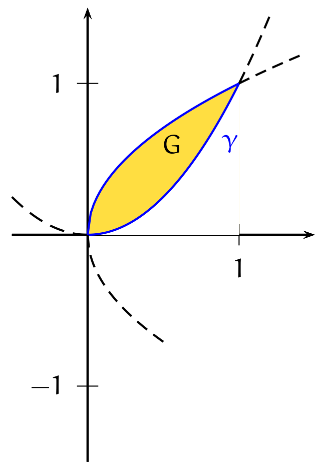
Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PSI

Applications simples du cours

Question 1.

1.1.



1.2. L'arc γ est la réunion de deux arcs. On parcourt d'abord $\gamma_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, t variant de 0 à 1 puis $\gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$, t variant de 1 à 0.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} V &= \int_0^1 \left(P(x(t), y(t)) \times x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right)\ dt \\ &= \int_0^1 \left((2t^3 - t^2) + (t + t^4)(2t)\right)\ dt = \int_0^1 (2t^5 + 2t^3 + t^2)\ dt \\ &= \frac{2}{6} + \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} V &= \int_1^0 \left((2t^3 - t^4)(2t) + (2t^2)\right)\ dt = \int_0^1 (2t^5 - 4t^4 - 2t^2)\ dt \\ &= \frac{2}{6} - \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{17}{15}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_\gamma V = \int_{\gamma_1} V + \int_{\gamma_2} V = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}.$$

$$\boxed{\int_\gamma V = \frac{1}{30}.}$$

1.3. D'après la formule de Green-Riemann,

$$\begin{aligned}\int_\gamma V &= \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right)\ dxdy = \iint_{0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}} (1 - 2x)\ dxdy \\ &= \int_0^1 (1 - 2x) \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\right) dx = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2)\ dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2 - 2x^{3/2} + 2x^3)\ dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{4} = \frac{1}{30},\end{aligned}$$

et on retrouve

$$\boxed{\int_\gamma V = \frac{1}{30}.}$$

Question 2. **2.1.** D'après la formule de GREEN-RIERMANN, $\displaystyle\int_\gamma V = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\, dxdy = 0$.

2.2. On peut prendre : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Question 3. **3.1.** Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $P(x,y) = 0$ et $Q(x,y) = x$. D'après la formule de GREEN-RIERMANN,

$$A_1 = \int_\gamma x dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\, dxdy = \iint_G \, dxdy.$$

De même, la formule de GREEN-RIERMANN appliquée au cas $P(x,y) = -y$ et $Q(x,y) = 0$ et au cas $P(x,y) = -\frac{1}{2}y$ et $Q(x,y) = \frac{1}{2}x$ fournit $A_2 = \displaystyle\iint_G \, dxdy = A_3$. Les trois nombres A_1, A_2 et A_3 sont égaux à l'aire du domaine du plan de frontière γ.

3.2. • Pour tout $t \in [-\pi,\pi]$, $M(-t) = (\cos^3 t, -\sin^3 t) = (x(t), -y(t)) = s_{(Ox)}(M(t))$ puis pour tout $t \in [0,\pi]$, $M(\pi - t) = s_{(Oy)}(M(t))$ et enfin pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = s_{y=x}(M(t))$. Donc, on étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ puis par réflexion d'axe (Oy) et enfin par réflexion d'axe (Ox).

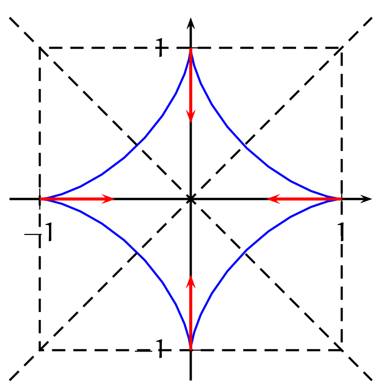
• Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont strictement croissantes sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

• **Tangentes aux point singuliers.** Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} -3\sin t \cos^2 t \\ 3\cos t \sin^2 t \end{pmatrix} = 3 \sin t \cos t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Donc, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3 \sin t \cos t = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Quand t décrit $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on obtient un point singulier et un seul à savoir le point $M(0)$.

Maintenant, quand t tend vers 0 par valeur supérieures, $x(t) - x(0) = \cos^3 t - 1 = (\cos t - 1)(\cos^2 t + \cos t + 1) \sim -\dfrac{3t^2}{2}$ et $y(t) - y(0) = \sin^3 t \sim t^3$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{x(t) - x(0)}{t^2} = -\frac{3}{2}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{y(t) - y(0)}{t^2} = 0$ ou encore que

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{1}{t^2}\overrightarrow{OM(t)} = \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \neq \overrightarrow{0}.$$

Ainsi, pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, le vecteur $\dfrac{1}{t^2}\overrightarrow{OM(t)}$ dirige la droite $(OM(t))$ et ce vecteur a une limite non nulle quand t tend vers 0 à savoir $-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{i}$. On en déduit que la tangente en $M(0)$ est dirigée par le vecteur $-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{i}$ ou aussi par le vecteur $\overrightarrow{i}$. Par symétrie par rapport à (Ox), le point $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.



3.3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe γ.

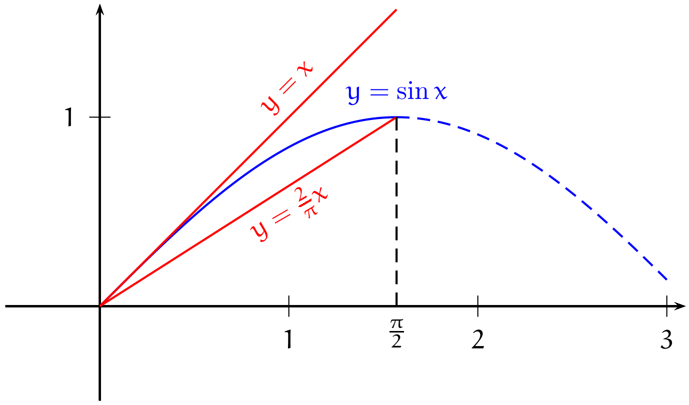
$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}((\cos^3 t)(3\sin^2 t\cos t) - (\sin^3 t)(-3\cos^2 t\sin t))\ dt = \frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\sin^2 t\ dt = \frac{3}{8}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(2t)\ dt$$
$$= \frac{3}{16}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos(4t))\ dt = \frac{3}{16}\int_{-\pi}^{\pi}dt = \frac{3\pi}{8}.$$

L'aire du domaine délimité par la courbe γ est égale à $\frac{3\pi}{8}$.

Problème

Préliminaires

1.



2. 2.1 $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$. Donc on peut prolonger φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$.

2.2 Soit $x > 1$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto -\cos t$ sont de classe C^1 sur $[1, x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt.$$

2.3 La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et est dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et en particulier la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.

D'autre part, puisque $\forall x > 1$, $\left|\dfrac{\cos x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$. Finalement, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.

2.4 φ est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0. Donc φ est intégrable sur $]0, 1]$. En particulier, la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_y^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ a une limite réelle quand y tend vers 0. Comme d'autre part, la la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$, on a montré que

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \text{ est convergente.}}$$

Partie 1 : une première façon de calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

Question 1. Soit U un domaine de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas l'origine. Les fonctions P et Q sont de classe C^1 sur U en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur U dont le dénominateur ne s'annule pas sur U.

Question 2. Puisque γ n'entoure pas l'origine, on peut choisir un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant γ et ne contenant pas l'origine. Pour $(x, y) \in U$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= e^{-y}\left[-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}(x\cos x + y\sin x) + \frac{1}{x^2+y^2}(\cos x - x\sin x + y\cos x)\right] \\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}\left((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x + (-2xy - x^3 - xy^2)\sin x\right)\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = e^{-y}\left[-\frac{1}{x^2+y^2}(x\sin x - y\cos x) - \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}(x\sin x - y\cos x) + \frac{1}{x^2+y^2}(-\cos x)\right]$$
$$= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}\left((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x + (-2xy - x^3 - xy^2)\sin x\right).$$

Donc sur U, on a $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Mais alors la formule de GREEN-RIEMANN fournit

$$\int_\gamma V = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy = 0.$$

Question 3. 3.1. Soit $\rho > 0$.

$$A_\rho = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\rho\sin\theta}}{\rho^2}\left((\rho\cos\theta\sin(\rho\cos\theta) - \rho\sin\theta\cos(\rho\cos\theta))(-\rho\sin\theta) + (\rho\cos\theta\cos(\rho\cos\theta) + \rho\sin\theta\sin(\rho\cos\theta))(\rho\cos\theta)\right)\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} e^{-\rho\sin\theta}(\sin(\rho\cos\theta)(-\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta) + \cos(\rho\cos\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta))\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} e^{-\rho\sin\theta}\cos(\rho\cos\theta)\, d\theta.$$

$$\boxed{\forall\rho > 0,\ A_\rho = \int_0^{\pi/2} e^{-\rho\sin\theta}\cos(\rho\cos\theta)\, d\theta.}$$

3.2. • Pour tout réel $\rho \in [0, +\infty[$, la fonction $\theta \mapsto e^{-\rho\sin\theta}\cos(\rho\cos\theta)$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

• Pour tout réel $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction $\rho \mapsto e^{-\rho\sin\theta}\cos(\rho\cos\theta)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $(\theta, \rho) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \times [0, +\infty[$, $\left|e^{-\rho\sin\theta}\cos(\rho\cos\theta)\right| \leqslant 1 = \varphi_0(\theta)$ où φ_0 est continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc intégrable sur ce segment.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $\rho \mapsto A_\rho$ est continue sur $[0, +\infty[$. En particulier,

$$\lim_{\rho\to 0^+} A_\rho = A_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{\rho\to 0^+} A_\rho = \frac{\pi}{2}.}$$

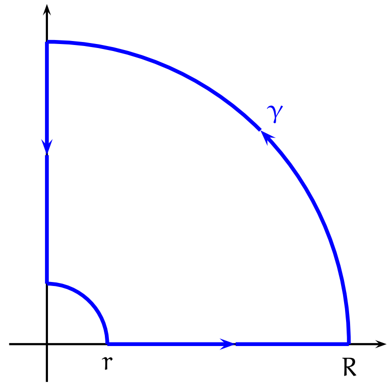
3.3. Soit $\rho > 0$. D'après la question 1. des préliminaires, $\forall\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin\theta \geqslant \dfrac{2\theta}{\pi}$ et donc

$$|A_\rho| \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-\rho\sin\theta}\, d\theta \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-2\rho\theta/\pi}\, d\theta = \frac{\pi}{2\rho}\left(1 - e^{-\rho}\right) \leqslant \frac{\pi}{2\rho},$$

et comme $\lim\limits_{\rho\to+\infty} \dfrac{\pi}{2\rho} = 0$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{\rho\to+\infty} A_\rho = 0.}$$

Question 4. 4.1.



4.2. Une paramétrisation du segment $[A_1, A_2]$ est $t \mapsto (t, 0)$, t variant de r à R. Donc

$$\int_{\gamma_1} V = \int_r^R \frac{e^0}{t^2}((t\sin t - 0)\times 1 + (t\cos t + 0)\times 0)\ dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t}\ dt.$$

$$\boxed{\int_{\gamma_1} V = \int_r^R \frac{\sin x}{x}\ dx.}$$

4.3. Une paramétrisation du segment $[A_3, A_4]$ est $t \mapsto (0, t)$, t variant de R à r. Donc

$$\int_{\gamma_3} V = \int_R^r \frac{e^{-t}}{t^2}((0-t)\times 0 + 0\times 1)\ dt = 0.$$

$$\boxed{\int_{\gamma_3} V = 0.}$$

4.4. Soient r et R tels que $0 < r < R$. D'après la question 2, $\int_{\gamma_1} V + \int_{\gamma_2} V + \int_{\gamma_3} V + \int_{\gamma_4} V = \int_{\gamma} V = 0$. Mais alors, d'après la question 4.2,

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x}\ dx = -A_R + A_r.$$

Quand r tend vers 0 et R tend vers $+\infty$, les questions 3.2 et 3.3 fournissent

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}.}$$

Partie 2 : une deuxième façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt$

Question 1. 1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f\ :\ t \mapsto \frac{\cos t \sin(2nt)}{\sin t}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 2n$. Donc la fonction f est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

De même, la fonction $g\ :\ t \mapsto \frac{\sin(2nt)}{t}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 2n$. Donc la fonction g est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul n, u_n et v_n existent.

1.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t(\sin((2n+2)t) - \sin(2nt))}{\sin t}\ dt = \int_0^{\pi/2} 2\cos t\cos((2n+1)t)\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (\cos((2n+2)t) + \cos(2nt))\ dt = \left[\frac{\sin((2n+2)t)}{2n+2} + \frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\pi/2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante. On en déduit que pour tout entier naturel non nul n

$$u_n = u_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \sin(2t)}{\sin t}\ dt = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2 t\ dt = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t))\ dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\pi}{2}.}$$

Question 2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $t \mapsto h(t)$ et $t \mapsto \frac{e^{imt}}{im}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\alpha, \beta]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$H_m = \left[h(t)\frac{e^{imt}}{im}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta h'(t)\frac{e^{imt}}{im}\,dt = \frac{1}{im}\left(e^{im\beta}h(\beta) - e^{im\alpha}h(\alpha) - \int_\alpha^\beta h'(t)e^{imt}\,dt\right),$$

et donc

$$|H_m| \leqslant \frac{1}{m}\left(|h(\alpha)| + |h(\beta)| + \int_\alpha^\beta |h'(t)|\,dt\right).$$

Puisque $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{1}{m}\left(|h(\alpha)| + |h(\beta)| + \displaystyle\int_\alpha^\beta |h'(t)|\,dt\right) = 0$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty} H_m = 0.}$$

Question 3. • $h(t) \underset{t\to0}{=} \dfrac{1}{t} - \dfrac{1+o(t)}{t+o(t^2)} \underset{t\to0}{=} \dfrac{1}{t}\left(1 - \dfrac{1+o(t)}{1+o(t)}\right) \underset{t\to0}{=} \dfrac{1}{t}(1-1+o(t)) \underset{t\to0}{=} o(1)$. Donc la fonction h se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$ (on note encore h le prolongement).

• h est de classe C^1 sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $h'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{\sin^2 t}$.

• $h'(t) \underset{t\to0}{=} -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{\left(t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)\right)^2} \underset{t\to0}{=} \dfrac{1}{t^2}\left(-1 + \left(1 - \dfrac{t^2}{6} + o(t^2)\right)^{-2}\right) \underset{t\to0}{=} \dfrac{1}{t^2}\left(-1 + 1 + \dfrac{t^2}{3} + o(t^2)\right) = \dfrac{1}{3} + o(1)$.

En résumé, la fonction h est de classe C^1 sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, se prolonge en une fonction continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et la dérivée du prolongement a une limite réelle en 0 à droite. D'après un théorème classique d'analyse, ce prolongement est de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Question 4. **4.1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec les notations des questions 2 et 3,

$$v_n - u_n = \int_0^{\pi/2} h(t)\sin(2nt)\,dt = \operatorname{Im}(H_{2n}).$$

Puisque la fonction h se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, le lemme de Lebesgue permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0.}$$

4.2. D'après les questions II.1.2 et II.4.1, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u = 2nt$. On obtient $v_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u}\,du$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. On retrouve donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.}$$

Partie 3 : une troisième façon de calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

Question 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\int (\sin x)e^{-\alpha x}\,dx &= \operatorname{Im}\left(\int e^{(-\alpha+i)x}\,dx\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{(-\alpha+i)x}}{-\alpha+i}\right) + C = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+1}\operatorname{Im}((\cos x + i\sin x)(-\alpha - i)) + C \\ &= -\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x + \cos x)}{\alpha^2+1} + C.\end{aligned}$$

Question 2. La fonction $(x,y) \mapsto (\sin x)e^{-xy}$ est continue sur Δ. Le théorème de Fubini permet d'écrire

$$J=\int_0^u\left(\int_0^u(\sin x)e^{-xy}\ dy\right)dx=\int_0^u \sin x\frac{1-e^{-xu}}{x}\ dx$$

où l'expression $\dfrac{1-e^{-xu}}{x}$ désigne la fonction continue sur $[0,u]$ $\varphi\ :\ x\mapsto\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1-e^{-xu}}{x}\text{ si }x\in]0,u]\\ u\text{ si }x=0\end{array}\right.$.

D'après la question précédente, on a aussi

$$J=\int_0^u\left(\int_0^u(\sin x)e^{-xy}\ dx\right)dy=\int_0^u\left[-\frac{e^{-yx}(\cos x+y\sin x)}{1+y^2}\right]_{x=0}^{x=u}dy=\int_0^u\frac{1-e^{-yu}(\cos u+y\sin u)}{1+y^2}\ dy.$$

$$\boxed{\forall u>0,\ \int_0^u\frac{\sin x}{x}(1-e^{-xu})\ dx=\int_0^u\frac{1-e^{-yu}(\cos u+y\sin u)}{1+y^2}\ dy.}$$

Question 3. **3.1.** Soit $u>0$. On sait que $\forall x\geqslant 0$, $|\sin x|\leqslant x$ et donc $\forall x>0$, $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1$. On en déduit que

$$|K_1|\leqslant\int_0^u e^{-xu}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\leqslant\int_0^u e^{-xu}\ dx=\frac{1-e^{-u^2}}{u}\leqslant\frac{1}{u}.$$

Comme $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{u\to+\infty}K_1=0.}$$

3.2. Soit $u>0$. Pour tout réel y, on a $(|y|-1)^2\geqslant 0$ et donc $\dfrac{|y|}{1+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$. On en déduit que

$$|K_2|\leqslant\int_0^u\left(\frac{|y||\sin u|}{1+y^2}+\frac{|\cos u|}{1+y^2}\right)e^{-yu}\ dy\leqslant\int_0^u\frac{3}{2}e^{-yu}\ dy\leqslant\frac{3}{2u}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{u\to+\infty}K_2=0.}$$

3.3. D'après la question 3.1, $\lim\limits_{u\to+\infty}\displaystyle\int_0^u\frac{\sin x}{x}(1-e^{-xu})\ dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\ dx$ et d'après la question 3.2, $\lim\limits_{u\to+\infty}\displaystyle\int_0^u\frac{1-e^{-yu}(\cos u+y\sin u)}{1+y^2}\ dy=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\ dy=[\mathrm{Arctan}\,y]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$. En faisant tendre u vers $+\infty$ dans l'égalité de la question 2, on retrouve encore une fois

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\ dx=\frac{\pi}{2}.}$$

Question 4. **4.1.** La fonction $x\mapsto\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et dominée par $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$. On en déduit que la fonction $x\mapsto\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En particulier

$$\boxed{\text{l'intégrale }\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\ dx\text{ est convergente.}}$$

4.2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\ dx=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(2x)}{2x^2}\ dx.$

Soit $(a,A)\in\mathbb{R}^2$ tel que $0<a<A$. Les deux fonctions $x\mapsto\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ et $x\mapsto-\dfrac{1}{x}$ sont de classe C^1 sur $[a,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_a^A\frac{1-\cos(2x)}{2x^2}\ dx=\left[-\frac{1-\cos(2x)}{2x}\right]_a^A+\int_a^A\frac{\sin(2x)}{x}\ dx=\frac{1-\cos(2a)}{2a}-\frac{1-\cos(2A)}{2A}+\int_a^A\frac{\sin(2x)}{x}\ dx.$$

Maintenant, $\frac{1-\cos(2a)}{2a} \underset{a\to 0}{\sim} \frac{(2a)^2/2}{2a} = 2a$ et donc $\lim_{a\to 0} \frac{1-\cos(2a)}{2a} = 0$. D'autre part, $\left|\frac{1-\cos(2A)}{2A}\right| \leqslant \frac{1}{A}$ et donc $\lim_{A\to+\infty} \frac{1-\cos(2A)}{2A} = 0$.

Quand a tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x}\,dx$. Enfin, en posant $u = 2x$ et donc $dx = \frac{du}{2}$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u/2}\,\frac{du}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$. Finalement,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.}$$

