Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

Questions de cours

1. Soient E un espace vectoriel et N et N' deux normes sur E. N et N' sont équivalentes si et seulement si il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha N' \leqslant N \leqslant \beta N'$.

2. Soit $X = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. Il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{k_0}| = N_\infty(X)$. Par suite,

$$N_p(X) = \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant (|x_{k_0}|^p)^{\frac{1}{p}} = |x_{k_0}| = N_\infty(X).$$

D'autre part,

$$N_p(X) = \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{p} (N_\infty(X))^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(n\,(N_\infty(X))^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} N_\infty(X).$$

$$\boxed{\forall p \geqslant 1,\ \forall X \in \mathbb{R}^n,\ N_\infty(X) \leqslant N_p(X) \leqslant n^{\frac{1}{p}} N_\infty(X).}$$

On a explicitement vérifié que N_p et N_∞ sont deux normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

3. Puisque $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on sait que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes.

4. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $X = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$,

$$N_\infty(u(X)) = N_\infty\left(\sum_{k=1}^{n} x_k u(e_k)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| N_\infty(u(e_k)) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} N_\infty(u(e_k))\right) N_\infty(X).$$

Par suite, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $N_\infty(u(X)) \leqslant K N_\infty(X)$. Par exemple, le réel $K = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} N_\infty(u(e_k))$ convient.

5. Soit (E, N) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et u un endomorphisme de E. u est continu sur l'espace normé (E, N) si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E$, $N(u(x)) \leqslant K N(x)$.

6. Puisque $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie, on sait que pour toute norme N sur $\mathbb{R}^n$, tout endomorphisme u de E est continu sur l'espace normé (E, N). Démontrons le.

Soit $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une base donnée de E et N une norme sur E. Pour $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$, on pose $N_\infty(x) = \displaystyle\max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$. Puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$, les normes N et N_∞ sont équivalentes. par suite, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha N_\infty \leqslant N \leqslant \beta N_\infty$. Pour $x \in E$, on a alors

$$N(u(x)) \leqslant \beta N_\infty(u(x)) \leqslant \beta K N_\infty(x) \leqslant \frac{K\beta}{\alpha} N(x).$$

Par suite, il existe $K' \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E$, $N(u(x)) \leqslant K' N(x)$ et donc u est continu sur l'espace normé (E, N).

Partie 1

1. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. $\|C_1\| = \dfrac{1}{3}\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 1 = \|C_2\|$ et $\langle C_1, C_2\rangle = \dfrac{1}{9}(4 - 2 - 2) = 0$. Enfin, $C_1 \wedge C_2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = C_3$. En résumé, $\|C_1\| = \|C_2\| = 1$, $\langle C_1, C_2\rangle = 0$ et $C_1 \wedge C_2 = C_3$ et on sait que

$$\boxed{A \in O_3^+(\mathbb{R}).}$$

2. Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, on sait alors que $u \in O^+(E)$ et donc u est une rotation vectorielle.

3. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{3}-\lambda\right)\left(\lambda^2-\lambda+\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\lambda+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\lambda+\frac{1}{3}\right)$$
$$= -\lambda^3+\frac{5}{3}\lambda^2-\frac{5}{3}\lambda+1 = -(\lambda-1)\left(\lambda^2-\frac{2}{3}\lambda+1\right) = -(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1+2i\sqrt{2}}{3}\right)\left(\lambda-\frac{1-2i\sqrt{2}}{3}\right).$$

Par suite, A admet trois valeurs propres simples dans $\mathbb{C}$ et donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).}$$

4. **4.1.** Puisque $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie sur E, l'endomorphisme u est continu sur E. De plus, $u \in O(E)$ et donc pour tout X de E tel que $\|X\| = 1$, on a $\|u(X)\| = \|X\| = 1$. On en déduit que $\sup\limits_{\|X\|=1} \|u(X)\| = 1$ ou encore

$$\boxed{|||u||| = 1.}$$

4.2. Soit $S = \{X \in E/\ \|X\| = 1\}$.
- S est borné.
- On sait que l'application $X \mapsto \|X\|$ est continue sur l'espace normé $(E, \|\ \|)$ et donc S est un fermé de E en tant qu'image réciproque de $\{1\}$ qui est un fermé de $\mathbb{R}$ par l'application continue $X \mapsto \|X\|$.

Ainsi, S est une fermé borné de E et donc, puisque E est de dimension finie, S est un compact de E d'après le théorème de Borel-Lebesgue. Maintenant, l'application $X \mapsto \|w(X)\|$ est continue sur E (en tant que composée de l'application $X \mapsto w(X)$, continue sur E à valeurs dans E, et $Y \mapsto \|Y\|$ continue sur E) à valeurs dans $\mathbb{R}$. On sait que cette application admet un maximum sur le compact S ou encore il existe $X_0 \in E$ tel que $\|X_0\| = 1$ et $|||w||| = \|w(X_0)\|$.

5. Puisque $u \in O(E)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \in O(E)$. Mais alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|||u^k||| = 1$. Ceci montre que la suite $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de l'espace normé $(\mathcal{L}_c(E), |||\ |||)$.

6. **6.1.** Ker(v) est l'axe de la rotation u : c'est une droite vectorielle. On note alors que $A(1,0,1) = (1,0,1)$ et donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Vect}(e_1+e_3).}$$

6.2. **1ère solution.** D'après le théorème du rang, Im(v) est un plan vectoriel. Im(v) est l'espace engendré par les colonnes de la matrice $A - I_3$ à savoir $\frac{1}{3}(-1,-2,1)$, $\frac{1}{3}(2,-2,-2)$ et $\frac{1}{3}(1,2,-1)$. Les deux vecteurs $e'_1 = (1,2,-1)$ et $e'_2 = (1,-1,-1)$ sont donc deux vecteurs indépendants de Im(v) et par suite, (e'_1, e'_2) est une base de Im(v)
Maintenant, $\langle e_1+e_3, e'_1\rangle = \langle e_1+e_3, e'_2\rangle = 0$ et donc $\mathrm{Im}(v) \subset (\mathrm{Ker}(v))^\perp$ puis $\mathrm{Im}(v) = (\mathrm{Ker}(v))^\perp$ car ces deux sous-espaces ont mêmes dimensions finies.

2ème solution. Soit $x \in \mathrm{Ker}(v)$. Alors $u(x) = x$ puis $u^{-1}(x) = x$. D'autre part, puisque $u \in O(E)$, $u^* = u^{-1}$. Par suite, pour tout $y \in E$,

$$\langle x, v(y)\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, u(y)\rangle = \langle x, y\rangle - \langle u^{-1}(x), y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0.$$

On retrouve de nouveau $\mathrm{Im}(v) \subset (\mathrm{Ker}(v))^\perp$ puis

$$\boxed{\mathrm{Im}(v) = (\mathrm{Ker}(v))^\perp.}$$

6.3. En particulier,

$$\boxed{E = (\mathrm{Ker}(v)) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(v).}$$

6.4. Soit $X \in E$. Il existe un unique couple $(X_1, X_2) \in \mathrm{Ker}(v) \times \mathrm{Im}(v)$ tel que $X = X_1 + X_2$. D'autre part, il existe $Z \in E$ tel que $X_2 = v(Z) = Z - u(Z)$. En résumé,

$$\boxed{\forall X \in E,\ \exists! X_1 \in \mathrm{Ker}(v),\ \exists Z \in E /\ X = X_1 + Z - u(Z).}$$

6.5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soient X dans E puis $X_1 \in \mathrm{Ker}(v)$ et $Z \in E$ tel que $X = X_1 + Z - u(Z)$.
Puisque $X_1 \in \mathrm{Ker}(v)$, on a $u(X_1) = X_1$ puis $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(X_1) = X_1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} p_m(X) &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k(X_1 + Z - u(Z)) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(X_1 + u^k Z - u^{k+1}(Z)) = X_1 + \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(u^k Z - u^{k+1}(Z)) \\ &= X_1 + \frac{1}{m}(Z - u^m(Z)) \text{ (somme télescopique).} \end{aligned}$$

Soit $Z \in E$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\left\|\frac{1}{m}(Z - u^m(Z))\right\| \leqslant \frac{1}{m}(\|Z\| + \|u^m(Z)\|) = \frac{2\|Z\|}{m}$. On en déduit que

$$\forall Z \in E,\ \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m}(Z - u^m(Z)) = 0.$$

Par suite, $\forall X \in E$, $\lim\limits_{m \to +\infty} p_m(X) = X_1 = p(X)$ où p est la projection sur $\mathrm{Ker}(v)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(v)$.

Partie 2

1. • Pour chaque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $X \mapsto AX$ est un endomorphisme continu de $\mathbb{R}^n$. Donc, pour chaque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||$ existe dans $\mathbb{R}$. $|||\ |||$ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

• $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A||| \geqslant 0$.

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$|||A||| = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n,\ (\|X\| = 1 \Rightarrow AX = 0) \Rightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ A\frac{X}{\|X\|} = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n,\ AX = 0 \Rightarrow A = 0.$$

• Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $|||\lambda A||| = \sup\limits_{\|X\|=1} \|\lambda AX\| = |\lambda| \sup\limits_{\|X\|=1} \|AX\| = |\lambda|\ |||A|||$.

• Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$, $\|(A+B)X\| \leqslant \|AX\| + \|BX\| \leqslant |||A||| + |||B|||$ et donc $|||A+B||| \leqslant |||A||| + |||B|||$.

On a montré que

$$\boxed{|||\ ||| \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. 2.1. ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tAA = B$ et donc $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On sait alors que toutes les valeurs propres de B sont réelles. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de B puis X un vecteur propre associé.

$$\lambda\|X\|^2 = \lambda\,{}^tXX = {}^tX(\lambda X) = {}^tX({}^tAAX) = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2,$$

et donc, puisque $X \neq 0$, $\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$.

$$\boxed{B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^+.}$$

Si de plus $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il en est de même de B car $\det(B) = (\det(A))^2 \neq 0$ et donc 0 n'est pas valeur propre de B. Dans ce cas, $\mathrm{Sp}(B) \subset]0, +\infty[$.
2.2. Si U est semblable à B, on sait que U et B ont les mêmes valeurs propres et en particulier $\rho(U) = \rho(B)$.

2.3. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de B où la numérotation a été faite de telle sorte que $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ (de sorte que $\rho(B) = \lambda_n$).
D'après le théorème spectral, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B = PD{}^tP$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$. Pour $X = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|AX\|^2 &= {}^t(AX)(AX) = {}^tX{}^tAAX = {}^tXBX = {}^tXPD^PX = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \text{ (où on a posé } {}^tPX = (x'_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}) \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2\right)\lambda_n = \rho(B)\|{}^tPX\| = \rho(B)\|X\| \text{ (car } P \in O_n(R)). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout vecteur X tel que $\|X\| = 1$, on a $\|AX\| \leqslant \sqrt{\rho(B)}$ et on en déduit que $|||A||| \leqslant \sqrt{\rho(B)}$ ou encore que

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||^2 \leqslant \rho(B).}$$

2.4. Si de plus on choisit un vecteur propre unitaire X_0 de B associé à la valeur propre λ_n, on obtient $\|AX_0\|^2 = {}^tX_0BX_0 = \lambda_n{}^tX_0X_0 = \lambda_n\|X_0\|^2 = \rho(B)$ et donc $|||A|||^2 \geqslant \rho(B)$ et finalement

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||^2 = \rho(B).}$$

3. **3.1.** $|||A||| = |\gamma||||I_n||| = |\gamma|$.

3.2. Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$, La suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $|||A^k||| = |\gamma|^k|||I_n^k||| = |\gamma|^k$. En particulier, la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\gamma \in [-1,1] \setminus \{0\}$.

3.3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\gamma \neq 1$,

$$P_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} A^k = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\gamma^k\right) I_n = \frac{1}{m}\frac{1-\gamma^m}{1-\gamma} I_n.$$

Maintenant, puisque $|\gamma| < 1$, pour tout X de E, $\lim\limits_{m\to+\infty} P_m(X) = \lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{1}{m}\dfrac{1-\gamma^m}{1-\gamma}X = 0$.

$$\boxed{\forall X \in E,\ \lim_{m\to+\infty} P_m(X) = 0.}$$

4. **4.1.** Supposons que u soit diagonalisable en base orthonormée, ou encore que A soit symétrique réelle. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de vecteurs propres associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Soit $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur unitaire.

$$\begin{aligned}\|AX\|^2 \left\|A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 x_i^2 \text{ (car la base } (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ est orthonormée)} \\ &\leqslant \rho(A)^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \rho(A)^2.\end{aligned}$$

Par suite, pour tout X unitaire, $\|AX\| \leqslant \rho(A)$ avec égalité effectivement obtenue quand X est un vecteur propre unitaire associé à une valeur propre λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$. On en déduit que

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ |||A||| = \rho(A).}$$

Si maintenant A est une matrice diagonalisable quelconque, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ et on a $|||A||| \leqslant |||P||| \times |||P^{-1}||| \times |||D||| = |||P||| \times |||P^{-1}||| \times \rho(D) = |||P||| \times |||P^{-1}||| \times \rho(A)$ et on n'a rien de mieux (erreur probable d'énoncé).

4.2. Si $\rho(A) \leqslant 1$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $|||A^k||| = |||PD^kP^{-1}||| \leqslant |||P||| \times |||P^{-1}||| \times |||D^k||| = |||P||| \times |||P^{-1}||| \times \rho(A)^k \leqslant |||P||| \times |||P^{-1}|||$. Dans ce cas, la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Si $rho(A) > 1$, il existe une valeur propre λ_0 telle que $|\lambda_0| > 1$. Soit X_0 un vecteur propre unitaire associé. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$|||A^k||| \geqslant \|A^kX_0||| = |\lambda_0|^k\|X_0\| = |\lambda_0|^k.$$

Maintenant, puisque $|\lambda_0| > 1$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} |\lambda_0|^k = +\infty$ puis $\lim\limits_{k\to+\infty} |||A^k||| = +\infty$. Dans ce cas, la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

$$\boxed{\text{La suite } (A^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bornée si et seulement si } \rho(A) \leqslant 1.}$$

4.3. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

$$\begin{aligned}P_m &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(PDP^{-1})^k = P\left(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}D^k\right)P^{-1} = \frac{1}{m}\,P\,\text{diag}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_i^k\right)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}\\ &= \frac{1}{m}\,P\,\text{diag}\left(\frac{1-\lambda_i^m}{1-\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}\ (\text{car } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \neq 1).\end{aligned}$$

Maintenant, puisque chaque λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, est dans $]-1,1[$, $\lim_{m\to+\infty}\text{diag}\left(\frac{1-\lambda_i^m}{1-\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n} = \text{diag}\left(\frac{1}{1-\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Ensuite, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\lim_{m\to+\infty}P\,\text{diag}\left(\frac{1-\lambda_i^m}{1-\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1} = P\,\text{diag}\left(\frac{1}{1-\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}$ puis que $\lim_{m\to+\infty}P_m = \lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\,P\,\text{diag}\left(\frac{1-\lambda_i^m}{1-\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1} = 0$.

$$\boxed{\text{Si } \text{Sp}(A) \subset]-1,1[,\ \lim_{m\to+\infty}P_m = 0.}$$

Partie 3

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $X \in \text{Ker}(v)$. Alors $u(X) = X$ puis $\forall k \in [\![0, m-1]\!]$, $u^k(X) = X$ et donc

$$p_m(X) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}X = \frac{1}{m}mX = X.$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall X \in \text{Ker}(v),\ p_m(X) = X.}$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. p_m et v sont deux polynômes en u et donc p_m et v commutent. De plus

$$p_m \circ v = \frac{1}{m}(\text{id}_E - u)\circ\left(\sum_{k=0}^{m-1}u^k\right) = \frac{1}{m}(\text{id}_E - u^m).$$

3. **3.1.** Soit $X \in \text{Im}(v)$. Il existe $Y \in E$ tel que $X = v(Y)$. Mais alors, pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\|p_m(X)\| = \|p_m(v(Y))\| = \left\|\frac{1}{m}(Y - u^m(Y))\right\| \leqslant \frac{1}{m}(\|Y\| + \|u^m(Y)\|) \leqslant \frac{\|Y\|}{m}(1 + |||u^m|||),$$

où Y est un antécédent de X par v (on sait que pour tout endomorphisme f et tout vecteur Y, $\|f(Y)\| \leqslant |||f||| \times \|Y\|$).

3.2. Par hypothèse la suite $(|||u^m|||)$ est bornée et donc $\|p_m(X)\| \underset{m\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{m}\right)$. On en déduit que $\lim_{m\to+\infty}p_m(X) = 0$.

$$\boxed{\forall X \in \text{Im}(v),\ \lim_{m\to+\infty}p_m(X) = 0.}$$

4. Soit $X \in \text{Ker}(v) \cap \text{Im}(v)$. Puisque $X \in \text{Ker}(v)$, la suite $(p_m(X)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers X et puisque $X \in \text{Im}(v)$, la suite $(p_m(X)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Par unicité de la limite, on en déduit que $X = 0$. On a montré que $\text{Ker}(v) \cap \text{Im}(v) = \{0\}$ et donc la somme $\text{Ker}(v) + \text{Im}(v)$ est directe.

5. D'après le théorème du rang, $\dim(H) = \dim(\text{Ker}(v)) + \dim(\text{Im}(v))) = n$ et donc $H = E$.

$$\boxed{E = \text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(v).}$$

6. Puisque $E = \text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(v)$, on peut définir p le projecteur sur $\text{Ker}(v)$ parallèlement à $\text{Im}(v)$.
Si $X \in \text{Ker}(v)$ $\lim_{m\to+\infty}p_m(X) = X = p(X)$ et si $X \in \text{Im}(v)$ $\lim_{m\to+\infty}p_m(X) = X = p(X)$. Donc par linéarité, puisque $E = \text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(v)$, pour tout X de E, $\lim_{m\to+\infty}p_m(X) = p(X)$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (p_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement vers } p \text{ le projecteur sur Ker}(v) \text{ parallèlement à Im}(v).}$$

Partie 4

1. On sait que $||| \ |||$ est une norme sous-multiplicative. On en déduit que $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $|||u^m||| \leqslant |||u|||^m \leqslant 1$. Donc la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $|||p_m||| \leqslant \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} |||u^k||| \leqslant \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} 1 = 1$.

3. 3.1. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $X \in \overline{\mathrm{Im}(v)}$ et $T \in \mathrm{Im}(v)$.

$$\|p_m(X)\| = \|p_m(X-T) + p_m(T)\| \leqslant \|p_m(X-T)\| + \|p_m(T)\| \leqslant |||p_m||| \times \|X-T\| + \|p_m(T)\| \leqslant \|X-T\| + \|p_m(T)\|.$$

$$\boxed{\forall X \in \overline{\mathrm{Im}}(v),\ \forall T \in \mathrm{Im}(v),\ \|p_m(X)\| \leqslant \|X-T\| + \|p_m(T)\|.}$$

3.2. Dans la question 3.1 de la partie 3, l'hypothèse de dimension finie n'a pas été utilisée.
Donc on a encore : $\forall T \in \mathrm{Im}(v)$, $\lim\limits_{m\to+\infty} p_m(T) = 0$.

Soit $X \in \overline{\mathrm{Im}(v)}$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $T \in \mathrm{Im}(v)$ tel que $\|X - T\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. D'après la question précédente, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\|p_m(X)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \|p_m(T)\|$. Maintenant, puisque $\lim\limits_{m\to+\infty} p_m(T) = 0$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall m \geqslant m_0$, $\|p_m(T)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $m \geqslant m_0$, on a $\|p_m(X)\| < \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}^* /\ \forall m \geqslant m_0$, $\|p_m(X)\| < \varepsilon$ et donc $\lim\limits_{m\to+\infty} p_m(X) = 0$.

$$\boxed{\forall X \in \overline{\mathrm{Im}(v)},\ \lim_{m\to+\infty} p_m(X) = 0.}$$

4. Tout d'abord si F est un sous-espace de E, alors $\overline{F}$ est un sous-espace de E. En effet, $0 \in \overline{F}$ et si $(x, y) \in \overline{F}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, il existe deux suitesd'éléments de F $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$. Mais alors, la suite $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de F car F est un sous-espace vectoriel, et cette suite converge vers $\lambda x + \mu y$. Ainsi, $\lambda x + \mu y$ est limite d'une suite d'éléments de F et donc $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$.

En particulier, $\overline{\mathrm{Im}(v)}$ est un sous-espace de E. Maintenant, comme à la question 4 de la partie 3, si $X \in \mathrm{Ker}(v) \cap \overline{\mathrm{Im}(v)}$, alors $X = \lim\limits_{m\to+\infty} p_m(X) = 0$. Donc

$$\boxed{\text{la somme } H = \mathrm{Ker}(v) + \overline{\mathrm{Im}(v)} \text{ est directe.}}$$

5. 5.1. Pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, p_m commute avec v et on sait alors que $\mathrm{Im}(v)$ est stable par p_m.

5.2. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \overline{\mathrm{Im}(v)}$. Il existe une suite (X_n) d'éléments de $\mathrm{Im}(v)$ telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} X_n = X$. Maintenant, u est continu sur l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ et donc $p_m = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} u^k$ est continu sur $(E, \| \ \|)$. On en déduit que la suite $(p_m(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $p_m(X)$. Mais $\mathrm{Im}(v)$ est stable par p_m et donc chaque $p_m(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, est dans $\mathrm{Im}(v)$. Ainsi, $p_m(X)$ est limite d'une suite d'éléments de $\mathrm{Im}(v)$ et donc $p_m(X) \in \overline{\mathrm{Im}(v)}$. On a montré que

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \overline{\mathrm{Im}(v)} \text{ est stable par } p_m.}$$

5.3. D'autre part, $\mathrm{Ker}(v)$ est stable par p_m car $\forall X \in \mathrm{Ker}(v)$, $p_m(X) = X$. Par linéarité, $H = \mathrm{Ker}(v) + \overline{\mathrm{Im}(v)}$ est stable par p_m.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ H = \mathrm{Ker}(v) \oplus \overline{\mathrm{Im}(v)} \text{ est stable par } p_m.}$$

6. 6.1. $\forall Y \in \mathrm{Ker}(v)$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $p_m(Y) = Y$ et donc $\lim\limits_{m\to+\infty} p_m(Y) = Y$. D'autre part, $\forall Z \in \overline{\mathrm{Im}(v)}$, $\lim\limits_{m\to+\infty} p_m(Z) = 0$. Donc, $\forall (Y, Z) \in \mathrm{Ker}(v) \times \overline{\mathrm{Im}(v)}$, $\lim\limits_{m\to+\infty} p_m(Y + Z) = \lim\limits_{m\to+\infty} p_m(Y) + p_m(Z) = Y = \pi(Y + Z)$ ou encore

$$\boxed{\forall X \in H,\ \lim_{m\to+\infty} p_m(X) = \pi(x).}$$

6.2. Soit $X \in H$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $p_m(X) = p_m(\pi(x)) + p_m(X - \pi(X)) = \pi(x) + p_m(X - \pi(X))$ et donc $\pi(X) = p_m(X) - p_m(X - \pi(X))$. Par suite, pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\pi(X)\| \leqslant \|p_m(X)\| + \|p_m(X - \pi(X))\| \leqslant |||p_m||| \|X\| + \|p_m(X - \pi(X))\| \leqslant \|X\| + \|p_m(X - \pi(X))\|.$$

Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\|\pi(X)\| \leqslant \|X\| + \|p_m(X - \pi(X))\|$. Maintenant, $X - \pi(X) \in \overline{\mathrm{Im}(v)}$ et donc $\lim\limits_{m \to +\infty} p_m(X - \pi(X)) = 0$ ou encore $\lim\limits_{m \to +\infty} \|p_m(X - \pi(X))\| = 0$. Quand m tend vers $+\infty$, on obtient $\|\pi(X)\| \leqslant \|X\|$.

$$\boxed{\forall X \in H,\ \|\pi(x)\| \leqslant \|X\|.}$$

6.3. (erreur probable d'énoncé : π est un endomorphisme de H mais π n'a pas été défini sur E tout entier). On en déduit que $\sup\limits_{\|X\|=1} \|\pi(X)\| \leqslant 1 < +\infty$ et on sait alors que

$$\boxed{\pi \in \mathcal{L}_c(H).}$$

Partie 5

1. Soit $X \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $|(u(X))_n| = |x_{n+1}| \leqslant \|X\|$. Donc la suite $u(X)$ est bornée. Ainsi, $\forall X \in E$, $u(X) \in E$ et donc u est bien une application de E dans E. De plus, $\forall X \in E$, $\|u(X)\| \leqslant \|X\|$.
Soient $(X, Y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u(\lambda X + \mu Y))_n = (\lambda X + \mu Y)_{n+1} = \lambda X_{n+1} + \mu Y_{n+1} = (\lambda u(X) + \mu v(Y))_n,$$

et donc $u(\lambda X + \mu Y) = \lambda u(X) + \mu u(Y)$.

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

2. Pour tout $X \in E$ tel que $\|X\| = 1$, $\|u(X)\| \leqslant \|X\| = 1$ et donc $|||u||| = \sup\limits_{\|X\|=1} \|u(X)\| \leqslant 1$. D'autre part, si X est la suite constante $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, X_0 est un élément de E tel que $\|X_0\| = 1$ et donc $|||u||| \geqslant \|u(X_0)\| = \|X_0\| = 1$. Finalement

$$\boxed{|||u||| = 1.}$$

3. $\mathrm{Ker}(v)$ est l'ensemble des suites bornées X telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n$ c'est-à-dire l'ensemble des suites constantes.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(v) \text{ est l'ensemble des suites constantes.}}$$

4. Soit $X \in \mathrm{Im}(v)$. Il existe $Y \in E$ telle que $X = Y - u(Y)$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n - y_{n+1}$. Mais alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|s_n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (y_k - y_{k+1}) \right| = |y_0 - y_n| \leqslant 2\|Y\|,$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$. Donc la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Réciproquement, soit X un élément de E tel que la suite $S = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Soit $Y = -S$. Y est un élément de E. De plus, $(v(Y))_0 = -s_0 + s_1 = x_0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(v(Y))_n = -s_n + s_{n+1} = -\sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k + \sum\limits_{k=0}^{n} x_k = x_n$. Donc, $v(Y) = X$ et $X \in \mathrm{Im}(v)$.

On a montré que $\mathrm{Im}(v)$ est constitué des suites X telles que la suite S soit bornée.

5. Soit $X \in E$. Si la suite $(p_m(X))_{m\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace normé $(E, \| \ \|)$, il existe $Y \in E$ tel que $\lim\limits_{m\to+\infty} \|p_m(X) - Y\| = 0$. En particulier, puisque $|(p_m(X))_0 - y_0| \leqslant \|p_m(X) - Y\|$, on a $\lim\limits_{m\to+\infty} (p_m(X))_0 = y_0$ ou encore

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_{m-1}}{m} = y_0.$$

Ainsi, si la suite $(p_m(X))_{m\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace normé $(E, \| \ \|)$, la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesaro.

Construisons alors une suite réelle bornée X telle que la suite $\left(\dfrac{x_0 + x_1 + \ldots + x_{m-1}}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

Soit X la suite dont les termes consécutifs sont un 1, puis deux 0, puis quatre 1 puis huit 0, puis seize 1, ..., puis 2^{2p} 1, puis 2^{2p+1} 0, ... Pour $m \in \mathbb{N}^*$, posons $w_n = \dfrac{x_0 + \ldots + x_{n-1}}{n}$. Alors

$$\begin{aligned}
w_{2^{2p+1}-1} &= w_{1+2+2^2+\ldots+2^{2p}} = \frac{1\times 1 + 2\times 0 + 4\times 1 + \ldots + 2^{2p-1}\times 0 + 2^{2p}\times 1}{1\times 1 + 2\times 1 + 4\times 1 + \ldots + 2^{2p-1}\times 1 + 2^{2p}\times 1} = \frac{\dfrac{(2^2)^p - 1}{2^2 - 1}}{2^{2p+1} - 1} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{2^{2p} - 1}{2^{2p+1} - 1},
\end{aligned}$$

et donc aussi $w_{2^{2p+2}-1} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2^{2p} - 1}{2^{2p+2} - 1}$. Par suite, $w_{2^{2p+1}-1} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2^{2p}}{2^{2p+1}} = \dfrac{1}{6}$ et $w_{2^{2p+2}-1} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2^{2p}}{2^{2p+2}} = \dfrac{1}{12}$.
Puisque les deux suites extraites $(w_{2^{2p+1}-1})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2^{2p+2}-1})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites distinctes, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.
D'après la remarque initiale, la suite X est un élément de E tel que la suite $(p_m(X))_{m\in\mathbb{N}^*}$ diverge dans l'espace normé $(E, \|\ \|)$. Ceci montre en particulier que $E \neq \mathrm{Ker}(v) \oplus \overline{\mathrm{Im}(v)}$.

$$\boxed{\text{Il existe } X \in E \text{ tel que la suite } (p_m(X))_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ dans l'espace normé } (E, \|\ \|).}$$

