Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice 1

1. a. Pour tout $x \in]-1,1[$, $-\dfrac{1}{e}\dfrac{1}{1+x} = -\dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{e}$.

b. On sait que la somme d'une série entière est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence et que sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Donc, sous l'hypothèse $R \geqslant 1$, S est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$,

$$S'(x) - S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)a_{n+1} - a_n)x^n,$$

puis

$$\begin{aligned} S \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-1,1[&\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)a_{n+1} - a_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{e} \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{e} \quad (*) \end{aligned}$$

(par unicité des coefficients d'un développement en série entière).

$$\boxed{\text{Si } R \geqslant 1,\ S \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-1,1[\text{ si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{e}.}$$

c. En multipliant les deux membres de $(*)$ par $n!$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)!a_{n+1} - n!a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n!}{e}$.
Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} n!a_n &= 0!a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}((k+1)!a_{k+1} - k!a_k) \text{ (somme télescopique)} \\ &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}k!}{e} = a_0 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!, \end{aligned}$$

et donc $a_n = \dfrac{a_0}{n!} - \dfrac{1}{en!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{a_0}{n!} - \frac{1}{en!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!.}$$

Réciproquement, si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{a_0}{n!} - \dfrac{1}{en!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!$ alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)a_{n+1} - na_n = \left(\frac{a_0}{n!} - \frac{1}{en!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\right) - \left(\frac{a_0}{n!} - \frac{1}{en!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!\right) = -\frac{1}{en!}(-1)^n n! = \frac{(-1)^{n-1}}{e}.$$

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|a_n| \leqslant \frac{|a_0|}{n!} + \frac{1}{en!}\sum_{k=0}^{n-1}\left|(-1)^k k!\right| \leqslant |a_0| + \frac{1}{en!}\sum_{k=0}^{n-1}(n-1)! = |a_0| + \frac{n \times (n-1)!}{en!} = |a_0| + \frac{1}{e}.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leqslant |a_0| + \dfrac{1}{e}$ ce qui reste vrai pour $n = 0$. La suite (a_n) est bornée.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $b_n = 1$. Alors $R_b = 1$ et $a_n = O(b_n)$. On en déduit que $R = R_a \geqslant R_b = 1$.

$$\boxed{R = 1.}$$

2. Soit $x > -1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ car $\forall t \geqslant 1$, $t + x \geqslant 1 + x > 0$.

De plus, $t^2 \dfrac{e^{-t}}{x+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $\dfrac{e^{-t}}{x+t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

$$\boxed{\forall x > -1, \text{ la fonction } t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t} \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[.}$$

3. Soient $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \times \frac{1}{1 - \left(-\dfrac{x}{t}\right)}\, dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{x}{t}\right)^k + \frac{\left(-\dfrac{x}{t}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\dfrac{x}{t}\right)} \right) dt \text{ (car } \forall t \geqslant 1,\ \left|-\frac{x}{t}\right| = \frac{|x|}{t} \leqslant |x| < 1 \text{ et donc } -\frac{x}{t} \neq 1) \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \frac{e^{-t}}{t^{k+1}} + (-1)^{n+1} x^{n+1} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}(x+t)} \right) dt
\end{aligned}$$

Maintenant, chaque fonction $t \mapsto (-1)^k \dfrac{e^{-t}}{t^{k+1}} x^{k+1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car continue sur $[1, +\infty[$ et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit encore que la fonction $t \mapsto (-1)^{n+1} x^{n+1} \dfrac{e^{-t}}{t^{n+1}(x+t)} = \dfrac{e^{-t}}{x+t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \dfrac{e^{-t}}{t^{k+1}}$.

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{k+1}}\, dt + (-1)^{n+1} x^{n+1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}(x+t)}\, dt$. Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| (-1)^{n+1} x^{n+1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}(x+t)}\, dt \right| = |x|^{n+1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}(x+t)}\, dt \leqslant |x|^{n+1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt,$$

et comme $|x|^{n+1} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ car $|x| < 1$, on en déduit que $(-1)^{n+1} x^{n+1} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}(x+t)}\, dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{k+1}}\, dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ b_n = (-1)^n \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\, dt.}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^n}\, dt$. On a donc $\forall x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_{n+1} x^n$

4. Soit $x \in]-1, +\infty[$. En posant $u = x + t$, on obtient

$$f(x) = \int_{x+1}^{+\infty} \frac{e^{-u+x}}{u}\, du = e^x \int_{x+1}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du.$$

Maintenant, la fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du - \int_1^{y} \frac{e^{-u}}{u}\, du$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée la fonction $y \mapsto -\dfrac{e^{-y}}{y}$.

Ainsi, la fonction $x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on en déduit que la fonction $x \mapsto\mapsto \displaystyle\int_{x+1}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ de dérivée la fonction $x \mapsto -\dfrac{e^{-(x+1)}}{x+1}$.

Finalement, f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]-1,+\infty[$ et pour $x>-1$

$$f'(x)=e^x\int_{x+1}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du+e^x\times\left(-\frac{e^{-(x+1)}}{x+1}\right)=f(x)-\frac{1}{e}\frac{1}{x+1}.$$

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-1,+\infty[\text{ et } \forall x>-1,\ f'(x)-f(x)=-\frac{1}{e}\frac{1}{x+1}.}$$

5. Posons $a_0=f(0)=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=I_1$ puis pour $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\frac{a_0}{n!}-\frac{1}{en!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!$. D'après la question, 1.c., si $R_a\geqslant 1$, S est solution de (E) sur $]-1,1[$ et d'après la question 1.d., $R_a\geqslant 1$. Donc, S est solution de (E) sur $]-1,1[$.
Maintenant, les fonctions $x\mapsto 1$ et $x\mapsto -\frac{1}{e}\frac{1}{x+1}$ sont continues sur $]-1,1[$. Le théorème de CAUCHY permet d'affirmer qu'il existe une solution de (E) et une seule sur $]-1,1[$ prenant la valeur I_1 en 0 à savoir la fonction f. On en déduit que $S=f$ et donc

$$\forall x\in]-1,1[,\ a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_0}{n!}-\frac{1}{en!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!\right)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_{n+1}x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on en déduit $\frac{a_0}{n!}-\frac{1}{en!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!=(-1)^n I_{n+1}$ et donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k! &= (-1)^n n!+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!=(-1)^n n!+en!\left(\frac{I_1}{n!}+(-1)^{n+1}I_{n+1}\right)\\ &=(-1)^n n!+e\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt+(-1)^{n+1}en!\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\,dt.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!=(-1)^n n!+e\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt+(-1)^{n+1}en!\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\,dt.}$$

Exercice 2

1. Soient $M\in\mathcal{E}_{p,q}$, $P\in GL_n(\mathbb{R})$ puis $M'=PMP^{-1}$.

$$\begin{aligned}M \text{ solution de } \mathcal{E}_{p,q} &\Rightarrow M^2+pM+qI_n=0\Rightarrow P(M^2+pM+qI_n)P^{-1}=0\Rightarrow PM^2P^{-1}+pPMP^{-1}+qI_n=0\\ &\Rightarrow (PMP^{-1})^2+pPMP^{-1}+qI_n=0\Rightarrow M'^2+pM'+qI_n=0\\ &\Rightarrow M' \text{ solution de } \mathcal{E}_{p,q}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (M \text{ solution de } \mathcal{E}_{p,q}\Rightarrow \forall M'\in E(M),\ M' \text{ solution de } \mathcal{E}_{p,q}.}$$

2. a. Une matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe un polynôme non nul annulateur de M, scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.
Soit M une solution de $\mathcal{E}_{-(a+b),ab}$. Le polynôme $X^2-(a+b)X+ab=(X-a)(X-b)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples (car a et b sont des réels distincts) et annulateur de M. Donc, M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
b. Donc, il existe $P\in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $D=\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $M=PDP^{-1}$.

$$\begin{aligned}M \text{ solution de } \mathcal{E}_{p,q} &\Leftrightarrow D \text{ solution de } \mathcal{E}_{p,q}\Leftrightarrow D^2-(a+b)D+abI_n=0\\ &\Leftrightarrow \text{diag}(\lambda_i^2-(a+b)\lambda_i+ab)_{1\leqslant i\leqslant n}=0\\ &\Leftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i^2-(a+b)\lambda_i+ab=0\Leftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i\in\{a,b\}.\end{aligned}$$

Les solutions de $\mathcal{E}_{-(a+b),ab}$ sont les PDP^{-1} où $P\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D=\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ avec $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i\in\{a,b\}$.

3. **a.** $M^2 = 0 \Leftrightarrow f^2 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) \in \text{Ker} f \Leftrightarrow \text{Im} f \subset \text{Ker} f$.

b. Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie dans un $\mathbb{K}$-espace F. La restriction de f à tout supplémentaire de Kerf dans E réalise un isomorphisme de ce supplémentaire sur Imf. En particulier, $\dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f) = \dim(E)$.

c. $n = \dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f) \geqslant 2\dim(\text{Im} f)$ et donc $\dim(\text{Im} f) \leqslant \dfrac{n}{2}$.

d. Si $p = 0$, $f = 0$ et la matrice de f dans toute base est nulle, c'est-à-dire conventionnellement de la forme désirée.
Supposons dorénavant $1 \leqslant p \leqslant \dfrac{n}{2}$ de sorte que $n - p \geqslant p$.
Soit $(\underbrace{e_{n-p+1}, \ldots, e_n}_{p})$ une base de Imf. $(\underbrace{e_{n-p+1}, \ldots, e_n}_{p})$ est une famille libre de Kerf $\supset$ Imf et on peut la compléter en $(\underbrace{e_{p+1}, \ldots, e_n}_{n-p})$ base de Kerf.
D'autre part, puisque les vecteurs e_i, $n - p + 1 \leqslant i \leqslant n$, sont dans Imf, il existe une famille $(e_1, \ldots, e_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) = e_{n-p+i}$.

Vérifions alors que la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Il suffit pour cela de vérifier que cette famille est libre.
Soit $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(e_i) \text{ (car } \forall i \in [\![p+1, n]\!],\ e_i \in \text{Ker} f)$$
$$\Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ \alpha_i = 0 \text{ (car } (f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant p} \text{ est une base de Im} f)$$

Il reste $\displaystyle\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i e_i = 0$ ce qui impose $\forall i \in [\![p+1, n]\!],\ \alpha_i = 0$ car la famille $(e_i)_{p+1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de Kerf. Finalement, $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Puisque $\forall i \in [\![p+1, n]\!]$, $f(e_i) = 0$ et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) = e_{n-p+i}$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_{n-p,p} & 0_{n-p,n-p} \\ I_p & 0_{p,n-p} \end{pmatrix}$.

e. Pour $0 \leqslant p \leqslant \dfrac{n}{2}$, posons $J_p = \begin{pmatrix} 0_{n-p,p} & 0_{n-p,n-p} \\ I_p & 0_{p,n-p} \end{pmatrix}$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $M^2 = 0$, alors d'après ce qui précède, M est semblable à J_p. Réciproquement, si M est semblable à J_p, il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E dans laquelle la matrice de f est J_p. Pour $p + 1 \leqslant i \leqslant n$, $f^2(e_i) = f(0) = 0$ et pour $1 \leqslant i \leqslant p$, $f^2(e_i) = f(e_{n-p+i}) = 0$. Donc $f^2 = 0$ puis $M^2 = 0$.

L'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_{0,0}$ est $\displaystyle\bigcup_{0\leqslant p\leqslant \frac{n}{2}} E(J_p)$.

4. **a.** Soit M une solution de $\mathcal{E}_{-2a,a^2}$. Posons $N = M - aI_n$. Alors

$$N^2 = (M - aI_n)^2 = M^2 - 2aM + a^2 I_n = 0.$$

Par suite, il existe une matrice N telle que $M = N + aI_n$ et $N^2 = 0$. Réciproquement, si $M = N + aI_n$ avec $N^2 = 0$, alors $M^2 - 2aM + a^2 I_n = 0$.

b. Les solutions de l'équation $N^2 = 0$ ont été déterminées en 3. et donc l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_{-2a,a^2}$ est $\displaystyle\bigcup_{0\leqslant p\leqslant \frac{n}{2}} E(aI_n + J_p)$ (car $\forall P \in GL_n(\mathbb{R}),\ P(J_p + aI_n)P^{-1} = PJ_pP^{-1} + aI_n$).

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $M^2 + I_n = 0 \Rightarrow M^2 = -I_n \Rightarrow \det(M^2) = \det(-I_n) \Rightarrow (\det M)^2 = (-1)^n$. Si de plus n est impair, cette dernière équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $(-1)^n = -1$.

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, l'équation } \mathcal{E}_{0,1} \text{ n'a pas de solution dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

6. **a.** Soit $M \in \mathcal{E}_{0,1}$. Le polynôme $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de M. Donc M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

b. Soit $M \in \mathcal{E}_{0,1}$. Les valeurs propres de M sont à choisir parmi les racines du polynôme annulateur $X^2 + 1$. Donc $\text{Sp}(M) \subset \{i, -i\}$. Plus précisément, puisque M est à coefficients réels, on sait que si M a une valeur propre non réelle λ, alors $\overline{\lambda}$ est encore valeur propre de M avec même ordre de multiplicité. Donc i et $-i$ sont effectivement valeurs propres de M, toutes deux d'ordre p.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2p}$ canoniquement associé à M. f est diagonalisable, $\mathbb{C}^p = \mathrm{Ker}(f - i\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + i\mathrm{Id})$ avec $\mathrm{dimKer}(f - i\mathrm{Id}) = \mathrm{dimKer}(f + i\mathrm{Id}) = p$. Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f - i\mathrm{Id})$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_{2p})$ une base de $\mathrm{Ker}(f + i\mathrm{Id})$. Alors $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant 2p}$ est une base de $\mathbb{C}^{2p}$.
Vérifions alors que la famille $(e_1 + e_{p+1}, e_2 + e_{p+2}, \ldots, e_p + e_{2p}, i(e_1 - e_{p+1}), i(e_2 - e_{p+2}), \ldots, i(e_p - e_{2p}))$ est libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{C}^{2p}$.

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(e_1 + e_{p+1}) + \ldots + \lambda_p(e_p + e_{2p}) + \mu_1 i(e_1 - e_{p+1}) + \ldots + \mu_p i(e_p - e_{2p}) = 0 \\
&\qquad \Rightarrow (\lambda_1 + i\mu_1)e_1 + \ldots + (\lambda_p + i\mu_p)e_p + (\lambda_1 - i\mu_1)e_{p+1} + \ldots + (\lambda_p - i\mu_p)e_{2p} = 0 \\
&\qquad \Rightarrow (\lambda_1 + i\mu_1) = (\lambda_1 - i\mu_1) = 0,\ \ldots,\ (\lambda_p + i\mu_p) = (\lambda_p - i\mu_p) = 0 \\
&\qquad \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_p = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B} = (e_1 + e_{p+1}, e_2 + e_{p+2}, \ldots, e_p + e_{2p}, i(e_1 - e_{p+1}), i(e_2 - e_{p+2}), \ldots, i(e_p - e_{2p}))$ est libre et donc est une base de $\mathbb{C}^{2p}$. Maintenant, par définition, pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $f(e_k + e_{k+p}) = i(e_k - e_{k+p})$ et $f(i(e_k - e_{k+p})) = i(ie_k + ie_{k+p}) = -(e_k + e_{k+p})$. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est donc $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$. On a donc montré que M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifions enfin que M est semblable à $J_p = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On vient de montrer qu'il existe $Q \in GL_{2p}(\mathbb{C})$ telle que $QMQ^{-1} = J_p$ ou encore telle que $QM = J_pQ$. Posons $Q = Q_1 + iQ_2$ où Q_1 et Q_2 sont à coefficients réels. On a donc $Q_1M + iQ_2M = j_pQ_1 + iJ_pQ_2$ puis, comme M et J_p sont à coefficients réels, $Q_1M = J_pQ_1$ et $Q_2M = J - pQ_2$.
Mais alors, plus généralement, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(Q_1 + xQ_2)M = J_p(Q_1 + xQ_2)$. Maintenant, $x \mapsto \det(Q_1 + xQ_2)$ est un polynôme non nul car $\det(Q_1 + iQ_2) = \det(Q) \neq 0$. Ce polynôme admet donc un nombre fini de racines et, puisque $\mathbb{R}$ est infini, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(Q_1 + x_0Q_2) \neq 0$.
Si on pose $P = Q_1 + x_0Q_2$, P est une matrice à coefficients réels inversible telle que $PM = J_pP$ ou encore telle que $PMP^{-1} = J_p$.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est solution de } \mathcal{E}_{0,1}, \text{ il existe } P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}.}$$

c. Réciproquement, un calcul par blocs montre que $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix} = -I_n$ et donc $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_{0,1}$.

$$\boxed{\mathcal{E}_{0,1} = E(J_p) \text{ où } J_p = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}.}$$

Exercice 3

1. • Pour chaque $(P, Q) \in E^2$, la fonction PQ est continue sur le segment $[-1, 1]$ et donc intégrable sur ce segment. φ est donc une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

• Pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$ et donc φ est symétrique.

• Pour tout $(P_1, P_2, , Q) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2, Q) = \int_{-1}^{1} (\lambda_1P_1(t) + \lambda_2P_2(t))Q(t)\ dt = \lambda_1 \int_{-1}^{1} P_1(t)Q(t)\ dt + \lambda_2 \int_{-1}^{1} P_2(t)Q(t)\ dt = \lambda_1\varphi(P_1, Q) + \lambda_2\varphi(P_2, Q).$$

Donc, φ est linéaire par rapport à sa première variable puis, par symétrie, bilinéaire.

• Soit $P \in E$. $\varphi(P, P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\ dt \geqslant 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
\varphi(P, P) = 0 &\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} P^2(t)\ dt = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t \in [-1, 1],\ P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)} \\
&\Leftrightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}.
\end{aligned}$$

Donc φ est définie positive.

En résumé, φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive sur E et donc

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2. Si P est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, alors $(X^2-1)P'$ est élément de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ puis $f(P) = ((X^2-1)P')'$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc f est bien une application de E dans E. D'autre part, pour $(P,Q) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= ((X^2-1)(\lambda P + \mu Q)')' = ((X^2-1)(\lambda P' + \mu Q'))' = (\lambda(X^2-1)P' + \mu(X^2-1)Q')' \\ &= \lambda((X^2-1)P')' + \mu((X^2-1)Q')' = \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire de E dans E.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

3. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E.
L'adjoint de f est l'unique endomorphisme, noté f^*, vérifient $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.
L'endomorphisme f est symétrique si et seulement si $f^* = f$ ce qui équivaut à $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.

4. Soit $(P,Q) \in E^2$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} \varphi(f(P), Q) &= \int_{-1}^{1} ((X^2-1)P')'(t)Q(t)\ dt = \left[(t^2-1)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)\ dt \\ &= -\int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)\ dt. \end{aligned}$$

Par symétrie, on a aussi $\varphi(P, f(Q)) = \varphi(f(Q), P) = -\int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)\ dt = \varphi(P, f(Q))$. Donc

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme symétrique de } (E, \varphi).}$$

5. Soit $P \in E$. On a $\mathbb{R}_0[X] \subset \mathrm{Ker} f$.
Réciproquement, si $P \in \mathrm{Ker} f$ alors $((X^2-1)P' = 0$ puis $(X^2-1)P' \in \mathbb{R}_0[X]$. Si $P' \neq 0$, alors $\deg((X^2-1)P') \geqslant 2$ et donc $P \notin \mathrm{Ker} f$. Donc $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Finalement, $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$. Ensuite, le théorème du rang fournit $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker} f) = N + 1 - 1 = n$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X] \text{ puis } \mathrm{rg}(f) = n.}$$

6. a. (D'après la question précédente, si $n = 2$, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2).
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \mathrm{Vect}(0, 2X, 6X^2 - 2) = \mathrm{Vect}(X, 3X^2 - 1)$. Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donc (Q_1, Q_2) où $Q_1 = X$ et $Q_2 = 3X^2 - 1$. Déterminons l'orthonormalisée (P_1, P_2) cette base. Puisque Q_1Q_2 est impair, $\varphi(Q_1, Q_2) = \int_{-1}^{1} Q_1(t)Q_2(t)\ dt = 0$. La famille (Q_1, Q_2) est orthogonale. Il reste à normer chaque vecteur.
$\|Q_1\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2\ dt = \dfrac{2}{3}$. Donc $P_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}X$.
$\|Q_2\|^2 = \int_{-1}^{1} (3t^2-1)^2\ dt = 2\int_{0}^{1} (9t^4 - 6t^2 + 1)\ dt = 2\left(\dfrac{9}{5} - \dfrac{6}{3} + 1\right) = \dfrac{8}{5}$. Donc $P_2 = \sqrt{\dfrac{5}{8}}(3X^2 - 1)$.
Une base orthonormée de $\mathrm{Im}(f)$ est (P_1, P_2) où $P_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}X$ et $P_2 = \sqrt{\dfrac{5}{8}}(3X^2 - 1)$.

On sait alors que le projeté orthogonal de P_0 sur $\mathrm{Im}(f)$ est $\varphi(P_0, P_1)P_1 + \varphi(P_0, P_2)P_2$ avec

$$\varphi(P_0, P_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} (t^2 + t)\ dt = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

et

$$\varphi(P_0, P_2) = \sqrt{\frac{5}{8}} \int_{-1}^{1} (3t^2-1)(1+t)\ dt = \sqrt{\frac{5}{8}} \int_{-1}^{1} (3t^3 + 3t^2 - t - 1)\ dt = \sqrt{\frac{5}{8}}\left(3 \times \frac{2}{3} - 2\right) = 0.$$

Le projeté orthogonal de P_0 sur $\mathrm{Im} f$ est donc $\sqrt{\dfrac{2}{3}} \times P_1 + 0 \times P_2 = X$.

$$\boxed{\text{Le projeté orthogonal de } P_0 \text{ sur Imf est } p_{\mathrm{Im}(f)}(P_0) = X.}$$

b. On sait que $m = d(P_0, \mathrm{Im}(f)) = \left\|P_0 - p_{\mathrm{Im}(f)}(P_0)\right\| = \|1\| = \sqrt{2}$.

$$\boxed{m = \sqrt{2}.}$$

c. On sait de plus que $m = d(P_0, \mathrm{Im}(f))$ est atteint en un seul point à savoir X. Donc, pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\|P_0 - f(P)\| = m \Leftrightarrow f(P) = X \Leftrightarrow f(P) = f\left(\frac{X}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(P - \frac{X}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow P - \frac{X}{2} \in \mathbb{R}_0[X] \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ P = \frac{X}{2} + \lambda.$$

7. **a.** $L_1 = (X^2-1)' = 2X$, $L_2 = (X^4 - 2X^2 + 1)'' = 12X^2 - 4$ et $L_3 = (X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1)^{(3)} = 120X^3 - 72X$.

$$\boxed{L_1 = 2X,\ L_2 = 12X^2 - 4 \text{ et } L_3 = 120X^3 - 72X.}$$

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, $(X^2-1)^k$ est de degré $2k$ et donc $L_k = ((X^2-1)^k)^{(k)}$ est de degré $2k - k = k$.

c. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule Leibniz

$$\begin{aligned} A_k &= (X^2-1)^{(0)}((X^2-1)^k)^{(k+2)} + (k+2)(X^2-1)^{(1)}((X^2-1)^k)^{(k+1)} + \frac{(k+2)(k+1)}{2}(X^2-1)^{(2)}((X^2-1)^k)^{(k)} \\ &= (X^2-1)L_k'' + 2(k+2)XL_k' + (k+2)(k+1)L_k, \end{aligned}$$

et

$$B_k = (X)^{(0)}((X^2-1)^k)^{(k+1)} + (k+1)(X)^{(1)}((X^2-1)^k)^{(k+1)} = XL_k' + (k+1)L_k.$$

d. D'autre part,

$$A_k = \left((X^2-1)^{k+1})'\right)^{(k+1)} = 2(k+1)(X(X^2-1)^k)^{(k+1)} = 2(k+1)B_k.$$

On en déduit que $(X^2-1)L_k'' + 2(k+2)XL_k' + (k+2)(k+1)L_k = 2(k+1)(XL_k' + (k+1)L_k)$ puis que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ (X^2-1)L_k'' + 2XL_k' - k(k+1)L_k = 0.}$$

e. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$f(L_k) = ((X^2-1)L_k')' = (X^2-1)L_k'' + 2XL_k' = k(k+1)L_k,$$

et puisque $L_k \neq 0$, L_k est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_k = k(k+1)$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ L_k \text{ est vecteur propre de } f \text{ associé à la valeur propre } \lambda_k = k(k+1).}$$

f. Soit $(k, l) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $k \neq l$. D'après la question 4,

$$k(k+1)\varphi(L_k, L_l) = \varphi(k(k+1)L_k, L_l) = \varphi(f(L_k), L_l) = \varphi(L_k, f(L_l)) = l(l+1)\varphi(L_k, L_l).$$

Donc, $(k(k+1) - l(l+1))\varphi(L_k, L_l) = 0$. Mais $k(k+1) - l(l+1) = (k^2 - l^2) + (k - l) = (k-l)(k+l+1) \neq 0$ et donc $\varphi(L_k, L_l) = 0$. Ceci montre que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille orthogonale. $(L_0, \dots, L_n)$ est donc une famille orthogonale de vecteurs tous nuls et en particulier une famille libre. Comme d'autre part, $\mathrm{card}(L_0, \dots, L_n) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) < +\infty$, $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{(L_0, \dots, L_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X].}$$

