Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PSI

Exercice I

1) rg$(A) = 3 < 4$ et donc $A \notin GL_4(\mathbb{R})$. Par suite, 0 est valeur propre de A.

2) Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1, on a $AU = U$. Puique $U \neq 0$, 1 est valeur propre de A et U est vecteur propre associé.

3) P_A est de degré 4, de coefficient dominant $(-1)^4 = 1$ et admet -1 pour racine double et 0 et 1 pour racines. Donc

$$\boxed{P_A = X(X-1)(X+1)^2.}$$

4) Soit $k \geqslant 4$. La division euclidienne de X^k par P_A s'écrit $X^k = Q_k \times X(X-1)(X+1)^2 + a_k X^3 + b_k X^2 + c_k X + d_k$ où Q_k est un polynôme et a_k, b_k, c_k et d_k sont des réels.
On évalue les deux membres de cette égalité en 0, 1 et -1 puis on dérive les deux membres de cette égalité et on évalue de nouveau en -1. On obtient

$$\left\{\begin{array}{l} d_k = 0 \\ a_k + b_k + c_k = 1 \\ -a_k + b_k - c_k = (-1)^k \\ 3a_k - 2b_k + c_k = k(-1)^{k-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d_k = 0 \\ b_k = \dfrac{1}{2}(1 + (-1)^k) \\ a_k + c_k = \dfrac{1}{2}(1 - (-1)^k) \\ 3a_k - (1 + (-1)^k) + c_k = -k(-1)^k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d_k = 0 \\ b_k = \dfrac{1}{2}(1 + (-1)^k) \\ a_k + c_k = \dfrac{1}{2}(1 - (-1)^k) \\ 3a_k + c_k = 1 - (k-1)(-1)^k \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d_k = 0 \\ b_k = \dfrac{1}{2}(1 + (-1)^k) \\ a_k = \dfrac{1}{4}(1 - (2k-3)(-1)^k) \\ c_k = \dfrac{1}{4}(1 + (2k-5)(-1)^k) \end{array}\right. .$$

Le reste de la division euclidienne de X^k par P_A est $\dfrac{1}{4}((1-(2k-3)(-1)^k)X^3 + 2(1+(-1)^k)X^2 + (1+(2k-5)(-1)^k X)$.

5) D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_A(A) = 0$ et donc pour $k \geqslant 4$

$$\begin{aligned} A^k &= Q_k(A) \times P_A(A) + \frac{1}{4}((1-(2k-3)(-1)^k)A^3 + 2(1+(-1)^k)A^2 + (1+(2k-5)(-1)^k A) \\ &= \frac{1}{4}((1-(2k-3)(-1)^k)A^3 + 2(1+(-1)^k)A^2 + (1+(2k-5)(-1)^k A). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 4,\ A^k = \frac{1}{4}((1-(2k-3)(-1)^k)A^3 + 2(1+(-1)^k)A^2 + (1+(2k-5)(-1)^k A).}$$

Exercice II

1) a) Pour tout entier naturel n, on a $\alpha \leqslant x_n \leqslant \beta$ et quand n tend vers $+\infty$ on obtient $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Puisque f est continue sur $[\alpha, \beta]$ et donc en x, on en déduit que

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \text{Min}\{x_n, x_{n+1}\}$ et $b_n = \text{Max}\{x_n, x_{n+1}\}$. Puisque $x_n \neq x_{n+1}$, on a $a_n < b_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. f est continue sur $[a_n, b_n]$, dérivable sur $]a_n, b_n[$ et $f(a_n) = f(b_n) = 0$. D'après le théorème de ROLLE, il existe $y_n \in]a_n, b_n[$ tel que $f'(y_n) = 0$. y_n est un zéro de f' strictement compris entre x_n et x_{n+1}.

c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x$. Puisque f' est continue sur $[\alpha, \beta]$ et donc en x, on en déduit comme en a) que $f'(x) = 0$.

d) x est le réel de $[\alpha, \beta]$ défini en a). Les fonctions a et b sont continues sur $[\alpha, \beta]$ et d'après le théorème de CAUCHY, il existe une et une seule solution g sur $[\alpha, \beta]$ vérifiant de plus $g(x) = g'(x) = 0$ à savoir la fonction nulle. Donc f est la fonction nulle.

2) Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste néanmoins bornée. D'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, on peut en extraire une sous-suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite (x'_n) est une suite convergente de zéros deux à deux distincts de f ce qui nous ramène à la situation du a). f est encore une fois la fonction nulle.

3) On prend $a : t \mapsto 0$ et $b : t \mapsto 1$. L'équation (E) s'écrit $y''(t) + y(t) = 0$. Cette équation admet pour solution sur $\mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \sin(t)$ qui a une infinité de zéros deux à deux distincts mais n'est pas la fonction nulle.

Exercice III

Partie A : Règle de Raabe-Duhamel.

1) Supposons $\lambda < 0$. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\lambda}{n}$. En particulier, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0$ pour n grand. La suite (u_n) est donc strictement croissante à partir d'un certain rang et en particulier, il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $u_n \geqslant u_{n_1} > 0$. La suite (u_n) ne peut donc pas tendre vers 0 et la série de terme général u_n est grossièrement divergente.

2) Soit $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^{-\beta}}{n^{-\beta}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

et donc

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\beta - \lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

3) a) Puisque $\lambda < \beta$, on a $\beta - \lambda < 0$. Mais alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\beta-\lambda}{n} < 0$ et pour n grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. On a montré qu'il existe $N \geqslant n_0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

b) Soit $n \geqslant N + 1$.

$$u_n = u_N \prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant u_N \prod_{k=N}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{u_N}{v_N} v_n.$$

Le réel $K = \dfrac{u_N}{v_N}$ est un réel strictement positif tel que $\forall n \geqslant N$, $u_n \leqslant K v_n$.

c) $\exists K > 0$, $\exists \beta > 1$, $\exists N \geqslant n_0/$, $\forall n \geqslant N$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{K}{n^\beta}$. Puisque $\beta > 1$, la série de terme général $\dfrac{K}{n^\beta}$ converge et il en est de même de la série de terme général u_n.

4) Si $0 \leqslant \lambda < 1$, en choisissant un réel β tel que $\lambda < \beta < 1$, on montre comme en 3)a) l'existence d'un entier N tel que $\forall n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ puis comme en 3)b) l'existence d'un réel strictement positif K tel que $\forall n \geqslant N$, $u_n \geqslant K v_n = \dfrac{K}{n^\beta}$. Comme $\beta < 1$, la série de terme général v_n diverge et il en est de même de la série de terme général u_n.

5) $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ puis

$$\frac{\ln^2 n}{\ln^2(n+1)} = \left(\frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{-2} = \left(1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{-2} \underset{n\to+\infty}{=} \left(1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)^{-2}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{2}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\frac{\ln^2 n}{\ln^2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Les deux suites (x_n) et (y_n) appartiennent au cas $\lambda = 1$. La série de terme général x_n diverge. Vérifions que la série de terme général y_n converge.

La fonction $x \mapsto x\ln^2 x$ est croissante et strictement positive sur $]1, +\infty[$ en tant que produit de fonctions strictement positives et croissantes sur $]1, +\infty[$ et donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ est décroisante sur $]1, +\infty[$. Par suite, pour $n \geqslant 3$

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^2 k} \leqslant \sum_{k=3}^{n}\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \int_2^n \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln 2}.$$

Ainsi, la suite $\left(\dfrac{1}{n\ln^2 n}\right)$ est positive et la suite des sommes partielles de la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ est majorée. On en déduit que la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ converge.

Finalement, quand $\lambda = 1$, il est possible que la série de terme général u_n converge ou diverge.

Partie B.

1) Pour $n \geq 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$, $0 < \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) > 0$. Par suite, pour $n \geqslant 2$, $w_n > 0$. Puis

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ici, $\lambda = \dfrac{1}{6} < 1$ et donc la série de terme général w_n diverge d'après la règle de Raabe-Duhamel.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t^4+1)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et est négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$ car $\dfrac{1}{(t^4+1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{4n}}$ avec $4n \geqslant 4 > 2$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t^4+1)^n}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc I_n existe.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A > 0$.

$$\int_0^A \frac{1}{(t^4+1)^n}\,dt = \left[t \times \frac{1}{(t^4+1)^n}\right]_0^A - \int_0^A t \times \frac{-4nt^3}{(t^4+1)^{n+1}}\,dt$$

$$= \frac{A}{(A^4+1)^n} - 4n\int_0^A \frac{t^4+1-1}{(t^4+1)^{n+1}}\,dt = \frac{A}{(A^4+1)^n} - 4n\left(\int_0^A \frac{1}{(t^4+1)^n}\,dt - \int_0^A \frac{1}{(t^4+1)^{n+1}}\,dt\right)$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = 4n(I_n - I_{n+1}).}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est l'intégrale d'une fonction continue positive et non nulle sur $[0, +\infty[$ et donc $I_n > 0$. De plus,

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \frac{1}{4n} \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ici, $\lambda = \frac{1}{4} < 1$ et donc la série de terme général I_n diverge d'après la règle de Raabe-Duhamel.

3) a) On sait que le rayon de convergence de la série entière proposée est 1 et que $\forall x \in]-1, 1[$, $S(x) = (1+x)^\alpha$.

b) Puisque $\alpha \notin \mathbb{Z}$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\alpha - n|}{n+1}$ et en particulier

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{n - \alpha}{n+1} \underset{n \to +\infty}{=} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \underset{n \to +\infty}{=} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Puisque $\alpha \neq 0$, $\alpha + 1 \neq 1$ et donc, d'après la règle de Raabe-Duhamel, la série de terme général $|a_n|$ converge si et seulement si $\alpha + 1 > 1$ ou encore $\alpha > 0$.

c) Pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = a_n x^n$.
• Puisque la série de terme général $|a_n|$ converge, les séries de termes généraux respectifs $a_n \times 1^n$ et $a_n \times (-1)^n$ converge. La série de fonctions de terme général $a_n f_n$ converge donc simplement vers S sur $[-1, 1]$.
• Chaque fonction f_n est continue sur $[-1, 1]$.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$, $|f_n(x)| = |a_n| \times |x|^n \leqslant |a_n|$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n(x)|,\ x \in [-1, 1]\} \leqslant |a_n|$.
Ainsi, la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge ou encore la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[-1, 1]$ vers S. On en déduit que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers S.

Finalement, la fonction S est continue sur $[-1, 1]$ en tant que limite uniforme sur $[-1, 1]$ d'une suite de fonctions continues sur $[-1, 1]$. En particulier,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} S(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1+x)^\alpha = 2^\alpha,$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = S(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} S(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (1+x)^\alpha = 0.$$

d) Si $\alpha < -1$, $\alpha + 1 < 0$ et d'après A.1)a), la suite $(|a_n|)$ ne tend pas vers 0. Dans ce cas, la série de terme général a_n diverge grossièrement.

e) i) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(|a_n|) = \ln(|a_0|) + \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(|a_{k+1}|) - \ln(|a_k|)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\right)$. Mais

$$\ln\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{=} -\frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme $\alpha + 1 > 0$, $\ln\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ est strictement négatif pour n grand. De plus, $\ln\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{\alpha+1}{n}$ et la série de terme général $\ln\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ diverge vers $-\infty$ ou encore, au vu de la remarque initiale

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \ln(|a_n|) = -\infty.}$$

ii) On en déduit encore que $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = \lim_{n \to +\infty} e^{\ln(|a_n|)} = 0$. D'autre part, puisque $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{\alpha+1}{n} < 0$ et donc $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour n grand. La suite $(|a_n|)$ est donc décroissante à partir d'un certain rang.

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} = (-1)^n \frac{(-\alpha)(1-\alpha)\dots((n-1)-\alpha)}{n!}$$

avec $(-\alpha)(1-\alpha)\dots((n-1)-\alpha) > 0$ car $\alpha < 0$.

En résumé, la suite (a_n) est alternée en signe, décroissante à partir d'un certain rang et de limite nulle. On en déduit que la série de terme général a_n converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

iii) Montrons que la série de fonctions de terme général f_n (notations de la question c)) converge uniformément vers S sur $[0,1]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)$ ($R_n(1)$ existe d'après b)).
Pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $|a_n x^n| = |a_n||x^n| \leqslant |a_n|$ ce qui montre que $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n x^n = 0$.
D'autre part, la suite $(|a_n x^n|) = (|a_n||x|^n)$ est décroissante à partir d'un certain rang en tant que produit de deux suites positives décroissantes à partir d'un certain rang. Enfin, Pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $a_n x^n = (-1)^n |a_n x^n|$.
Ainsi, pour chaque $x \in [0,1]$, la série de terme général $a_n x^n$ est une série alternée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout $x \in [0,1]$, la valeur absolue de $R_n(x)$ est majorée par la valeur absolue de son premier terme. Donc, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|R_n(x)| \leqslant |a_{n+1}||x|^{n+1} \leqslant |a_{n+1}|,$$

et on en déduit que $\|R_n\|_\infty = \sup\{|R_n(x)|,\ x \in [0,1]\} \leqslant |a_{n+1}|$. Puisque $|a_{n+1}|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\|R_n\|_\infty$. On a montré que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers S sur $[0,1]$.

Mais alors, comme en c), la fonction S est continue sur $[0,1]$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} S(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1+x)^\alpha = 2^\alpha.$$

Exercice IV

1) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$.

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant p} \lambda_i\lambda_j \langle x_i|x_j\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant p} \lambda_i\lambda_j \langle y_i|y_j\rangle = \left\|\sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i\right\|^2.$$

Supposons $(x_1, \dots, x_p)$ libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$.

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i = 0 \Rightarrow \left\|\sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i\right\| = 0 \Rightarrow \left\|\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right\| = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i = 0,$$

et la famille $(y_1, \dots, y_p)$ est libre. En échangeant les rôles, on obtient

$$\boxed{(x_1, \dots, x_p) \text{ libre} \Leftrightarrow (y_1, \dots, y_p) \text{ libre.}}$$

2) Puisque $(x_1, \dots, x_n)$ est libre de cardinal $p = n = \dim E$, $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(x_i) = y_i$. Montrons que f est un automorphisme orthogonal.

Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, un vecteur quelconque.

$$\|f(x)\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i\right\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \lambda_i\lambda_j \langle y_i|y_j\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \lambda_i\lambda_j \langle x_i|x_j\rangle = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\|^2 = \|x\|^2.$$

Ainsi, f conserve la norme et donc $f \in O(E)$. On a montré qu'il existe un automorphisme orthogonal f tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(x_i) = y_i$.

3) **a)** Le cardinal d'une famille libre de E est inférieur ou égal à la dimension de E et donc $p \leqslant n$. On a même $p < n$ car $p \neq n$.
$\dim(F) = \text{card}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} = p$ et $\dim(F^\perp) = n - p$. De même, $\dim(G) = p$ et $\dim(G^\perp) = n - p$.

b) $F^\perp$ est de dimension $n = p > 0$ et il existe une base orthonormale $(x_k)_{p+1\leqslant k\leqslant n}$ de $F^\perp$. De même, il existe une base orthonormale $(y_k)_{p+1\leqslant k\leqslant n}$ de $G^\perp$. On peut donc choisir $q = n - p$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

- Si $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a $\langle x_i|x_j\rangle = \langle y_i|y_j\rangle$.
- Si $p+1 \leqslant i \leqslant n$ et $p+1 \leqslant j \leqslant n$, on a $\langle x_i|x_j\rangle = \delta_{i,j} = \langle y_i|y_j\rangle$.
- Si $1 \leqslant i \leqslant p$ et $p+1 \leqslant j \leqslant n$ ou $p+1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a $\langle x_i|x_j\rangle = 0 = \langle y_i|y_j\rangle$.

Finalement, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle x_i, x_i \rangle = \langle y_i | y_j \rangle$.

c) La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est une base de F et la famille $(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ est une base de $F^\perp$. Donc la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E. D'après la question 2), il existe un automorphisme orthogonal f tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(x_i) = y_i$. En particulier, f est un automorphisme orthogonal tel que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f(x_i) = y_i$.

4) Si tous les x_i sont nuls, le résultat de la question 1) appliquée aux différents p-uplets $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ montre que tous les y_i sont nuls. Dans ce cas, n'importe quel automorphisme orthogonal f vérifie $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f(x_i) = y_i$.

Sinon, on pose $r = \mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p)$, $1 \leqslant r \leqslant p-1$. Quite à renuméroter les vecteurs x_i, on peut supposer que la famille $(x_1, \ldots, x_r)$ est libre et que $\forall i \in [\![r+1,p]\!]$, $x_i \in F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_r)$. La question 1) montre d'une part que la famille $(y_1, \ldots, y_r)$ est libre et d'autre part que la famille $(y_1, \ldots, y_p)$ est de rang r, car si $\mathrm{rg}(y_1, \ldots, y_p) > r$ on peut extraire de la famille $(y_1, \ldots, y_p)$ une sous-famille libre de cardinal strictement plus grand que r et donc en correspondance on peut extraire une sous-famille libre de $(x_1, \ldots, x_p)$ de cardinal strictement plus grand que r ce qui n'est pas. En résumé, la famille $(y_1, \ldots, y_r)$ est libre et que $\forall i \in [\![r+1,p]\!]$, $y_i \in G = \mathrm{Vect}(y_1, \ldots, y_r)$.

La question 3) montre qu'il existe un automorphisme orthogonal f tel que $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $f(x_i) = y_i$.

Soit $i \in [\![r+1,p]\!]$. Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $x_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$. Puisque $x_i \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_r) = F$, $f(x_i) \in f(F) \subset G$ et de même, $f(x_i) - y_i \in G$. Vérifions que $f(x_i) - y_i \in G^\perp$. Soit $j \in [\![1,p]\!]$.

$$\begin{aligned}\langle f(x_i) | y_j \rangle &= \langle f(x_i) | y_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_k \langle f(x_k) | y_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_k \langle y_k | y_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_k \langle x_k | x_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{r} \lambda_k x_k | x_j \rangle = \langle x_i | x_j \rangle \\ &= \langle y_i | y_j \rangle,\end{aligned}$$

et donc $\langle f(x_i) - y_i | y_j \rangle = 0$. Ainsi, $\forall j \in [\![1,r]\!]$, $\langle f(x_i) - y_i | y_j \rangle = 0$. Puisque $(y_1, \ldots, y_r)$, est une base de G, on a montré que $f(x_i) - y_i \in G^\perp$.
En résumé, $\forall i \in [\![r+1,p[\![$, $f(x_i) - y_i \in G \cap G^\perp = \{0\}$ et donc $\forall i \in [\![r+1,p[\![$, $f(x_i) = y_i$. Finalement, l'automorphisme orthogonal fourni plus haut vérifie $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f(x_i) = y_i$.

