\sin(\theta), \pm\sin(\theta))$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Plus précisément, Γ est la réunion des deux courbes Γ_1 et Γ_2 de paramétrisations respectives $\theta \mapsto (\cos^2(\theta), \cos(\theta)\sin(\theta), \sin(\theta))$ et $\theta \mapsto (\cos^2(\theta), \cos(\theta)\sin(\theta), -\sin(\theta))$. Mais pour tout réel θ, on a $M_2(\theta+\pi) = M_1(\theta)$ ce qui montre que Γ_1 et Γ_2 sont une seule et même courbe à savoir la courbe Γ. Finalement une paramétrisation de Γ est $\theta \mapsto (\cos^2(\theta), \cos(\theta)\sin(\theta), \sin(\theta))$.

On note $\mathscr{C}$ le cône de sommet S et de directrice Γ.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $M_\theta = (\cos^2(\theta), \cos(\theta)\sin(\theta), \sin(\theta))$. Il est clair que S n'est pas un des points M_θ. Comme $\mathscr{C}$ est l'ensemble des droites (SM_θ), $\theta \in \mathbb{R}$, une représentation paramétrique de $\mathscr{C}$ est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + \lambda\left(\cos^2(\theta) - \frac{1}{2}\right) \\ y = \lambda\cos(\theta)\sin(\theta) \\ z = \lambda\sin(\theta) \end{array}\right., \ (\lambda,\theta) \in \mathbb{R}^2.$$

e) On a vu en d) que $\gamma = \Gamma$.

f) La projections orthogonale de Γ sur le plan (xOy) est l'ensemble des $(\cos^2(t), \cos(t)\sin(t), 0)$. C'est la courbe C_1 de la question 1)a).
De même, les projections orthogonales de Γ sur les plans (xOz) et (yOz) sont les courbes C_2 et C_3 respectivement.

Exercice III

1) a) La fonction $u\ :\ x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ est continue sur $]0,1[$.

En 0, $u(x) \sim \ln(x)$ et en particulier, $u(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Puisque $\dfrac{1}{2} < 1$, la fonction u est intégrable sur un voisinage de 0.

En 1, $\dfrac{\ln(x)}{1-x} \sim -1$. La fonction u se prolonge donc par continuité en 1 et en particulier est intégrable sur un voisinage de 1.
Finalement, la fonction u est intégrable sur $]0,1[$.

Pour $x \in]0,1[$, on pose $v(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}$. Comme pour tout $x \in]0,1[$, $v(x) = u(1-x)$, la fonction v est intégrable sur $]0,1[$.

Finalement, les intégrales J et K existent.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue sur $]0,1]$ et dominée en 0 par $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. On en déduit que la fonction $x \mapsto x^n \ln(x)$ est intégrable sur $]0,1]$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in]0,1[$. Les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe C^1 sur $[a,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_a^1 x^n \ln(x)\ dt = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^n}{n+1}\ dx = -\frac{a^{n+1}}{n+1}\ln(a) - \frac{1}{(n+1)^2}(1-a^{n+1}).$$

Quand a tend vers 0, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 x^n \ln(x) = -\frac{1}{(n+1)^2}.}$$

c) f est de classe C^1 par morceaux et 2π-périodique. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ car

$$f(\pi^+) = f(-\pi^+) = |-\pi] = |\pi| = f(\pi-) = f(\pi).$$

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$.

Calculons les coefficients de Fourier de f. f est paire et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}x\cos(nx)\ dx$.

- Si $n = 0$, $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x\ dx = \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{\pi^2}{2} = \pi$.
- Si $n \geqslant 1$, une intégration par parties fournit

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\ dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nx)\ dx\right) = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}.$$

D'après le théorème de Dirichlet cité plus haut, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos(nx) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos((2p+1)x). \end{aligned}$$

Pour $x = 0$, on obtient $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = 0$ et donc

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

d) $T = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}T + S$ et donc $\dfrac{3}{4}T = S$ puis $T = \dfrac{4}{3}S = \dfrac{\pi^2}{6}$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

e) Pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n(x) = x^n \ln(x)$ puis pour $x \in]0,1[$, posons $g(x) = \frac{\ln(x)}{1-x}$. Pour $x \in]0,1[$, on a

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x).$$

• Chaque fonction g_n est continue et intégrable sur $]0,1[$ d'après b).
• La série de fonctions de terme général g_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction g sur $]0,1[$ et de plus, la fonction g est continue sur $]0,1[$.
• $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |g_n(x)|\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 -x^n \ln(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$

D'après un théorème d'intégration terme à terme, g est intégrable sur $]0,1[$ (ce qui a déjà établi à la question a)), la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,dx$ converge et

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

En posant $t = 1-x$, on obtient $K = \displaystyle\int_1^0 \frac{\ln(1-(1-t))}{1-t} - dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,dt = J.$

$$\boxed{J = K = -\frac{\pi^2}{6}.}$$

f) La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+x}$ est continue sur $]0,1]$ et négligeable en 0 devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\,dx$ existe.
La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{1-x^2}$ est continue sur $]0,1[$, négligeable en 0 devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$ et prolongeable par continuité en 1 (par $-\frac{1}{2}$).
Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\,dx$ existe.

Pour tout réel $x \in]0,1[$, $\displaystyle\frac{\ln(x)}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n g_n(x)$. Puisque $|(-1)^n g_n| = |g_n|$, la démonstration du e) s'applique à la série de fonctions de terme général $(-1)^n g_n$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\,dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^n \ln(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{-1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}T - S = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx + \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12}\right) = -\frac{\pi^2}{8}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\,dx = -\frac{\pi^2}{12} \text{ et } \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi^2}{8}.}$$

2) a) $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^k}{k} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln 2$. D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\frac{1}{k^2 2^k} \underset{k \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Donc, la série numérique de terme général $\frac{1}{k^2 2^k}$ converge.

b) Avec les notations de la question 1)e), pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^{1/2} |g_n(x)|\ dx \leqslant \int_0^1 |g_n(x)|\ dx = \frac{1}{(n+1)^2}$ et comme à la question 1)e), on peut intégrer terme à terme. On obtient

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(x)}{1-x}\ dx = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln(x)\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{1/2} x^n \ln(x)\ dx.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int_a^{1/2} x^n \ln(x)\ dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)\ dx\right]_a^{1/2} - \frac{1}{n+1}\int_a^{1/2} \frac{x^n}{n+1}\ dx \\ &= -\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\ln(2) - \frac{a^{n+1}\ln(a)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - a^{n+1}\right),\end{aligned}$$

et quand a tend vers 0, on obtient $\displaystyle\int_0^{1/2} x^n \ln(x)\ dx = -\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\ln(2) - \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}$. Par suite,

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(x)}{1-x}\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\ln(2) - \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}\right) = -A\ln(2) - B = -(\ln(2))^2 - B.$$

c) Pour $t \in]-1,1[$, posons $h(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-t)}{t} \text{ si } t \neq 0 \\ -1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$. Pour tout réel $t \in]-1,1[$, on a $h(t) = \dfrac{\ln(1-t)}{t} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$ ce qui reste vrai pour $t = 0$. La fonction h est donc développable en série entière sur $]-1,1[$ et en particulier continue sur $[0,1[$. Une primitive de la fonction h sur $]0,1[$ est $H\ :\ t \mapsto -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$ et donc

$$\int_0^{1/2} h(t)\ dt = H\left(\frac{1}{2}\right) - H(0) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = -B.$$

D'autre part, en posant $x = 1-t$, on obtient

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t}\ dt = \int_{1/2}^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\ dx = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\ dx - \int_0^{1/2} \frac{\ln(x)}{1-x}\ dx = -\frac{\pi^2}{6} + (\ln(2))^2 + B.$$

On en déduit que $-B = -\dfrac{\pi^2}{6} + (\ln(2))^2 + B$ et donc que

$$\boxed{B = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln(2))^2}{2}.}$$

3) a) $g(x) = x + \ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Puis

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

b) En particulier, $a_{n+1} - a_n$ est de signe constant à partir d'un certain rang et $a_{n+1} - a_n$ est équivalent au terme général d'une série convergente. On en déduit que la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ converge.

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$ et donc la suite (a_n) converge.

c) Pour tout entier naturel non nul n, on a $\dfrac{h_n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge, la série de terme général $\dfrac{h_n}{n}$ diverge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{h_{n+1}}{n+1} - \frac{h_n}{n} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n(n+1)}\left(n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{n}{n+1} - (n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{n}{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) < 0.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\left(\dfrac{h_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. D'autre part, $\dfrac{h_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$ et en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{n} = 0$.
En résumé, la suite $\left((-1)^{n-1}\dfrac{h_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général $(-1)^{n-1}\dfrac{h_n}{n}$ converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n \ln(1-x)$ est continue sur $[0,1[$, équivalente en 1 à $\ln(1-x)$ et donc négligeable devant $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ quand x tend vers 1. On en déduit que la fonction $x \mapsto x^n \ln(1-x)$ est intégrable sur $[0,1[$ et donc que v_n existe.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in [0,1[$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
\int_0^a x^n \ln(1-x)\,dx &= \left[\frac{x^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-x)\right]_0^a - \frac{1}{n+1}\int_0^a (x^{n+1}-1) \times \frac{-1}{1-x}\,dx \\
&= \frac{(a^{n+1}-1)\ln(1-a)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^a \frac{x^{n+1}-1}{x-1}\,dx \\
&= \frac{(a-1)\ln(1-a)}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a^k - \frac{1}{n+1}\int_0^a \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)\,dx
\end{aligned}$$

Quand a tend vers 1, on obtient

$$\begin{aligned}
v_n &= -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)\,dx = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \\
&= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} = -\frac{h_{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = -\frac{h_{n+1}}{n+1}.}$$

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{1+t}$ est continue sur $[0,1[$, équivalente en 1 à $\ln(1-t)$ et donc négligeable devant $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ quand t tend vers 1. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{1+t}$ est intégrable sur $[0,1[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Au vu de l'intégrabilité de toutes les fonctions considérées

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}\,dt &= -\int_0^1 \ln(1-t)\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + (-1)^n\frac{t^n}{1+t}\right)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}v_k - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n\ln(1-t)}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{h_{k+1}}{k+1} - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n\ln(1-t)}{1+t}\,dt \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{h_k}{k} - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n\ln(1-t)}{1+t}\,dt
\end{aligned}$$

Mais $\left|(-1)^n\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n\ln(1-t)}{1+t}\,dt\right| = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n\ln(1-t)}{1+t}\,dt \leqslant -\displaystyle\int_0^1 t^n\ln(1-t)\,dt = -v_n = \dfrac{h_{n+1}}{n+1}$ et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n\ln(1-t)}{1+t}\,dt = 0$ puis que $-\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{h_k}{k}$.
Ensuite, en posant $x = 1-t$ puis $y = \dfrac{x}{2}$

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}\,dt &= \int_1^0 \frac{\ln(x)}{2-x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-\frac{x}{2}}\,dx = -\int_0^{1/2} \frac{\ln(2y)}{1-y}\,dy \\
&= -\ln(2)\int_0^{1/2} \frac{1}{1-y}\,dy - \int_0^{1/2} \frac{\ln(y)}{1-y}\,dy = -(\ln(2))^2 + (\ln(2))^2 + B \text{ (d'après 2)b))} \\
&= B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{h_n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{(\ln(2))^2}{2}.}
$$

