

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice 1

1. a. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $-\frac{1}{e} \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{e}$.

b. On sait que la somme d'une série entière est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence et que sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Donc, sous l'hypothèse $R \geq 1$, S est dérivable sur $] -1, 1[$ et pour $x \in] -1, 1[$,

$$S'(x) - S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} - a_n) x^n,$$

puis

$$S \text{ solution de (E) sur }] -1, 1[\Leftrightarrow \forall x \in] -1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} - a_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{e}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n+1) a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{e} \quad (*)$$

(par unicité des coefficients d'un développement en série entière).

Si $R \geq 1$, S est solution de (E) sur $] -1, 1[$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{e}$.

c. En multipliant les deux membres de (*) par $n!$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! a_{n+1} - n! a_n = \frac{(-1)^{n-1} n!}{e}$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} n! a_n &= 0! a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} ((k+1)! a_{k+1} - k! a_k) \text{ (somme télescopique)} \\ &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} k!}{e} = a_0 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k!, \end{aligned}$$

et donc $a_n = \frac{a_0}{n!} - \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k!$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{a_0}{n!} - \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k!.$$

Réciproquement, si $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{a_0}{n!} - \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k!$ alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1) a_{n+1} - n a_n = \left(\frac{a_0}{(n+1)!} - \frac{1}{e(n+1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k k! \right) - \left(\frac{a_0}{n!} - \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k! \right) = -\frac{1}{en!} (-1)^n n! = \frac{(-1)^{n-1}}{e}.$$

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|a_n| \leq \frac{|a_0|}{n!} + \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{n-1} |(-1)^k k!| \leq |a_0| + \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)! = |a_0| + \frac{n \times (n-1)!}{en!} = |a_0| + \frac{1}{e}.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leq |a_0| + \frac{1}{e}$ ce qui reste vrai pour $n = 0$. La suite (a_n) est bornée.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $b_n = 1$. Alors $R_b = 1$ et $a_n = O(b_n)$. On en déduit que $R = R_a \geq R_b = 1$.

$R = 1.$

2. Soit $x > -1$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ car $\forall t \geq 1, t+x \geq 1+x > 0$.

De plus, $t^2 \frac{e^{-t}}{x+t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $\frac{e^{-t}}{x+t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

$\forall x > -1$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

3. Soient $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \times \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{t}\right)} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \left(\sum_{k=0}^n \left(-\frac{x}{t}\right)^k + \frac{\left(-\frac{x}{t}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{x}{t}\right)} \right) dt \quad (\text{car } \forall t \geq 1, \left|-\frac{x}{t}\right| = \frac{|x|}{t} \leq |x| < 1 \text{ et donc } -\frac{x}{t} \neq 1) \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \frac{e^{-t}}{t^{k+1}} + (-1)^{n+1} x^{n+1} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}(x+t)} \right) dt \end{aligned}$$

Maintenant, chaque fonction $t \mapsto (-1)^k \frac{e^{-t}}{t^{k+1}} x^{k+1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car continue sur $[1, +\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit encore que la fonction $t \mapsto (-1)^{n+1} x^{n+1} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}(x+t)} = \frac{e^{-t}}{x+t} - \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \frac{e^{-t}}{t^{k+1}}$.

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{k+1}} dt + (-1)^{n+1} x^{n+1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}(x+t)} dt$. Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| (-1)^{n+1} x^{n+1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}(x+t)} dt \right| = |x|^{n+1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}(x+t)} dt \leq |x|^{n+1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt,$$

et comme $|x|^{n+1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ car $|x| < 1$, on en déduit que $(-1)^{n+1} x^{n+1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}(x+t)} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ et donc

que $\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{k+1}} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$. On a montré que

$$\forall x \in]-1, 1[, \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, b_n = (-1)^n \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^n} dt$. On a donc $\forall x \in]-1, 1[, \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_{n+1} x^n$

4. Soit $x \in]-1, +\infty[$. En posant $u = x+t$, on obtient

$$f(x) = \int_{x+1}^{+\infty} \frac{e^{-u+x}}{u} du = e^x \int_{x+1}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Maintenant, la fonction $u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction $y \mapsto \int_y^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_1^y \frac{e^{-u}}{u} du$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée la fonction $y \mapsto -\frac{e^{-y}}{y}$.

Ainsi, la fonction $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction $y \mapsto \int_y^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on en déduit que la fonction $x \mapsto \int_{x+1}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ de dérivée la fonction $x \mapsto -\frac{e^{-(x+1)}}{x+1}$.

Finalement, f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $] -1, +\infty[$ et pour $x > -1$

$$f'(x) = e^x \int_{x+1}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du + e^x \times \left(-\frac{e^{-(x+1)}}{x+1} \right) = f(x) - \frac{1}{e^{x+1}}.$$

$$f \text{ est dérivable sur }] -1, +\infty[\text{ et } \forall x > -1, f'(x) - f(x) = -\frac{1}{e^{x+1}}.$$

5. Posons $a_0 = f(0) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = I_1$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{a_0}{n!} - \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k!$. D'après la question, l.c., si $R_a \geq 1$, S est solution de (E) sur $] -1, 1[$ et d'après la question l.d., $R_a \geq 1$. Donc, S est solution de (E) sur $] -1, 1[$.
Maintenant, les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto -\frac{1}{e^{x+1}}$ sont continues sur $] -1, 1[$. Le théorème de CAUCHY permet d'affirmer qu'il existe une solution de (E) et une seule sur $] -1, 1[$ prenant la valeur I_1 en 0 à savoir la fonction f . On en déduit que $S = f$ et donc

$$\forall x \in] -1, 1[, a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_0}{n!} - \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k! \right) x^n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_{n+1} x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit $\frac{a_0}{n!} - \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k! = (-1)^n I_{n+1}$ et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k k! &= (-1)^n n! + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k! = (-1)^n n! + en! \left(\frac{I_1}{n!} + (-1)^{n+1} I_{n+1} \right) \\ &= (-1)^n n! + e \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + (-1)^{n+1} en! \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^k k! = (-1)^n n! + e \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + (-1)^{n+1} en! \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt.$$

Exercice 2

1. Soient $M \in \mathcal{E}_{p,q}$, $P \in GL_n(\mathbb{R})$ puis $M' = PMP^{-1}$.

$$\begin{aligned} M \text{ solution de } \mathcal{E}_{p,q} &\Rightarrow M^2 + pM + qI_n = 0 \Rightarrow P(M^2 + pM + qI_n)P^{-1} = 0 \Rightarrow PM^2P^{-1} + pPMP^{-1} + qI_n = 0 \\ &\Rightarrow (PMP^{-1})^2 + pPMP^{-1} + qI_n = 0 \Rightarrow M'^2 + pM' + qI_n = 0 \\ &\Rightarrow M' \text{ solution de } \mathcal{E}_{p,q} \end{aligned}$$

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (M \text{ solution de } \mathcal{E}_{p,q} \Rightarrow \forall M' \in E(M), M' \text{ solution de } \mathcal{E}_{p,q}.)$$

2. a. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans \mathbb{R} si et seulement si il existe un polynôme non nul annulateur de M , scindé sur \mathbb{R} à racines simples.

Soit M une solution de $\mathcal{E}_{-(a+b), ab}$. Le polynôme $X^2 - (a+b)X + ab = (X-a)(X-b)$ est scindé sur \mathbb{R} à racines simples (car a et b sont des réels distincts) et annulateur de M . Donc, M est diagonalisable dans \mathbb{R} .

b. Donc, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$.

$$\begin{aligned} M \text{ solution de } \mathcal{E}_{p,q} &\Leftrightarrow D \text{ solution de } \mathcal{E}_{p,q} \Leftrightarrow D^2 - (a+b)D + abI_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{diag}(\lambda_i^2 - (a+b)\lambda_i + ab)_{1 \leq i \leq n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i^2 - (a+b)\lambda_i + ab = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \in \{a, b\}. \end{aligned}$$

Les solutions de $\mathcal{E}_{-(a+b), ab}$ sont les PDP^{-1} où $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \in \{a, b\}$.

3. a. $M^2 = 0 \Leftrightarrow f^2 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \in \text{Ker} f \Leftrightarrow \text{Im} f \subset \text{Ker} f$.

b. Soit f une application linéaire d'un \mathbb{K} -espace E de dimension finie dans un \mathbb{K} -espace F . La restriction de f à tout supplémentaire de $\text{Ker} f$ dans E réalise un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\text{Im} f$. En particulier, $\dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f) = \dim(E)$.

c. $n = \dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f) \geq 2\dim(\text{Im} f)$ et donc $\dim(\text{Im} f) \leq \frac{n}{2}$.

d. Si $p = 0, f = 0$ et la matrice de f dans toute base est nulle, c'est-à-dire conventionnellement de la forme désirée.

Supposons dorénavant $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$ de sorte que $n - p \geq p$.

Soit $(\underbrace{e_{n-p+1}, \dots, e_n}_p)$ une base de $\text{Im} f$. $(\underbrace{e_{n-p+1}, \dots, e_n}_p)$ est une famille libre de $\text{Ker} f \supset \text{Im} f$ et on peut la compléter en $(\underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{n-p})$ base de $\text{Ker} f$.

D'autre part, puisque les vecteurs $e_i, n - p + 1 \leq i \leq n$, sont dans $\text{Im} f$, il existe une famille (e_1, \dots, e_p) de vecteurs de \mathbb{R}^n telle que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_i) = e_{n-p+i}$.

Vérifions alors que la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de \mathbb{R}^n . Il suffit pour cela de vérifier que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0 & \Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i) \quad (\text{car } \forall i \in \llbracket p+1, n \rrbracket, e_i \in \text{Ker} f) \\ & \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_i = 0 \quad (\text{car } (f(e_i))_{1 \leq i \leq p} \text{ est une base de } \text{Im} f) \end{aligned}$$

Il reste $\sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i = 0$ ce qui impose $\forall i \in \llbracket p+1, n \rrbracket, \alpha_i = 0$ car la famille $(e_i)_{p+1 \leq i \leq n}$ est une base de $\text{Ker} f$. Finalement, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de \mathbb{R}^n .

Puisque $\forall i \in \llbracket p+1, n \rrbracket, f(e_i) = 0$ et $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_i) = e_{n-p+i}$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_{n-p,p} & 0_{n-p,n-p} \\ I_p & 0_{p,n-p} \end{pmatrix}$.

e. Pour $0 \leq p \leq \frac{n}{2}$, posons $J_p = \begin{pmatrix} 0_{n-p,p} & 0_{n-p,n-p} \\ I_p & 0_{p,n-p} \end{pmatrix}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $M^2 = 0$, alors d'après ce qui précède, M est semblable à J_p . Réciproquement, si M est semblable à J_p , il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E dans laquelle la matrice de f est J_p . Pour $p+1 \leq i \leq n, f^2(e_i) = f(0) = 0$ et pour $1 \leq i \leq p, f^2(e_i) = f(e_{n-p+i}) = 0$. Donc $f^2 = 0$ puis $M^2 = 0$.

L'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_{0,0}$ est $\bigcup_{0 \leq p \leq \frac{n}{2}} E(J_p)$.

4. a. Soit M une solution de \mathcal{E}_{-2a,a^2} . Posons $N = M - aI_n$. Alors

$$N^2 = (M - aI_n)^2 = M^2 - 2aM + a^2I_n = 0.$$

Par suite, il existe une matrice N telle que $M = N + aI_n$ et $N^2 = 0$. Réciproquement, si $M = N + aI_n$ avec $N^2 = 0$, alors $M^2 - 2aM + a^2I_n = 0$.

b. Les solutions de l'équation $N^2 = 0$ ont été déterminées en 3. et donc l'ensemble des solutions de \mathcal{E}_{-2a,a^2} est $\bigcup_{0 \leq p \leq \frac{n}{2}} E(aI_n + J_p)$ (car $\forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), P(J_p + aI_n)P^{-1} = PJ_pP^{-1} + aI_n$).

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $M^2 + I_n = 0 \Rightarrow M^2 = -I_n \Rightarrow \det(M^2) = \det(-I_n) \Rightarrow (\det M)^2 = (-1)^n$. Si de plus n est impair, cette dernière équation n'a pas de solution dans \mathbb{R} car $(-1)^n = -1$.

Si n est impair, l'équation $\mathcal{E}_{0,1}$ n'a pas de solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. a. Soit $M \in \mathcal{E}_{0,1}$. Le polynôme $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est à racines simples dans \mathbb{C} et annulateur de M . Donc M est diagonalisable dans \mathbb{C} .

b. Soit $M \in \mathcal{E}_{0,1}$. Les valeurs propres de M sont à choisir parmi les racines du polynôme annulateur $X^2 + 1$. Donc $\text{Sp}(M) \subset \{i, -i\}$. Plus précisément, puisque M est à coefficients réels, on sait que si M a une valeur propre non réelle λ , alors $\bar{\lambda}$ est encore valeur propre de M avec même ordre de multiplicité. Donc i et $-i$ sont effectivement valeurs propres de M , toutes deux d'ordre p .

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{C}^{2p} canoniquement associé à M . f est diagonalisable, $\mathbb{C}^p = \text{Ker}(f - i\text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + i\text{Id})$ avec $\dim\text{Ker}(f - i\text{Id}) = \dim\text{Ker}(f + i\text{Id}) = p$. Soient (e_1, \dots, e_p) une base de $\text{Ker}(f - i\text{Id})$ et (e_{p+1}, \dots, e_{2p}) une base de $\text{Ker}(f + i\text{Id})$. Alors $(e_k)_{1 \leq k \leq 2p}$ est une base de \mathbb{C}^{2p} .

Vérifions alors que la famille $(e_1 + e_{p+1}, e_2 + e_{p+2}, \dots, e_p + e_{2p}, i(e_1 - e_{p+1}), i(e_2 - e_{p+2}), \dots, i(e_p - e_{2p}))$ est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{C}^{2p}$.

$$\begin{aligned} \lambda_1(e_1 + e_{p+1}) + \dots + \lambda_p(e_p + e_{2p}) + \mu_1 i(e_1 - e_{p+1}) + \dots + \mu_p i(e_p - e_{2p}) &= 0 \\ \Rightarrow (\lambda_1 + i\mu_1)e_1 + \dots + (\lambda_p + i\mu_p)e_p + (\lambda_1 - i\mu_1)e_{p+1} + \dots + (\lambda_p - i\mu_p)e_{2p} &= 0 \\ \Rightarrow (\lambda_1 + i\mu_1) = (\lambda_1 - i\mu_1) = 0, \dots, (\lambda_p + i\mu_p) = (\lambda_p - i\mu_p) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1 = \dots = \lambda_p = \mu_p = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B} = (e_1 + e_{p+1}, e_2 + e_{p+2}, \dots, e_p + e_{2p}, i(e_1 - e_{p+1}), i(e_2 - e_{p+2}), \dots, i(e_p - e_{2p}))$ est libre et donc est une base de \mathbb{C}^{2p} . Maintenant, par définition, pour $1 \leq k \leq p$, $f(e_k + e_{k+p}) = i(e_k - e_{k+p})$ et $f(i(e_k - e_{k+p})) = i(i e_k + i e_{k+p}) = -(e_k + e_{k+p})$. La matrice de f dans \mathcal{B} est donc $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$. On a donc montré que M est semblable

dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifions enfin que M est semblable à $J_p = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On vient de montrer qu'il existe $Q \in \text{GL}_{2p}(\mathbb{C})$ telle que $QMQ^{-1} = J_p$ ou encore telle que $QM = J_p Q$. Posons $Q = Q_1 + iQ_2$ où Q_1 et Q_2 sont à coefficients réels. On a donc $Q_1 M + iQ_2 M = J_p Q_1 + iJ_p Q_2$ puis, comme M et J_p sont à coefficients réels, $Q_1 M = J_p Q_1$ et $Q_2 M = J_p Q_2$. Mais alors, plus généralement, $\forall x \in \mathbb{R}, (Q_1 + xQ_2)M = J_p(Q_1 + xQ_2)$. Maintenant, $x \mapsto \det(Q_1 + xQ_2)$ est un polynôme non nul car $\det(Q_1 + iQ_2) = \det(Q) \neq 0$. Ce polynôme admet donc un nombre fini de racines et, puisque \mathbb{R} est infini, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(Q_1 + x_0 Q_2) \neq 0$.

Si on pose $P = Q_1 + x_0 Q_2$, P est une matrice à coefficients réels inversible telle que $PM = J_p P$ ou encore telle que $PMP^{-1} = J_p$.

Si M est solution de $\mathcal{E}_{0,1}$, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

c. Réciproquement, un calcul par blocs montre que $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix} = -I_n$ et donc $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_{0,1}$.

$\mathcal{E}_{0,1} = E(J_p)$ où $J_p = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

1. • Pour chaque $(P, Q) \in E^2$, la fonction PQ est continue sur le segment $[-1, 1]$ et donc intégrable sur ce segment. φ est donc une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} .

• Pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$ et donc φ est symétrique.

• Pour tout $(P_1, P_2, Q) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q) &= \int_{-1}^1 (\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t))Q(t) dt = \lambda_1 \int_{-1}^1 P_1(t)Q(t) dt + \lambda_2 \int_{-1}^1 P_2(t)Q(t) dt = \\ &= \lambda_1 \varphi(P_1, Q) + \lambda_2 \varphi(P_2, Q). \end{aligned}$$

Donc, φ est linéaire par rapport à sa première variable puis, par symétrie, bilinéaire.

• Soit $P \in E$. $\varphi(P, P) = \int_{-1}^1 P^2(t) dt \geq 0$. De plus,

$$\begin{aligned} \varphi(P, P) = 0 &\Leftrightarrow \int_{-1}^1 P^2(t) dt = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in [-1, 1], P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)} \\ &\Leftrightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}. \end{aligned}$$

Donc φ est définie positive.

En résumé, φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive sur E et donc

φ est un produit scalaire sur E .

2. Si P est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, alors $(X^2 - 1)P'$ est élément de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ puis $f(P) = ((X^2 - 1)P)'$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc f est bien une application de E dans E . D'autre part, pour $(P, Q) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= ((X^2 - 1)(\lambda P + \mu Q))' = ((X^2 - 1)(\lambda P' + \mu Q'))' = (\lambda(X^2 - 1)P' + \mu(X^2 - 1)Q')' \\ &= \lambda((X^2 - 1)P')' + \mu((X^2 - 1)Q')' = \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire de E dans E .

f est un endomorphisme de E.

3. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E .

L'adjoint de f est l'unique endomorphisme, noté f^* , vérifiant $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.

L'endomorphisme f est symétrique si et seulement si $f^* = f$ ce qui équivaut à $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

4. Soit $(P, Q) \in E^2$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} \varphi(f(P), Q) &= \int_{-1}^1 ((X^2 - 1)P')'(t)Q(t) dt = [(t^2 - 1)P'(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt \\ &= - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt. \end{aligned}$$

Par symétrie, on a aussi $\varphi(P, f(Q)) = \varphi(f(Q), P) = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt = \varphi(P, f(Q))$. Donc

f est un endomorphisme symétrique de (E, φ).

5. Soit $P \in E$. On a $\mathbb{R}_0[X] \subset \text{Kerf}$.

Réciproquement, si $P \in \text{Kerf}$ alors $((X^2 - 1)P)' = 0$ puis $(X^2 - 1)P' \in \mathbb{R}_0[X]$. Si $P' \neq 0$, alors $\deg((X^2 - 1)P') \geq 2$ et donc $P \notin \text{Kerf}$. Donc $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Finalement, $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$. Ensuite, le théorème du rang fournit $\text{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\text{Kerf}) = n + 1 - 1 = n$.

Ker(f) = ℝ₀[X] puis rg(f) = n.

6. a. (D'après la question précédente, si $n = 2$, $\text{Im}(f)$ est de dimension 2).

$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \text{Vect}(0, 2X, 6X^2 - 2) = \text{Vect}(X, 3X^2 - 1)$. Une base de $\text{Im}(f)$ est donc (Q_1, Q_2) où $Q_1 = X$ et $Q_2 = 3X^2 - 1$. Déterminons l'orthonormalisée (P_1, P_2) cette base. Puisque $Q_1 Q_2$ est impair, $\varphi(Q_1, Q_2) = \int_{-1}^1 Q_1(t)Q_2(t) dt = 0$. La famille (Q_1, Q_2) est orthogonale. Il reste à normer chaque vecteur.

$$\|Q_1\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}. \text{ Donc } P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X.$$

$$\|Q_2\|^2 = \int_{-1}^1 (3t^2 - 1)^2 dt = 2 \int_0^1 (9t^4 - 6t^2 + 1) dt = 2 \left(\frac{9}{5} - \frac{6}{3} + 1 \right) = \frac{8}{5}. \text{ Donc } P_2 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1).$$

Une base orthonormée de $\text{Im}(f)$ est (P_1, P_2) où $P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$ et $P_2 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1)$.

On sait alors que le projeté orthogonal de P_0 sur $\text{Im}(f)$ est $\varphi(P_0, P_1)P_1 + \varphi(P_0, P_2)P_2$ avec

$$\varphi(P_0, P_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 (t^2 + t) dt = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

et

$$\varphi(P_0, P_2) = \sqrt{\frac{5}{8}} \int_{-1}^1 (3t^2 - 1)(1 + t) dt = \sqrt{\frac{5}{8}} \int_{-1}^1 (3t^3 + 3t^2 - t - 1) dt = \sqrt{\frac{5}{8}} \left(3 \times \frac{2}{3} - 2 \right) = 0.$$

Le projeté orthogonal de P_0 sur $\text{Im}f$ est donc $\sqrt{\frac{2}{3}} \times P_1 + 0 \times P_2 = X$.

Le projeté orthogonal de P₀ sur Imf est p_{Im(f)}(P₀) = X.

b. On sait que $m = d(P_0, \text{Im}(f)) = \|P_0 - p_{\text{Im}(f)}(P_0)\| = \|1\| = \sqrt{2}$.

$$m = \sqrt{2}.$$

c. On sait de plus que $m = d(P_0, \text{Im}(f))$ est atteint en un seul point à savoir X . Donc, pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\|P_0 - f(P)\| = m \Leftrightarrow f(P) = X \Leftrightarrow f(P) = f\left(\frac{X}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(P - \frac{X}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow P - \frac{X}{2} \in \mathbb{R}_0[X] \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / P = \frac{X}{2} + \lambda.$$

7. a. $L_1 = (X^2 - 1)' = 2X$, $L_2 = (X^4 - 2X^2 + 1)'' = 12X^2 - 4$ et $L_3 = (X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1)^{(3)} = 120X^3 - 72X$.

$$L_1 = 2X, L_2 = 12X^2 - 4 \text{ et } L_3 = 120X^3 - 72X.$$

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, $(X^2 - 1)^k$ est de degré $2k$ et donc $L_k = ((X^2 - 1)^k)^{(k)}$ est de degré $2k - k = k$.

c. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule LEIBNIZ

$$\begin{aligned} A_k &= (X^2 - 1)^{(0)}((X^2 - 1)^k)^{(k+2)} + (k+2)(X^2 - 1)^{(1)}((X^2 - 1)^k)^{(k+1)} + \frac{(k+2)(k+1)}{2}(X^2 - 1)^{(2)}((X^2 - 1)^k)^{(k)} \\ &= (X^2 - 1)L_k'' + 2(k+2)XL_k' + (k+2)(k+1)L_k, \end{aligned}$$

et

$$B_k = (X)^{(0)}((X^2 - 1)^k)^{(k+1)} + (k+1)(X)^{(1)}((X^2 - 1)^k)^{(k+1)} = XL_k' + (k+1)L_k.$$

d. D'autre part,

$$A_k = ((X^2 - 1)^{k+1})'^{(k+1)} = 2(k+1)(X(X^2 - 1)^k)^{(k+1)} = 2(k+1)B_k.$$

On en déduit que $(X^2 - 1)L_k'' + 2(k+2)XL_k' + (k+2)(k+1)L_k = 2(k+1)(XL_k' + (k+1)L_k)$ puis que

$$\forall k \in \mathbb{N}, (X^2 - 1)L_k'' + 2XL_k' - k(k+1)L_k = 0.$$

e. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$f(L_k) = ((X^2 - 1)L_k')' = (X^2 - 1)L_k'' + 2XL_k' = k(k+1)L_k,$$

et puisque $L_k \neq 0$, L_k est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_k = k(k+1)$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, L_k \text{ est vecteur propre de } f \text{ associé à la valeur propre } \lambda_k = k(k+1).$$

f. Soit $(k, l) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ tel que $k \neq l$. D'après la question 4,

$$k(k+1)\varphi(L_k, L_l) = \varphi(k(k+1)L_k, L_l) = \varphi(f(L_k), L_l) = \varphi(L_k, f(L_l)) = l(l+1)\varphi(L_k, L_l).$$

Donc, $(k(k+1) - l(l+1))\varphi(L_k, L_l) = 0$. Mais $k(k+1) - l(l+1) = (k^2 - l^2) + (k - l) = (k - l)(k + l + 1) \neq 0$ et donc $\varphi(L_k, L_l) = 0$. Ceci montre que la famille (L_0, \dots, L_n) est une famille orthogonale. (L_0, \dots, L_n) est donc une famille orthogonale de vecteurs tous nuls et en particulier une famille libre. Comme d'autre part, $\text{card}(L_0, \dots, L_n) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) < +\infty$, (L_0, \dots, L_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$(L_0, \dots, L_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X].$$